УДК 531.38, 531.39

©2017. **Г.А. Котов, А.И. Шмыгаль**

О ПРЕЦЕССИЯХ ВТОРОГО ТИПА ГИРОСТАТА С ПЕРЕМЕННЫМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

Рассмотрена задача о движении гиростата, несущего два ротора, под действием потенциальных и гироскопических сил. Исследованы условия существования прецессий гиростата, характеризующихся постоянством скорости собственного вращения. Уравнения движения редуцированы к одному дифференциальному уравнению относительно скорости прецессии гиростата. Получены новые решения приведенных уравнений.

Ключевые слова: *прецессии второго типа, два ротора, гиростат с переменным гиростатическим моментом.*

Введение. В динамике систем связанных твердых тел традиционно применяется модель гиростата. Она использовалась в статьях Н. Е. Жуковского [1], В. В. Румянцева [2], П. В. Харламова [3], которые получили дифференциальные уравнения движения гиростата в случаях постоянного и переменного гиростатического момента. Подробный анализ результатов в задачах динамики твердого тела изложен в монографиях [4–6]. Он показывает, что большое внимание в научных публикациях уделяется изучению прецессионных движений, которые находят широкое применение в практических задачах техники. Так, например, в статьях [7, 8] рассмотрена проблема исследования условий существования прецессий гиростата с одним ротором. В статьях [9–12] изучены различные классы прецессий гиростата, который несет два вращающихся ротора. В [9] рассмотрены полурегулярные прецессии, в [10] предложен общий метод исследования прецессий, в [11] получены условия существования маятниковых движений, в [12] указаны новые решения уравнений движения гиростата в случае прецессионно-изоконических движений. Общим математическим методом служит метод инвариантных соотношений для автономных [13] и неавтономных дифференциальных уравнений [14].

В данной статье изучаются прецессии гиростата с двумя роторами в предположении, что постоянна скорость собственного вращения гиростата. Получено одно дифференциальное уравнение относительно скорости прецессии и указаны решения этого уравнения.

1. Постановка задачи. Запишем уравнения движения гиростата с двумя роторами в предположении, что на гиростат действуют потенциальные и гироскопические силы [6]

$$
\begin{aligned}
&A\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\lambda}_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \dot{\lambda}_2(t)\boldsymbol{\beta} = (A\boldsymbol{\omega} + \lambda_1(t)\boldsymbol{\alpha}\lambda_2(t)\boldsymbol{\beta}) \times \boldsymbol{\omega} \ + \\
&\quad + \boldsymbol{\omega} \times B\boldsymbol{\nu} + \mathbf{s} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{C}\boldsymbol{\nu},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{2}$$

В (1), (2) введены обозначения: $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей; $\lambda_i(t)$ $(i = 1, 2)$ – проекции гиростатического момента на единичные ортогональные векторы $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$; $A = (A_{ij})$ – тензор инерции гиростата, $B = (B_{ij})$, $C = (C_{ij})$ $(i, j = \overline{1, 3})$ – постоянные симметричные матрицы; точка над переменными обозначает дифференцирование по времени t.

Уравнения (1), (2) допускают первые интегралы

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \qquad \big[A\boldsymbol{\omega} + \lambda_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \lambda_2(t)\boldsymbol{\beta}\big] \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k, \tag{3}$$

где k – произвольная постоянная.

Зададим прецессии второго типа [5, 6]

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = a_0, \qquad \boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{a} + \dot{\psi}\boldsymbol{\nu} = n\boldsymbol{a} + \dot{\psi}\boldsymbol{\nu}, \tag{4}$$

где $\dot{\varphi} = n = \mathrm{const}$, или $\varphi = nt + \varphi_0$ (положим $\varphi_0 = 0$); $a_0 = \cos\theta_0$, $\theta_0 = \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{\nu})$; $\boldsymbol{a}$ – единичный вектор, неизменно связанный с гиростатом.

Подставим (4) в (2), тогда

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = n(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{a}). \tag{5}$$

Полагая $\boldsymbol{a} = (0, 0, 1)$, из (5) и интеграла $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$ находим [5]

$$\nu_1 = a_0' \sin nt, \qquad \nu_2 = a_0' \cos nt, \qquad \nu_3 = a_0, \tag{6}$$

где $a_0' = \sqrt{1 - a_0^2}$. Таким образом, общее решение уравнения (2) выражается в виде периодических функций (6).

Запишем уравнение (1), подставив в него $\boldsymbol{\omega}$ из (4):

$$\begin{gathered}\dot{\lambda}_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \dot{\lambda}_2(t)\boldsymbol{\beta} = -\ddot{\psi}A\boldsymbol{\nu} - \dot{\psi}n\mathrm{Sp}(A)(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{a}) + \dot{\psi}2n(\boldsymbol{\nu} \times A\boldsymbol{a}) + n^2(A\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}) + \\ + \dot{\psi}^2(A\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu}) + \lambda_1(t)\big[n(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{a}) + \dot{\psi}(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\nu})\big] + \lambda_2(t)\big[n(\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{a}) + \dot{\psi}(\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\nu})\big] + \\ + \dot{\psi}(\boldsymbol{\nu} \times B\boldsymbol{\nu}) + n(\boldsymbol{a} \times B\boldsymbol{\nu}) + \mathbf{s} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times C\boldsymbol{\nu}.\end{gathered} \tag{7}$$

В уравнении (7) $\mathrm{Sp}(A) = \sum\limits_{i=1}^{3} A_{ii}$.

Векторы $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ составляют базис. Спроецируем обе части уравнения (7) на векторы $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$. Тогда, полагая $A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3)$, $B = \mathrm{diag}(B_1, B_2, B_3)$, $C = \mathrm{diag}(C_1, C_2, C_3)$, получим

$$\begin{gathered}\dot{\lambda}_1(t) = \lambda_2(t)\big(P^{(1)}(t)\dot{\psi} + n\gamma_3\big) - \ddot{\psi}(t)p_1(t) + \dot{\psi}(t)\big[c_0(\alpha_1 \cos nt - \\ - \alpha_2 \sin nt) + R^{(1)}(t)\big] + \dot{\psi}^2(t)Q^{(1)}(t) + K^{(1)}(t) + nN^{(1)}(t) + \Pi^{(1)}(t),\end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\dot\lambda_2(t) = -\lambda_1(t)\big(P^{(1)}(t)\dot\psi + n\gamma_3\big) - \ddot\psi(t) q_1(t) + \dot\psi(t)\big[c_0(\beta_1\cos nt-\\ -\beta_2 \sin nt) + R^{(2)}(t)\big] + \dot\psi^2(t) Q^{(2)}(t) + K^{(2)}(t) + nN^{(2)}(t) + \Pi^{(2)}(t),\end{aligned}\tag{9}$$

$$\begin{aligned}&\lambda_1(t)\big[\dot\psi(t)(a_0'\beta_1\sin nt + a_0'\beta_2\cos nt + a_0\beta_3) + n\beta_3\big]-\\ &-\lambda_2(t)\big[\dot\psi(t)(a_0'\alpha_1\sin nt + a_0'\alpha_2\cos nt + a_0\alpha_3) + n\alpha_3\big] =\\ &=\ddot\psi(t) r_1(t) - \dot\psi(t)\big[c_0(\gamma_1\cos nt - \gamma_2\sin nt) + R^{(3)}(t)\big]-\\ &-\dot\psi^2(t) Q^{(3)}(t) - K^{(3)}(t) - nN^{(3)}(t) - \Pi^{(3)}(t).\end{aligned}\tag{10}$$

В уравнениях (8)–(10) введены следующие функции:

$$\begin{gathered}p_1(t) = \varepsilon_1^{(1)}\cos nt + \varepsilon_2^{(1)}\sin nt + \varepsilon_0^{(1)},\\ q_1(t) = \varepsilon_1^{(2)}\cos nt + \varepsilon_2^{(2)}\sin nt + \varepsilon_0^{(2)},\\ r_1(t) = \varepsilon_1^{(3)}\cos nt + \varepsilon_2^{(3)}\sin nt + \varepsilon_0^{(3)},\\ P^{(1)}(t) = P_1^{(1)}\cos nt + P_2^{(1)}\sin nt + P_0^{(1)},\\ Q^{(k)}(t) = Q_2^{(k)}\sin 2nt + Q_1^{(k)}\cos nt + \tilde Q_1^{(k)}\sin nt,\\ R^{(k)}(t) = R_2^{(k)}\sin 2nt + R_1^{(k)}\cos nt + \tilde R_1^{(k)}\sin nt,\\ K^{(k)}(t) = K_1^{(k)}\cos nt + K_2^{(k)}\sin nt + K_0^{(k)},\\ N^{(k)}(t) = N_1^{(k)}\cos nt + N_2^{(k)}\sin nt,\\ \Pi^{(k)}(t) = \Pi_2^{(k)}\sin 2nt + \Pi_1^{(k)}\cos nt + \tilde\Pi_1^{(k)}\sin nt,\\ k = 1,2,3,\end{gathered}\tag{11}$$

где

$$\begin{aligned}&c_0 = a_0' n(A_3 - A_2 - A_1),\\ &P_1^{(1)} = a_0'\gamma_2,\ P_2^{(1)} = a_0'\gamma_1,\ P_0^{(1)} = a_0\gamma_3,\\ &\varepsilon_1^{(1)} = a_0'\alpha_2 A_2,\quad \varepsilon_2^{(1)} = a_0'\alpha_1 A_1,\quad \varepsilon_0^{(1)} = a_0\alpha_3 A_3,\\ &\varepsilon_1^{(2)} = a_0'\beta_2 A_2,\quad \varepsilon_2^{(2)} = a_0'\beta_1 A_1,\quad \varepsilon_0^{(2)} = a_0\beta_3 A_3,\\ &\varepsilon_1^{(3)} = a_0'\gamma_2 A_2,\quad \varepsilon_2^{(3)} = a_0'\gamma_1 A_1,\quad \varepsilon_0^{(3)} = a_0\gamma_3 A_3,\\ &Q_2^{(1)} = \frac12 a_0'^2\alpha_3(A_1 - A_2), Q_1^{(1)} = a_0 a_0'\alpha_1(A_2 - A_3), \tilde Q_1^{(1)} = a_0 a_0'\alpha_2(A_3 - A_1),\\ &Q_2^{(2)} = \frac12 a_0'^2\beta_3(A_1 - A_2), Q_1^{(2)} = a_0 a_0'\beta_1(A_2 - A_3), \tilde Q_1^{(2)} = a_0 a_0'\beta_2(A_3 - A_1),\\ &Q_2^{(3)} = \frac12 a_0'^2\gamma_3(A_1 - A_2), Q_1^{(3)} = a_0 a_0'\gamma_1(A_2 - A_3), \tilde Q_1^{(3)} = a_0 a_0'\gamma_2(A_3 - A_1),\end{aligned}\tag{12}$$

$$R_2^{(1)} = \frac{1}{2}a_0'^2\alpha_3(B_1 - B_2), R_1^{(1)} = a_0a_0'\alpha_1(B_2 - B_3), \tilde{R}_1^{(1)} = a_0a_0'\alpha_2(B_3 - B_1),$$
$$R_2^{(2)} = \frac{1}{2}a_0'^2\beta_3(B_1 - B_2), R_1^{(2)} = a_0a_0'\beta_1(B_2 - B_3), \tilde{R}_1^{(2)} = a_0a_0'\beta_2(B_3 - B_1),$$
$$R_2^{(3)} = \frac{1}{2}a_0'^2\gamma_3(B_1 - B_2), R_1^{(3)} = a_0a_0'\gamma_1(B_2 - B_3), \tilde{R}_1^{(3)} = a_0a_0'\gamma_2(B_3 - B_1),$$
$$K_1^{(1)} = a_0'(\alpha_3 s_1 - \alpha_1 s_3), K_2^{(1)} = a_0'(\alpha_2 s_3 - \alpha_3 s_2), K_0^{(1)} = a_0(\alpha_1 s_2 - \alpha_2 s_1),$$
$$K_1^{(2)} = a_0'(\beta_3 s_1 - \beta_1 s_3), K_2^{(2)} = a_0'(\beta_2 s_3 - \beta_3 s_2), K_0^{(2)} = a_0(\beta_1 s_2 - \beta_2 s_1),$$
$$K_1^{(3)} = a_0'(\gamma_3 s_1 - \gamma_1 s_3), K_2^{(3)} = a_0'(\gamma_2 s_3 - \gamma_3 s_2), K_0^{(3)} = a_0(\gamma_1 s_2 - \gamma_2 s_1),$$
$$N_1^{(1)} = -a_0'\alpha_1 B_2, \quad N_2^{(1)} = -a_0'\alpha_2 B_1, \quad N_1^{(2)} = -a_0'\beta_1 B_2,$$
$$N_2^{(2)} = -a_0'\beta_2 B_1, \quad N_1^{(3)} = -a_0'\gamma_1 B_2, \quad N_2^{(3)} = -a_0'\gamma_2 B_1,$$
$$\Pi_2^{(1)} = \frac{1}{2}a_0'^2\alpha_3(C_1 - C_2), \Pi_1^{(1)} = a_0a_0'\alpha_1(C_2 - C_3), \tilde{\Pi}_1^{(1)} = a_0a_0'\alpha_2(C_3 - C_1),$$
$$\Pi_2^{(2)} = \frac{1}{2}a_0'^2\beta_3(C_1 - C_2), \Pi_1^{(2)} = a_0a_0'\beta_1(C_2 - C_3), \tilde{\Pi}_1^{(2)} = a_0a_0'\beta_2(C_3 - C_1),$$
$$\Pi_2^{(3)} = \frac{1}{2}a_0'^2\gamma_3(C_1 - C_2), \Pi_1^{(3)} = a_0a_0'\gamma_1(C_2 - C_3), \tilde{\Pi}_1^{(3)} = a_0a_0'\gamma_2(C_3 - C_1).$$

Запишем интеграл моментов из (3) в координатах

$$\begin{aligned}&\lambda_1(t)(a_0'\alpha_1 \sin nt + a_0'\alpha_2 \cos nt + a_0\alpha_3) + \lambda_2(t)(a_0'\beta_1 \sin nt +\\ &+ a_0'\beta_2 \cos nt + a_0\beta_3) = d_2 \cos 2nt + d_0 - \dot{\psi}(t)(\frac{a_0'^2}{2}(A_2 - A_1)\cos 2nt +\\ &+ \frac{1}{2}a_0'^2(A_1 + A_2) + a_0^2 A_3),\end{aligned} \tag{13}$$

где $d_2 = \frac{1}{4}a_0'^2(B_2 - B_1)$, $d_0 = k + \frac{a_0'^2}{4}(B_1 + B_2) + \frac{1}{2}a_0^2 B_3 - a_0 n A_3$.

Опишем общий метод решения задачи об условиях существования прецессий (4)–(6). Обозначая через $u(t) = \dot{\psi}(t)$, из уравнений (10), (13) находим функции $\lambda_i(t) = \lambda_i(t, u(t), \dot{u}(t), \sigma_{ij})$, где σ_{ij} – параметры задачи, указанные в (12). Подставляя данные функции в одно из уравнений (8), (9), получим дифференциальное уравнение вида $F(t, u(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t), \sigma_{ij}) = 0$, решение которого позволяет найти зависимость $\dot{\psi} = u(t)$ и тем самым построить решение $\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\boldsymbol{\nu} + n\boldsymbol{a}$, которое описывает вместе с формулами (6) прецессию второго типа.

Условия разрешимости уравнения $F(t, u(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t), \sigma_{ij}) = 0$ есть условия существования построенного таким методом решения уравнений (1), (2).

2. Новые классы полурегулярных прецессий второго типа. Положим

$$\boldsymbol{\alpha} = (1, 0, 0), \quad \boldsymbol{\beta} = (0, 1, 0), \quad \boldsymbol{\gamma} = (0, 0, 1). \tag{14}$$

Введем дополнительные обозначения

$$n_1 = a_0'^2 A_1 + a_0^2 A_3, \quad m_1 = k + \frac{a_0'^2}{4}(3B_1 - B_2) + \frac{a_0^2}{2}B_3 - a_0 n A_3,$$
$$n_2 = a_0'^2 A_2 + a_0^2 A_3, \quad m_2 = k + \frac{a_0'^2}{4}(3B_2 - B_1) + \frac{a_0^2}{2}B_3 - a_0 n A_3.$$

Используя условия (14) и значения постоянных параметров (12), из (10), (13) и (8) получим

$$\begin{gathered}\lambda_1(t) = \frac{1}{a_0' u(t)}\big[a_0 A_3 \dot u(t)\cos nt - n_1 u^2(t)\sin nt + \\ + u(t)(-d_2\cos 2nt + m_1)\sin nt - a_0'(s_1\cos nt - s_2\sin nt)\cos nt - \\ - a_0'^2(C_2 - C_1)\sin nt\cos^2 nt\big],\end{gathered} \tag{15}$$

$$\begin{gathered}\lambda_2(t) = \frac{1}{a_0' u(t)}\big[-a_0 A_3 \dot u(t)\sin nt - n_2 u^2(t)\cos nt + \\ + u(t)(-d_2\cos 2nt + m_2)\cos nt + a_0'(s_1\cos nt - s_2\sin nt)\sin nt + \\ + a_0'^2(C_2 - C_1)\sin^2 nt\cos nt\big],\end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered}\dot\lambda_1(t) - \lambda_2(t)(a_0 u(t) + n) + a_0' A_1 \dot u(t)\sin nt + a_0'[a_0(B_2 - B_3) + \\ + n(A_1 - A_2 + A_3)]u(t)\cos nt - a_0 a_0'(A_2 - A_3)u^2(t)\cos nt + \\ + a_0'[nB_2 + a_0(C_2 - C_3) + s_3]\cos nt - a_0 s_2 = 0.\end{gathered} \tag{17}$$

Отметим, что функции (15), (16) определены из уравнений (10), (13). Подставим (15), (16) в уравнение (17):

$$\begin{gathered}a_0 A_3 u(t)\ddot u(t) - a_0 A_3 \dot u^2(t) + a_0'\dot u(t)\big[s_1\cos nt - s_2\sin nt + \\ + a_0'(C_2 - C_1)\sin nt\cos nt\big] + a_0 A_3 u^4(t) + u^3(t)(a_0 d_2\cos 2nt + \sigma_1) - \\ + u^2(t)\big[\sigma_2\cos 2nt - a_0 a_0'(s_1\sin nt + s_2\cos nt) + \sigma_3\big] + \\ + n a_0' u(t)\big[s_1\sin nt + s_2\cos nt - a_0'(C_2 - C_1)\cos 2nt\big] = 0,\end{gathered} \tag{18}$$

где

$$\sigma_1 = \frac{a_0 a_0'^2}{4}(B_1 + B_2 - 4B_3) - a_0(k + \frac{a_0^2}{2}B_3) + nA_3,$$
$$\sigma_2 = \frac{a_0'^2}{2}\big[a_0(C_2 - C_1) - n(B_2 - B_1)\big],$$
$$\sigma_3 = \frac{a_0'^2}{2}\big[a_0(C_1 + C_2 - 2C_3) + n(B_1 + B_2) + 2s_3\big].$$

Вариант №1. Положим в уравнении (18)

$$a_0 = 0, \quad s_1 = s_2 = 0, \quad C_1 = C_2, \quad B_1 = B_2. \tag{19}$$

В силу (19) уравнение (18) упрощается:

$$u^2(t)[nA_3 u(t) + s_3 + nB_1] = 0,$$

откуда при $u(t) \neq 0$ находим $\dot{\psi} = u(t) = -\dfrac{s_3 + nB_1}{nA_3}$. Следовательно, скорость прецессии – постоянная величина. То есть, в случае ограничений (19) имеем вырождение полурегулярной прецессии в регулярную. Из формул (15), (16) найдем

$$\lambda_1(t) = \frac{nA_3(B_1 + 2k) + 2A_1(s_3 + nB_2)}{2nA_3} \sin nt,$$
$$\lambda_2(t) = \frac{nA_3(B_1 + 2k) + 2A_2(s_3 + nB_2)}{2nA_3} \cos nt.$$

Таким образом, при выполнении условий (19) угловая скорость гиростата, как следует из (4), имеет вид

$$\boldsymbol{\omega} = n\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{\nu},$$

где $m = -\dfrac{s_3 + nB_1}{nA_3}$, а компоненты вектора $\boldsymbol{\nu}$ выражаются по формулам (6).

Вариант №2. Рассмотрим уравнение (18) при условиях

$$a_0 = 0, \qquad s_1 = s_2 = 0, \qquad C_1 = C_2.$$

Тогда имеем

$$\dot{\psi}(t) = u(t) = \frac{1}{2A_3}\Big[(B_2 - B_1)\cos 2nt - (B_1 + B_2) - \frac{2s_3}{n}\Big]. \tag{20}$$

Полагая $B_2 \neq B_1$, $s_3 \neq -\dfrac{n}{2}(B_1 + B_2)$, из уравнения (20) получим

$$\psi(t) = \frac{1}{2nA_3}\Big[\frac{B_2 - B_1}{2}\sin 2nt - (s_3 + nB_1 + nB_2)t\Big] + \psi_0, \tag{21}$$

где $\psi_0 = \mathrm{const}$. Зависимость (21) показывает, что $\psi(t)$ – условно периодическая функция, имеющая вековую составляющую. Данное решение является частным случаем решения из [15], поскольку в (21) матрицы A, B, C являются диагональными.

Вариант №3. Пусть имеют место ограничения

$$a_0 = 0, \quad s_1 = s_2 = 0, \quad B_2 = B_1, \quad C_2 \neq C_1, \quad s_3 = -nB_1. \tag{22}$$

Обозначим $\mu = C_2 - C_1$. В силу (22) уравнение (18) принимает вид

$$\frac{1}{2}\mu\dot{u}(t)\sin 2nt - n\mu u(t)\cos 2nt + nA_3u^3(t) = 0$$

и допускает решение $u(t) = \dfrac{\sqrt{\mu}\cos nt\sin nt}{\sqrt{c\mu - A_3\cos^2 nt}}$ (c – произвольная постоянная). Следовательно,

$$\psi(t) = \int u(t)dt = \frac{\sqrt{\mu}}{nA_3}\sqrt{c\mu - A_3\cos^2 nt} + \psi_1,$$

где $\psi_1 = \mathrm{const}$. Таким образом, угол прецессии – периодическая функция с периодом $T = \dfrac{\pi}{n}$.

Компоненты $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ гиростатического момента $\boldsymbol{\lambda}(t)$ найдем из (15), (16); период этих функций $T = \dfrac{2\pi}{n}$.

Условия (22) можно ослабить: не обязательно требовать принадлежности центра масс гиростата третьей оси. В таком случае уравнение (18) запишем в виде

$$\dot{u}(t)(s_1\cos nt - s_2\sin nt + \mu\sin nt\cos nt)+$$
$$+nu(t)(s_1\sin nt + s_2\cos nt - \mu\cos 2nt) + u^3(t)nA_3 = 0$$

и с помощью замены $v(t) = s_1\cos nt - s_2\sin nt + \dfrac{1}{2}\mu\sin 2nt$ представим его в виде

$$-\left(\frac{v(t)}{u(t)}\right)^{\cdot} + nA_3u(t) = 0. \qquad (23)$$

Пусть $w = c_0 + 2A_3(4s_1\sin nt + 4s_2\cos nt - \mu\cos 2nt)$, где c_0 – произвольная постоянная. Легко проверить, что функция $u(t) = \dfrac{\dot{w}}{4nA_3\sqrt{w}} = \dfrac{2v}{\sqrt{w}}$ является решением уравнения (23). Скорость прецессии такова

$$\dot{\psi}(t) = \frac{2s_1\cos nt - 2s_2\sin nt + \mu\sin 2nt}{\sqrt{c_0 + 2A_3(4s_1\sin nt + 4s_2\cos nt - \mu\cos 2nt)}}\ .$$

Угол прецессии находится путем интегрирования уравнения

$$\dot{\psi}(t) = \frac{\dot{w}}{4nA_3\sqrt{w}}\ ,$$

т. е.

$$\psi(t) = \frac{1}{2nA_3}\sqrt{c_0 + 2A_3(4s_1\sin nt + 4s_2\cos nt - \mu\cos 2nt)} + \psi_2\ ,$$

где $\psi_2 = \mathrm{const}$. Период полученного решения, в отличие от случая $s_1 = s_2 = 0$, равен $T = \dfrac{2\pi}{n}$. Компоненты гиростатического момента определяются из (15), (16).

Вариант №4. Зададим равенства

$$B_1 = B_2, \quad C_1 = C_2, \quad s_1 = s_2 = 0, \quad s_3 = a_0(C_3 - C_1) - nB_1,$$
$$k = \frac{1}{a_0}(nA_3 + \frac{a_0 a_0'^2}{2}(B_1 - 2B_3)) - \frac{a_0^2}{2}B_3. \tag{24}$$

При этом полагаем $a_0 \neq 0$. Для записи уравнения (18) при условиях (24) вместо переменной t введем безразмерное время $\tau = nt$. Обозначая дифференцирование по τ штрихом, из (18) получим

$$\psi'(\tau)\psi'''(\tau) - (\psi''(\tau))^2 + (\psi'(\tau))^4 = 0. \tag{25}$$

Общее решение уравнения (25) таково

$$\psi(t) = \operatorname{arctg}\operatorname{sh}(c_1^* nt + c_2^*) + \psi_3, \tag{26}$$

где $\psi_3, c_1^*,\ c_2^*$ — произвольные постоянные. На основании (26) компоненты $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ из (15), (16) преобразуются к виду

$$\lambda_1(t) = \frac{1}{a_0'}\big[-a_0 n c_1^* A_3 \cos nt\,\operatorname{th}(c_1^* nt + c_2^*) - nn_1 c_1^* \frac{\sin nt}{\operatorname{ch}(c_1^* nt + c_2^*)} + m_1 \sin nt\big],$$
$$\lambda_2(t) = \frac{1}{a_0'}\big[a_0 A_3 n c_1^* \sin nt\,\operatorname{th}(c_1^* nt + c_2^*) - nn_2 c_1^* \frac{\cos nt}{\operatorname{ch}(c_1^* nt + c_2^*)} + m_2 \cos nt\big].$$

Примечательным свойством полученного решения является непериодический характер указанных компонент $\lambda_i(t)$.

В варианте 4 угловая скорость гиростата в силу (4) и (26) имеет вид

$$\boldsymbol{\omega} = n\big(\boldsymbol{a} + \frac{c_1^* \boldsymbol{\nu}}{\operatorname{ch}(c_1^* nt + c_2^*)}\big),$$

откуда следует, что при $t \to \infty$ вектор угловой скорости стремится к вектору

$$\boldsymbol{\omega}^* = n\boldsymbol{a}, \tag{27}$$

т. е. гиростат при $t \to \infty$ стремится к равномерному вращению с угловой скоростью (27), которая не коллинеарна вектору вертикали $\boldsymbol{\nu}$.

Заключение. Получены дифференциальные уравнения движения гиростата в случае прецессии второго типа. Эти уравнения (8)–(10) редуцированы к одному уравнению (18) на скорость прецессии. В предположении ортогональности гиростатического момента оси собственного вращения гиростата получены четыре решения приведенного уравнения. Первые три решения характеризуются свойством ортогональности оси собственного вращения вектору оси симметрии силовых полей.

Ни в одном из решений нет ограничений на главные моменты инерции гиростата. В четвертом решении ось собственного вращения не ортогональна вектору оси симметрии силовых полей; компоненты гиростатического момента выражаются через тригонометрические и гиперболические функции времени; движение гиростата асимптотически стремится к равномерному вращению относительно наклонной оси в неподвижном пространстве.

1. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. соч. – М.;Л.: ОГИЗ, 1949. – Т. 1. – С. 152–310.
2. *Румянцев В.В.* Об уравнении ориентации и о стабилизации спутника ротора // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Математика, механика. – 1970. – № 2. – С. 83–96.
3. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52–73.
4. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. – Киев: Наук. думка, 1978. – 296 с.
5. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 394 с.
6. *Горр Г.В., Ковалев А.М.* Движение гиростата. – Киев: Наук. думка, 2013. – 408 с.
7. *Мазнев А.В.* Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 91–104.
8. *Мазнев А.В., Котов Г.А.* Прецессионно-изоконические движения второго типа в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом // Вiсн. Донецьк. ун-ту. Сер. А. Природничi науки. – 2012. – Вип. 1. – С. 79–83.
9. *Горр Г.В., Щетинина Е.К.* Полурегулярные прецессии тяжелого гиростата, несущего два ротора // Механика твердого тела. – 2014. – Вып. 44. – С. 16–26.
10. *Котов Г.А.* Прецессии общего вида в задаче о движении гиростата, несущего два маховика с переменным гиростатическим моментом // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43. – С. 79–89.
11. *Горр Г.В., Котов Г.А.* О маятниковых движениях гиростата, несущего два ротора // Механика твердого тела. – 2015. – Вып. 45. – С. 40–50.
12. *Горр Г.В., Кошель Ю.В.* Один класс прецессионно-изоконических движений гиростата, несущего два ротора // Механика твердого тела. – 2016. – Вып. 46. – С. 45–54.
13. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. – 1974. – Вып. 6. – С. 15–24.
14. *Ковалев А.М., Горр Г.В., Неспирный В.Н.* Инвариантные соотношения неавтономных систем дифференциальных уравнений с приложением в механике // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43. – С. 3–18.
15. *Котов Г.А.* О полурегулярных прецессиях гиростата, несущего два ротора // Механика твердого тела. – 2016. – Вып. 46. – С. 37–44.

G.A. Kotov, A.I. Shmigal

On the second type precessions of a gyrostat with the variable gyrostatic moment under the action of potential and gyroscopic forces

The problem of motion of a gyrostat carrying two rotors under the action of potential and gyroscopic forces is considered. Conditions of existence of precession motions of the gyrostat with permanent self-rotation velocity are studied. The equations of motions are reduced to one differential equation for the precession velocity of the gyrostat and new solutions of this equation are obtained.

Keywords: *second type precessions, two rotors, gyrostat with variable gyrostatic moment.*

ГОУ ВПО “Донбасская национальная акад. строительства и архитектуры”, Макеевка,
ГУ “Ин-т прикл. математики и механики”, Донецк
kotov_ga@rambler.ru, agreena@mail.ru

Получено 25.05.17