УДК 531.38; 531.39

©2017. **Г.В. Горр, Ю.В. Кошель**

НОВЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПРЕЦЕССИОННО-ИЗОКОНИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ГИРОСТАТА С ПЕРЕМЕННЫМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ

Рассмотрена задача о движении гиростата, несущего два ротора, под действием гироскопических и потенциальных сил. Уравнения движения исследованы для программных движений, характеризующихся свойствами прецессионности и изоконичности. Выполнена редукция исходных уравнений к уравнению второго порядка относительно скорости собственного вращения гиростата. Получены новые решения, описывающие прецессионно-изоконические движения тела-носителя.

Ключевые слова: *гиростат, прецессионные и изоконические движения, редукция.*

Введение. Задача о моделировании движений систем связанных твердых тел, деформациями которых можно пренебречь, приводит к рассмотрению систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Различные способы получения уравнений движения таких систем указаны в статьях [1–4]. В монографиях [5–7] дан анализ публикаций, посвященных исследованию движений класса систем связанных твердых тел, названного гиростатом, в предположении постоянства гиростатического момента. Если полагать, что тело-носитель несет гироскопы, вращающиеся неравномерно, то система дифференциальных уравнений движения гиростата в общем случае не допускает интеграла энергии и невозможно применить теорию интегрирующего множителя, предложенную Якоби.

Исследование движения гиростата с переменным гиростатическим моментом проводится в зависимости от выбора классов программных движений. Например, в случае, когда гиростат несет один ротор, рассмотрены важные для практики прецессионные движения [8, 9]. Задача о движении гиростата, несущего два ротора, является естественным обобщением как задачи о движении гиростата с постоянным гиростатическим моментом, так и задачи о движении гиростата с одним ротором. В этой задаче изучены прецессии общего вида [10], регулярные прецессии [11], полурегулярные прецессии [12], маятниковые движения [13], прецессионно-изоконические движения [14]. Класс прецессионно-изоконических движений гиростата рассмотрен только в случае, когда на гиростат дейтвует сила тяжести [14].

В данной статье исследованы условия существования прецессионно-изоконических движений гиростата с двумя роторами под действием потенциальных и гироскопических сил. Найдены уравнения движения, выполнена их редукция к уравнению второго порядка относительно скорости собственного вращения гиростата, получены новые решения редуцированных уравнений.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Полагая, что гиростат несет два вращающихся ротора, уравнения движения запишем в виде [7]

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}}+\dot{\lambda}_1(t)\boldsymbol{\alpha}+\dot{\lambda}_2(t)\boldsymbol{\beta}=(A\boldsymbol{\omega}+\lambda_1(t)\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2(t)\boldsymbol{\beta})\times\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}\times B\boldsymbol{\nu}+\mathbf{s}\times\boldsymbol{\nu}+\boldsymbol{\nu}\times C\boldsymbol{\nu}, \quad (1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}}=\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega}. \quad (2)$$

В (1), (2) введены обозначения: $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ – вектор угловой скорости; $\boldsymbol{\nu}=(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей; $\lambda_i(t)$ $(i=1,2)$ – значения гиростатических моментов, имеющих единичные векторы $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ $(|\boldsymbol{\alpha}|=1,\ |\boldsymbol{\beta}|=1,\ \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=0)$; $A=(A_{ij})$ – тензор инерции; $B=(B_{ij})$ и $C=(C_{ij})$ $(i,j=\overline{1,3})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными обозначает дифференцирование по времени t. Уравнения (1), (2) имеют интегралы

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}=1, \qquad (A\boldsymbol{\omega}+\lambda_1(t)\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2(t)\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\nu}-\frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu})=k, \quad (3)$$

где k – произвольная постоянная.

Движение тела называется прецессионным, если постоянен угол между единичным вектором $\mathbf{a}$, неизменно связанным с телом-носителем, и вектором $\boldsymbol{\nu}$. То есть выполняется инвариантное соотношение

$$\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nu}=a_0 \qquad (a_0=\cos\theta_0,\ \theta_0=\angle(\mathbf{a},\boldsymbol{\nu})). \quad (4)$$

При исследовании прецессий гиростата на первом этапе интегрируется уравнение (2) [6]. Для этой цели дифференцируется нвариантное соотношение (4) в силу уравнения (2) и из полученного равенства устанавливается соотношение

$$\boldsymbol{\omega}=\dot{\varphi}\mathbf{a}+\dot{\psi}\boldsymbol{\nu}, \quad (5)$$

где φ и ψ – углы Эйлера. После подстновки выражения (5) в уравнение (2) получим

$$\dot{\boldsymbol{\nu}}=\dot{\varphi}(\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{a}). \quad (6)$$

В [6] показано, что при условии $\mathbf{a}=(0,0,1)$, которое не умаляет общности задачи, из (4), (6) и геометрического интеграла $\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1$ следуют равенства

$$\nu_1=a_0'\sin\varphi, \quad \nu_2=a_0'\cos\varphi, \quad \nu_3=a_0 \quad (a_0'=\sin\theta_0). \quad (7)$$

На втором этапе изучения прецессий рассматривается уравнение (1). В данной статье исследованы прецессионно-изоконические движения гиростата, т. е. предполагается, что движение гиростата не только прецессионное, но и изоконическое (т. е. подвижный и неподвижный годографы вектора угловой скорости симметричны друг другу относительно касательной к ним плоскости). Для изоконических движений гиростата, угловая скорость которого выражается по формуле (5), имеет место условие $\dot\psi = \dot\varphi$ (см. [6]). Тогда выражение (5) упростится:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot\varphi(\mathbf{a} + \boldsymbol{\nu}). \tag{8}$$

В [14] на основе уравнения (1) и равенства (8) получены три дифференциальных уравнения

$$\begin{aligned} &\dot\lambda_1(t) = \lambda_2(t)\dot\varphi\big(a_0'\gamma_1\sin\varphi + a_0'\gamma_2\cos\varphi + (a_0+1)\gamma_3\big) - p_1(\varphi)\ddot\varphi + \\ &+\dot\varphi^2 A_2^{(1)}(\varphi) + \dot\varphi B_2^{(1)}(\varphi) + C_2^{(1)}(\varphi), \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &\dot\lambda_2(t) = -\lambda_1(t)\dot\varphi\big(a_0'\gamma_1\sin\varphi + a_0'\gamma_2\cos\varphi + (a_0+1)\gamma_3\big) - q_1(\varphi)\ddot\varphi + \\ &+\dot\varphi^2 A_2^{(2)}(\varphi) + \dot\varphi B_2^{(2)}(\varphi) + C_2^{(2)}(\varphi), \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &\dot\varphi\Big\{\lambda_1(t)\big[a_0'\beta_1\sin\varphi + a_0'\beta_2\cos\varphi + (a_0+1)\beta_3\big] - \\ &-\lambda_2(t)\big[a_0'\alpha_1\sin\varphi + a_0'\alpha_2\cos\varphi + (a_0+1)\alpha_3\big]\Big\} - \\ &-r_1(\varphi)\ddot\varphi + \dot\varphi^2 A_2^{(3)}(\varphi) + \dot\varphi B_2^{(3)}(\varphi) + C_2^{(3)}(\varphi) = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Запишем обозначения, используемые в (9)–(11), для случая

$$A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3), \quad B = \mathrm{diag}(B_1, B_2, B_3), \quad C = \mathrm{diag}(C_1, C_2, C_3).$$

Из соотношений (12)–(34) статьи [14] с учетом $A_{ij} = 0$, $B_{ij} = 0$, $C_{ij} = 0$ $(i \neq j)$, имеем

$$\left.\begin{aligned} p_1(\varphi) &= a_0'\alpha_1 A_1\sin\varphi + a_0'\alpha_2 A_2\cos\varphi + (a_0+1)\alpha_3 A_3, \\ q_1(\varphi) &= a_0'\beta_1 A_1\sin\varphi + a_0'\beta_2 A_2\cos\varphi + (a_0+1)\beta_3 A_3, \\ r_1(\varphi) &= a_0'\gamma_1 A_1\sin\varphi + a_0'\gamma_2 A_2\cos\varphi + (a_0+1)\gamma_3 A_3, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} A_2^{(1)}(\varphi) &= b_2'\sin 2\varphi + b_1\cos\varphi + b_1'\sin\varphi, \\ A_2^{(2)}(\varphi) &= c_2'\sin 2\varphi + c_1\cos\varphi + c_1'\sin\varphi, \\ A_2^{(3)}(\varphi) &= d_2'\sin 2\varphi + d_1\cos\varphi + d_1'\sin\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned} B_2^{(1)}(\varphi) &= g_2'\sin 2\varphi + g_1\cos\varphi + g_1'\sin\varphi, \\ B_2^{(2)}(\varphi) &= f_2'\sin 2\varphi + f_1\cos\varphi + f_1'\sin\varphi, \\ B_2^{(3)}(\varphi) &= h_2'\sin 2\varphi + h_1\cos\varphi + h_1'\sin\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} C_2^{(1)}(\varphi) &= u_2'\sin 2\varphi + u_1\cos\varphi + u_1'\sin\varphi + u_0, \\ C_2^{(2)}(\varphi) &= v_2'\sin 2\varphi + v_1\cos\varphi + v_1'\sin\varphi + v_0, \\ C_2^{(3)}(\varphi) &= w_2'\sin 2\varphi + w_1\cos\varphi + w_1'\sin\varphi + w_0, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

где

$$\gamma_1 = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, \quad \gamma_2 = \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3, \quad \gamma_3 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1, \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned}
b_2' &= {a_0'}^2\alpha_3(A_1 - A_2), \quad b_1 = a_0'\dot{\alpha}_1\big[(a_0+1)(A_2 - A_3) - A_1\big],\\
&\quad b_1' = a_0'\alpha_2\big[(a_0+1)(A_3 - A_1) + A_2\big],\\
c_2' &= \frac{1}{2}{a_0'}^2\beta_3(A_1 - A_2), \quad c_1 = a_0'\beta_1\big[(a_0+1)(A_2 - A_3) - A_1\big],\\
&\quad c_1' = a_0'\beta_2\big[(a_0+1)(A_3 - A_1) + A_2\big],\\
d_2' &= \frac{1}{2}{a_0'}^2\gamma_3(A_1 - A_2), \quad d_1 = a_0'\gamma_1\big[(a_0+1)(A_2 - A_3) - A_1\big],\\
&\quad d_1' = a_0'\gamma_2\big[(a_0+1)(A_3 - A_1) + A_2\big],
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned}
g_2' &= \frac{1}{2}{a_0'}^2\alpha_3(B_2 - B_1), \quad g_1 = a_0'\alpha_1\big[a_0B_3 - (1+a_0)B_2\big],\\
&\quad g_1' = a_0'\alpha_2\big[(a_0+1)B_1 - a_0B_3\big],\\
f_2' &= \frac{1}{2}{a_0'}^2\beta_3(B_2 - B_1), \quad f_1 = a_0'\beta_1\big[a_0B_3 - (1+a_0)B_2\big],\\
&\quad f_1' = a_0'\beta_2\big[(a_0+1)B_1 - a_0B_3\big],\\
h_2' &= \frac{1}{2}{a_0'}^2\gamma_3(B_2 - B_1), \quad h_1 = a_0'\gamma_1\big[a_0B_3 - (1+a_0)B_2\big],\\
&\quad h_1' = a_0'\gamma_2\big[(a_0+1)B_1 - a_0B_3\big].
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$$\left.\begin{aligned}
u_2' &= \frac{\alpha_3}{2}{a_0'}^2(C_2 - C_1), \quad u_1 = a_0'\big[\alpha_1(a_0(C_3 - C_2) - s_3) + \alpha_3 s_1\big],\\
&\quad u_1' = a_0'\big[\alpha_2(s_3 - a_0(C_3 - C_1)) - \alpha_3 s_2\big], \quad u_0 = a_0(\alpha_1 s_2 - \alpha_2 s_1),\\
v_2' &= \frac{\beta_3}{2}{a_0'}^2(C_2 - C_1), \quad v_1 = a_0'\big[\beta_1(a_0(C_3 - C_2) - s_3) + \beta_3 s_1\big],\\
&\quad v_1' = a_0'\big[\beta_2(s_3 - a_0(C_3 - C_1)) - \beta_3 s_2\big], \quad v_0 = a_0(\beta_1 s_2 - \beta_2 s_1),\\
w_2' &= \frac{\gamma_3}{2}{a_0'}^2(C_2 - C_1), \quad w_1 = a_0'\big[\gamma_1(a_0(C_3 - C_2) - s_3) + \gamma_3 s_1\big],\\
&\quad w_1' = a_0'\big[\gamma_2(s_3 - a_0(C_3 - C_1)) - \gamma_3 s_2\big], \quad w_0 = a_0(\gamma_1 s_2 - \gamma_2 s_1).
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Система (9)–(11) является системой дифференциальных уравнений относительно трех функций $\varphi(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t)$. Исследуем ее, полагая

$$\dot{\varphi} = \sigma(\varphi). \tag{20}$$

Обозначая дифференцирование по φ штрихом и полагая $\varphi \neq \mathrm{const}$, из (9)–(11) найдем

$$\begin{aligned}
\lambda_1'(\varphi) &= \lambda_2(t)(a_0'\gamma_1\sin\varphi + a_0'\gamma_2\cos\varphi + (a_0+1)\gamma_3) - p_1(\varphi)\sigma'(\varphi) +\\
&+ \sigma(\varphi)A_2^{(1)}(\varphi) + B_2^{(1)}(\varphi) + \frac{1}{\sigma(\varphi)}C_2^{(1)}(\varphi),
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}\lambda_2'(\varphi) = -\lambda_1(t)(a_0'\gamma_1 \sin\varphi + a_0'\gamma_2 \cos\varphi + (a_0+1)\gamma_3) - q_1(\varphi)\sigma'(\varphi) + \\ +\sigma(\varphi)A_2^{(2)}(\varphi) + B_2^{(2)}(\varphi) + \frac{1}{\sigma(\varphi)}C_2^{(2)}(\varphi),\end{aligned} \tag{22}$$

$$\lambda_1(\varphi)(a_0'\beta_1 \sin\varphi + a_0'\beta_2 \cos\varphi + (a_0+1)\beta_3) - \lambda_2(\varphi)(a_0'\alpha_1 \sin\varphi + a_0'\alpha_2 \cos\varphi +$$

$$+ (a_0+1)\alpha_3) - r_1(\varphi)\sigma'(\varphi) + \sigma(\varphi)A_2^{(3)}(\varphi) + B_2^{(3)}(\varphi) + \frac{1}{\sigma(\varphi)}C_2^{(3)}(\varphi) = 0. \tag{23}$$

При изучении прецессионно-изоконических движений гиростата, описываемых уравнениями (21)–(23), целесообразно привлечь интеграл моментов из (3). Используя равенства (3), (5), (7) и условие $\dot{\psi} = \dot{\varphi}$, представим интеграл моментов в виде

$$\begin{aligned}\lambda_1(t)(\alpha_1 a_0' \sin\varphi + \alpha_2 a_0' \cos\varphi + \alpha_3 a_0) + \\ +\lambda_2(t)(\beta_1 a_0' \sin\varphi + \beta_2 a_0' \cos\varphi + \beta_3 a_0) = \sigma(\varphi)R_2(\varphi) + N_2(\varphi),\end{aligned} \tag{24}$$

где

$$\begin{aligned}&R_2(\varphi) = \mu_2 \cos 2\varphi + \mu_0, \qquad N_2(\varphi) = n_2 \cos 2\varphi + n_0,\\ &\mu_2 = \frac{1}{2}{a_0'}^2(A_1 - A_2), \quad \mu_0 = -\frac{1}{2}{a_0'}^2(A_1 + A_2) - A_3(a_0+1)a_0,\\ &n_2 = \frac{1}{4}{a_0'}^2(B_2 - B_1), \quad n_0 = \frac{1}{4}{a_0'}^2(B_1 + B_2) + \frac{1}{2}B_3 a_0^2 + k.\end{aligned} \tag{25}$$

Для исследования уравнений (21)–(24) можно было бы применить метод инвариантных соотношений для неавтономных дифференциальных уравнений, предложенный в статье [15]. Согласно этому методу, необходимо вычислить производные от соотношения (23) в силу (21), (22) до второго порядка включительно, а затем исследовать на совместность систему, состоящую из двух полученных уравнений и уравнения (23) (они не будут содержать производные $\lambda_1'(\varphi), \lambda_2'(\varphi)$). В данной статье применяется иной метод: он заключается в нахождении функций $\lambda_1(\varphi), \lambda_2(\varphi)$ из уравнений (23), (24) и подстановке их в уравнение (21). Таким путем получаем одно дифференциальное уравнение относительно функции $\sigma(\varphi)$. Нахождение решения этого уравнения позволит построить решение системы уравнений (21)–(23), которая описывает прецессионно-изоконическое движение гиростата.

2. Случай ортогональности гиростатического момента оси собственного вращения. Рассмотрим случай

$$\boldsymbol{\alpha} = (1,0,0), \qquad \boldsymbol{\beta} = (0,1,0), \qquad \boldsymbol{\gamma} = (0,0,1). \tag{26}$$

В формулах (9)–(19), (21)–(24) положим $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$; $\beta_1 = \beta_3 = 0$, $\beta_2 = 1$; $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 1$. Тогда уравнения (21)–(24) примут вид

$$\begin{aligned}\lambda_1'(\varphi) = (a_0+1)\lambda_2(\varphi) - a_0'A_1\sigma'(\varphi)\sin\varphi + M_1\sigma(\varphi)\cos\varphi + \\ +M_1'\cos\varphi + \frac{1}{\sigma(\varphi)}(K_1\cos\varphi + K_0),\end{aligned} \tag{27}$$

$$\lambda_2'(\varphi) = -(a_0+1)\lambda_2'(\varphi) - a_0' A_2 \sigma'(\varphi)\cos\varphi + N_1\sigma(\varphi)\sin\varphi + \\ + N_1'\sin\varphi + \frac{1}{\sigma(\varphi)}(L_1\sin\varphi + L_0), \tag{28}$$

$$a_0'(\lambda_1(\varphi)\cos\varphi - \lambda_2(\varphi)\sin\varphi) = (a_0+1)A_3\sigma'(\varphi) - \mu_2\sigma(\varphi)\sin 2\varphi + \\ + 2n_2\sin 2\varphi - \frac{1}{\sigma(\varphi)}(S_2\sin 2\varphi + S_1\cos\varphi - S_1'\sin\varphi), \tag{29}$$

$$a_0'(\lambda_1(\varphi)\sin\varphi + \lambda_2(\varphi)\cos\varphi) = \sigma(\varphi)(\mu_2\cos 2\varphi + \mu_0) + n_2\cos 2\varphi + n_0, \tag{30}$$

где

$$\begin{aligned} &M_1 = a_0'\big[(a_0+1)(A_2-A_3) - A_1\big], \quad M_1' = a_0'\big[a_0B_3 - (a_0+1)B_2\big], \\ &K_1 = a_0'\big[a_0(C_3-C_2) - s_3\big], \qquad K_0' = a_0 s_2, \\ &N_1 = a_0'\big[(a_0+1)(A_3-A_1) + A_2\big], \quad N_1' = a_0'\big[(a_0+1)B_1 - a_0B_3\big], \\ &L_1 = a_0'\big[s_3 - a_0(C_3-C_1)\big], \quad L_1' = -a_0 s_1, \\ &S_2 = \frac{1}{2}{a_0'}^2(C_2-C_1), \quad S_1 = a_0's_1, \quad S_1' = -a_0's_2. \end{aligned} \tag{31}$$

Обозначения, используемые в (30), указаны в (25).

Из уравнений (23), (30) с учетом (31) найдем $\lambda_1(\varphi), \lambda_2(\varphi)$:

$$\lambda_1(\varphi) = \frac{1}{a_0'}\Big[(a_0+1)A_3\sigma'(\varphi)\cos\varphi - l_1\sigma(\varphi)\sin\varphi + n_2(3\cos 2\varphi + 2) + \\ + n_0\sin\varphi - \frac{1}{\sigma(\varphi)}(S_2\sin 2\varphi + S_1\cos\varphi - S_1'\sin\varphi\Big], \tag{32}$$

$$\lambda_2(\varphi) = \frac{1}{a_0'}\Big[-(a_0+1)A_3\sigma'(\varphi)\sin\varphi - l_2\sigma(\varphi)\cos\varphi + n_2(3\cos 2\varphi - 2) + \\ + n_0\cos\varphi + \frac{1}{\sigma(\varphi)}(S_2\sin 2\varphi + S_1\cos\varphi - S_1'\sin\varphi\Big]. \tag{33}$$

Здесь $l_1 = (a_0+1)[a_0A_3 + (1-a_0)A_1]$, $l_2 = (a_0+1)[a_0A_3 + (1-a_0)A_2]$.

Подставим выражения (32), (33) в уравнение (27):

$$(a_0+1)A_3\sigma^2(\varphi)\big[\sigma''(\varphi) + \sigma(\varphi)\big] + \sigma'(\varphi)\big[S_2\sin 2\varphi + a_0'(s_1\cos\varphi - s_2\sin\varphi)\big] + \\ + \sigma(\varphi)\big[(a_0-2)S_2\cos 2\varphi + a_0'(1-a_0)(s_1\sin\varphi + s_2\cos\varphi) - a_0'\varkappa_1\big] - \\ - \sigma^2(\varphi)(\varkappa_2\cos 2\varphi + \varkappa_0) = 0, \tag{34}$$

где

$$\varkappa_2 = \frac{1}{4}{a_0'}^2(a_0-2)(B_1-B_2), \quad \varkappa_1 = \frac{a_0'}{2}\big[a_0(2C_3 - C_1 - C_2) - 2s_3\big], \\ \varkappa_0 = a_0k + \frac{a_0(2-a_0^2)}{2}B_3 - \frac{{a_0'}^2}{4}(a_0+2)(B_1+B_2). \tag{35}$$

При условиях $B_i = 0$, $C_i = 0$ $(i = \overline{1,3})$ уравнение (34) преобразуется к уравнению (41), указанному в [14]. Если данные условия не выполняются, а уравнение (34) может быть редуцировано к уравнению (41) из [14], то решения, полученные в [14], можно рассматривать как решения уравнения (34). Так будет, например, когда имеют место равенства

$$s_1 = s_2 = 0, \qquad C_2 = C_1, \qquad B_2 = B_1. \tag{36}$$

Уравнение (34) при наличии условий (36) таково

$$(a_0+1)A_3\sigma(\varphi)\big[\sigma''(\varphi)+\sigma(\varphi)\big] - \varkappa_0\sigma(\varphi) - a_0'\varkappa_1 = 0. \tag{37}$$

Интегрирование уравнения (37) основано [14] на приведении левой части к виду

$$\Big[(a_0+1)A_3(\sigma'^2(\varphi)+\sigma^2(\varphi)) - 2\varkappa_0\sigma(\varphi) - 2a_0'\varkappa_1 \ln|\sigma(\varphi)|\Big]' = 0.$$

Можно указать аналоги решений [14] и в случае $\sigma(\varphi) = \sigma_1\sin(\varphi) + \sigma_2\cos(\varphi) + \sigma_0$.

3. Случай $\boldsymbol{\alpha} = (0,0,1)$, $\boldsymbol{\beta} = (0,1,0)$, $\boldsymbol{\gamma} = (-1,0,0)$, $a_0 = 0$. Введем обозначения

$$\begin{gathered}
\mu_a = \frac{1}{2}(A_2 - A_1), \qquad \mu_b = \frac{1}{2}(B_1 - B_2), \qquad \mu_c = \frac{1}{2}(C_1 - C_2),\\
\mu_0 = -\frac{1}{2}(A_1 + A_2 + 2A_3), \quad a_1 = A_2 + A_3 - A_1, \quad a_2 = A_1 + A_3 - A_2,\\
a_3 = A_2 + A_1 - A_3, \qquad n_0 = k + \frac{1}{4}(B_1 + B_2).
\end{gathered} \tag{38}$$

Используя обозначения (12)–(19), (38), запишем уравнения (21)–(24)

$$\begin{gathered}
\lambda_1'(\varphi) = -\lambda_2(\varphi)\sin\varphi - A_3\sigma'(\varphi) - \mu_a\sigma(\varphi)\sin 2\varphi - \mu_b \sin 2\varphi +\\
+\frac{1}{\sigma(\varphi)}(-\mu_c\sin 2\varphi + s_1\cos\varphi - s_2\sin\varphi),
\end{gathered} \tag{39}$$

$$\lambda_2'(\varphi) = \lambda_1(\varphi)\sin\varphi - A_2\sigma'(\varphi)\cos\varphi + a_1\sigma(\varphi)\sin\varphi + B_1\sin\varphi + \frac{s_3}{\sigma(\varphi)}\sin\varphi, \tag{40}$$

$$\lambda_1(\varphi)\cos\varphi - \lambda_2(\varphi) = -A_1\sigma'(\varphi)\sin\varphi + a_2\sigma(\varphi)\cos\varphi - B_2\cos\varphi - \frac{s_3}{\sigma(\varphi)}\cos\varphi, \tag{41}$$

$$\lambda_2(\varphi) = \frac{1}{\cos\varphi}\big[\sigma(\varphi)(-\mu_a\cos 2\varphi + \mu_0) - \frac{1}{2}\mu_b\cos 2\varphi + n_0\big]. \tag{42}$$

Подставим выражение (42) в уравнение (41)

$$\begin{gathered}
\lambda_1(\varphi) = \frac{1}{\cos^2\varphi}\Big[-\frac{1}{2}\sigma'(\varphi)\sin 2\varphi + \sigma(\varphi)(a_3 - \frac{1}{2}A_3\cos 2\varphi) -\\
-\frac{1}{4}(B_1+B_2)\cos 2\varphi + m_0 - \frac{s_3}{\sigma(\varphi)}\cos^2\varphi\Big],
\end{gathered} \tag{43}$$

где
$$m_0 = k + \frac{1}{4}(B_1 - B_2). \tag{44}$$
Внесем (42), (43) в уравнение (39) и учтем выражение (44)
$$\begin{gathered} A_1 \sin\varphi \cos^2\varphi \sigma^2(\varphi)\sigma''(\varphi) - \sigma'(\varphi)(s_3\cos^2\varphi - 2A_1\sigma^2(\varphi))\cos\varphi + \\ +A_1\sigma^3(\varphi)(2+\cos^2\varphi)\sin\varphi - \sigma(\varphi)(\mu_c \sin 2\varphi + s_1\cos\varphi - s_2\sin\varphi)\cos^3\varphi - \\ -\sigma^2(\varphi)(p_0 + p_2\cos 2\varphi + p_4\cos 4\varphi)\sin\varphi = 0, \end{gathered} \tag{45}$$
где
$$p_0 = \frac{5k}{2} + \frac{1}{16}(19B_1 + B_2), p_2 = \frac{k}{4} + \frac{7B_1 - 5B_2}{16}, p_4 = \frac{1}{16}(B_1 - B_2) = \frac{1}{8}\mu_b. \tag{46}$$
В качестве примера интегрирования уравнения (45) рассмотрим случай
$$B_2 = B_1, \qquad C_2 = C_1, \qquad s_i = 0 \quad (i = \overline{1,3}), \qquad k = -\frac{1}{2}B_1. \tag{47}$$
Запишем уравнение (45) с учетом условий (47)
$$\sigma''(\varphi)\sin\varphi\cos^2\varphi + 2\sigma'(\varphi)\cos\varphi + \sigma(\varphi)(2+\cos^2\varphi)\sin\varphi = 0. \tag{48}$$
Выполним в уравнении (48) замену $\sigma(\varphi) = \widetilde{w}(\varphi)\operatorname{ctg}\varphi$. Тогда получим
$$\widetilde{w}''(\varphi) + \widetilde{w}(\varphi) = 0.$$
Общее решение этого уравнения $\widetilde{w}(\varphi) = \widetilde{c}_1\sin\varphi + \widetilde{c}_2\cos\varphi$ позволяет найти решение уравнения (48)
$$\sigma(\varphi) = (\widetilde{c}_1\sin\varphi + \widetilde{c}_2\cos\varphi)\operatorname{ctg}\varphi, \tag{49}$$
где $\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2$ – произвольные постоянные. Поскольку $\sigma(\varphi) = \dot{\varphi}$, то из (49) следует
$$\frac{d\varphi}{dt} = F(\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, \varphi), \tag{50}$$
где
$$F(\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, \varphi) = \widetilde{c}_1\cos\varphi + \widetilde{c}_2\cos^2\varphi/\sin\varphi. \tag{51}$$
Если в формуле (51) положить $\widetilde{c}_2 = 0$, то из (50) следует
$$\frac{d\varphi}{dt} = \widetilde{c}_1\cos\varphi. \tag{52}$$
Решение уравнения (52) таково (полагаем $\varphi(t_0) = 0$)
$$\varphi = \arcsin(\operatorname{th}\widetilde{c}_1(t - t_0)). \tag{53}$$
При $t \to \infty$ переменная $\varphi \to \frac{\pi}{2}$.

В случае $\widetilde{c}_1 \neq 0$ из (50), (51) получим
$$\frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}\left(\frac{\mu_0 + \widetilde{c}_2\sin\varphi - \widetilde{c}_1\cos\varphi}{\widetilde{c}_2\cos\varphi + \widetilde{c}_1\sin\varphi}\right)^{-\frac{\widetilde{c}_2}{\mu_0}} + c_* = e^{\widetilde{c}_1(t-t_0)}, \tag{54}$$

где c_* – постоянная, а μ_0 имеет значение

$$\mu_0 = \sqrt{\widetilde{c}_1^2 + \widetilde{c}_2^2}. \tag{55}$$

При $\widetilde{c}_1 = 0$ из (55) следует $\mu_0 = |\widetilde{c}_2|$, но формула (54) теряет смысл. В этом случае уравнение (51) упрощается, переходит в уравнение

$$\frac{d\varphi}{dt} = \widetilde{c}_2 \frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}, \tag{56}$$

которое легко интегрируется:

$$\varphi = \arccos\frac{\cos\varphi_0}{1 + \widetilde{c}_2 t\cos\varphi_0}, \tag{57}$$

где φ_0 – значение φ при $t = 0$. При $t \to \infty$ $\varphi \to \dfrac{\pi}{2}$ (полагаем $\varphi_0 \in (0, \dfrac{\pi}{2})$). То есть движение тела носит асимптотический характер. В случае (54) движение также носит асимптотический характер. Подчеркнем, что в силу (47) центр масс гиростата неподвижен, но распределение масс произвольно, поскольку нет условий на моменты инерции A_i $(i = \overline{1,3})$.

Для получения функций $\lambda_1(\varphi), \lambda_2(\varphi)$ необходимо выражение (49) подставить в формулы (42), (43). Значение угловой скорости гиростата найдем из равенства (8) на основе (49):

$$\boldsymbol{\omega} = \operatorname{ctg}\varphi(\widetilde{c}_1\sin\varphi + \widetilde{c}_2\cos\varphi)(\mathbf{a} + \boldsymbol{\nu}). \tag{58}$$

Компоненты вектора $\boldsymbol{\nu}$ выражаются формулами (7). Для представления решений в виде функций времени необходимо воспользоваться одним из соотношений (53), (57).

4. Свойства построенных решений. Общими свойствами построенных решений служат условия принадлежности оси собственного вращения гиростата главной оси эллипсоида инерции и равенства $B = \operatorname{diag}(B_1, B_1, B_3)$, $C = \operatorname{diag}(C_1, C_1, C_3)$. Отличительные свойства этих решений таковы.

1. Для первого решения гиростатический момент лежит в плоскости, ортогональной оси собственного вращения, центр масс лежит на оси собственного вращения гиростата. Оно является обобщением решения [14].

2. Для второго решения гиростатический момент лежит в плоскости, которая содержит ось собственного вращения гиростата, и центр масс гиростата неподвижен. Такое расположение гиростатического момента ранее в случае прецессионно-изоконических движений не рассматривалось.

Заключение. В статье аналитический метод интегрирования уравнений движения гиростата основан на редукции системы уравнений к одному дифференциальному уравнению относительно скорости собственного вращения. Это позволило получить, хотя и нестандартное, дифференциальное уравнение. Получение частных решений этих уравнений в замкнутой форме показывает эффективность метода статьи и перспективу нахождения новых случаев интегрируемости уравнений движения гиростата для прецессионно-изоконических движений.

1. *Liouville J.* Dèveloppements sur un chapitre de la Mècanique de Poisson // J. Math. Pures et Appl. – 1858. – Bd. 3. – P. 1–25.
2. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Журн. Рус. физ.-хим. о-ва. Часть физ. – 1885. – **17**, отд. 1, вып. 6. – С. 81–113.
3. *Румянцев В.В.* Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Математика, механика. – 1970. – № 2. – С. 83–96.
4. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52–73.
5. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. – Киев: Наук. думка, 1978. – 296 с.
6. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 394 с.
7. *Горр Г.В., Ковалев А.М.* Движение гиростата. – Киев: Наук. думка, 2013. – 408 с.
8. *Мазнев А.В.* Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 91–104.
9. *Мазнев А.В., Котов Г.А.* Прецессионно-изоконические движения второго типа в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом // Вiсн. Донецьк. ун-ту. Сер. А. Природничi науки. – 2012. – Вып. 1. – С. 79–83.
10. *Котов Г.А.* Прецессии общего вида в задаче о движении гиростата, несущего два маховика, с переменным гиростатическим моментом // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43. – С. 79–89.
11. *Котов Г.А.* Регулярные прецессии тяжелого гиростата, несущего два вращающихся гироскопа // Механика твердого тела. – 2014. – Вып. 44. – С. 59–66.
12. *Горр Г.В., Щетинина Е.К.* Полурегулярные прецессии тяжелого гиростата, несущего два ротора // Механика твердого тела. – 2014. – Вып. 44. – С. 16–26.
13. *Горр Г.В., Котов Г.А.* О маятниковых движениях гиростата, несущего два ротора // Механика твердого тела. – 2015. – Вып. 45. – С. 40–50.
14. *Горр Г.В., Кошель Ю.В.* Один класс прецессионно-изоконических движений гиростата, несущего два ротора // Механика твердого тела. – 2016. – Вып. 46. – С. 45–54.
15. *Ковалев А.М., Горр Г.В., Неспирный В.Н.* Инвариантные соотношения неавтономных систем дифференциальных уравнений с приложением в механике // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43. – С. 3–18.

G.V. Gorr, Yu.V. Koshel

New solutions of equations of precessionally isoconical motions of a gyrostat with the varying gyrostatic moment

The subject of consideration is the problem on motion of a gyrostat carrying two rotors and being under the action of potential and gyroscopic forces. Equations of motion are investigated for programmed motions which are defined as both precessional and isoconical. Starting equations are reduced to one second order equation with respect to the speed of proper rotation of the gyrostat. New solutions are obtained which describe precessionally isoconical motions of the carrier body.

Keywords: *gyrostat, precessional and isoconical motions, reduction.*

ГУ "Ин-т прикл. математики и механики", Донецк
gvgorr@gmail.com
Получено 21.08.17