УДК 531.38

©2017. **А. В. Зыза**

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ КИРХГОФА–ПУАССОНА НА ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЯХ

Рассмотрены условия существования специального класса полиномиальных решений уравнений Кирхгофа–Пуассона задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. На основании исследования решений редуцированных уравнений получены новые случаи интегрируемости указанной задачи.

Ключевые слова: *полиномиальное решение, гиростат, уравнения Кирхгофа–Пуассона, потенциальные и гироскопические силы.*

Введение. Актуальность построения решений уравнений движения гиростата, имеющего неподвижную точку, отмечена многими учеными в области аналитической механики (см., например, работы Ф. Кляйна и А. Зоммерфельда [1], П.В. Харламова [2]). Классические подходы в использовании уравнений Лагранжа второго рода или уравнений Гамильтона применимы лишь в ограниченном числе случаев. Как показано Н. Ковалевским, С.А. Чаплыгиным, П.В. Харламовым, А.И. Докшевичем, Е.И. Харламовой, уравнения движения гиростата, записанные в компонентах момента количества движения и единичного вектора оси симметрии силового поля, позволяют проводить построение новых решений в замкнутом виде. Обзор результатов, полученных в динамике гиростата, приведен в книгах [3, 4].

Полиномиальные классы решений уравнений движения гиростата в различных силовых полях относятся к наиболее изученным.

В задачах о движении твердого тела и гиростата под действием силы тяжести полиномиальные решения получены Н. Ковалевским, С.А. Чаплыгиным, П.В. Харламовым и другими. Все они отвечают случаю, когда центры масс твердого тела, имеющего неподвижную точку, и гиростата с неподвижной точкой лежат на главной оси эллипсоида инерции. В таком же предположении построены полиномиальные решения для уравнений Кирхгофа–Пуассона [5–9] и для уравнений движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона [10, 11].

В данной статье продолжено исследование полиномиальных решений уравнений Кирхгофа–Пуассона [5–9]. Построены новые решения, которые можно описать с помощью двух полиномиальных и одного рационального инвариантных соотношений.

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение заряженного и намагниченного гиростата с неподвижной точкой в поле потенциальных и гироскопических сил. Потенциальные силы возникают при взаимодействии магнитов с постоянным магнитным полем, электрических зарядов с электрическим полем и при ньютоновском притяжении масс. Центры ньютоновского и кулоновского притяжений лежат на оси, проходящей через неподвижную точку параллельно вектору, характеризующему направление постоянного магнитного поля. Гироскопические силы определяются действием магнитного поля на движущиеся в пространстве электрические заряды и циклическим движением роторов в теле-носителе. Движение такого гиростата описывается дифференциальными уравнениями класса Г. Кирхгофа [12], которые в векторном виде таковы

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \omega \times B\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{s}), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{1}$$

Эти уравнения допускают три первых интеграла

$$A\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} - 2(\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\nu}) + (C\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}) = 2E_0, \;\; 2(A\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda})\cdot\boldsymbol{\nu} - (B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}) = 2k_0, \;\; \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1. \tag{2}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega} = (p, q, r)$ – вектор угловой скорости гиростата; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, характеризующий направление оси симметрии силовых полей; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, 0, 0)$ – гиростатический момент; $\mathbf{s} = (s_1, 0, 0)$ – вектор обобщенного центра масс; A – тензор инерции гиростата, построенный в неподвижной точке; B и C – симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными обозначает относительную производную, E_0 и k_0 – постоянные интегралов.

Запишем уравнения (1) и интегралы (2) в скалярном виде, полагая $A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, A_3)$, $B = \mathrm{diag}(B_1, B_2, B_3)$, $C = \mathrm{diag}(C_1, C_2, C_3)$:

$$\left.\begin{aligned}
&A_1\dot{p} = (A_2 - A_3)qr + B_3q\nu_3 - B_2r\nu_2 + (C_3 - C_2)\nu_2\nu_3;\\
&A_2\dot{q} = (A_3 - A_1)pr + B_1r\nu_1 - B_3p\nu_3 + (C_1 - C_3)\nu_1\nu_3 - \lambda_1 r - s_1\nu_3;\\
&A_3\dot{r} = (A_1 - A_2)pq - B_1q\nu_1 + B_2p\nu_2 + (C_2 - C_1)\nu_1\nu_2 + \lambda_1 q + s_1\nu_2;
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\dot{\nu}_1 = r\nu_2 - q\nu_3, \quad \dot{\nu}_2 = p\nu_3 - r\nu_1, \quad \dot{\nu}_3 = q\nu_1 - p\nu_2; \tag{4}$$

$$\left.\begin{gathered}
A_1p^2 + A_2q^2 + A_3r^2 - 2s_1\nu_1 + C_1\nu_1^2 + C_2\nu_2^2 + C_3\nu_3^2 = 2E_0;\\
2(A_1p + \lambda_1)\nu_1 + 2A_2q\nu_2 + 2A_3r\nu_3 - (B_1\nu_1^2 + B_2\nu_2^2 + B_3\nu_3^2) = 2k_0;\\
\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1.
\end{gathered}\right\} \tag{5}$$

Поставим задачу об исследовании условий существования у уравнений (3), (4) решений вида

$$\begin{gathered}
q^2 = Q(p) = \sum_{k=0}^{n} b_kp^k, \quad r^2 = R(p) = \sum_{i=0}^{m} c_ip^i,\\
\nu_1 = \varphi(p) = \sum_{j=0}^{l} a_jp^j, \quad \nu_2 = \frac{\psi(p)}{p}q, \quad \nu_3 = \varkappa(p)r,\\
\psi(p) = \sum_{i=0}^{n_1} g_ip^i, \quad \varkappa(p) = \sum_{j=0}^{m_1} f_jp^j,
\end{gathered} \tag{6}$$

где n, m, l, n_1, m_1 – натуральные числа или нули; b_k, c_i, a_j, g_i, f_j – неизвестные постоянные, подлежащие определению.

Если в (6) $g_0 = 0$, то получаем класс полиномиальных решений, условия существования которого в рассматриваемой задаче полностью изучены в работах [5, 6].

Подставим выражения (6) в уравнения (3), (4) и геометрический интеграл из (5):

$$\dot{p} = \frac{\Phi(p)}{p\varphi'(p)}\sqrt{Q(p)R(p)}, \quad \Phi(p) = \psi(p) - p\varkappa(p); \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} &(Q(p)\psi^2(p)p^{-2})'\Phi(p) = 2\varphi'(p)\psi(p)(p\varkappa(p) - \varphi(p));\\ &(R(p)\varkappa^2(p))'\Phi(p) = 2\varphi'(p)\varkappa(p)p(\varphi(p) - \psi(p)); \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} &A_1\Phi(p) = \varphi'(p)[(C_3 - C_2)\psi(p)\varkappa(p)+\\ &+B_3\varkappa(p)p - B_2\psi(p) + (A_2 - A_3)p],\\ &A_2Q'(p)\Phi(p) = 2\varphi'(p)p[(C_1 - C_3)\varphi(p)\varkappa(p)-\\ &-\varkappa(p)(B_3p + s_1) + B_1\varphi(p) + (A_3 - A_1)p - \lambda_1],\\ &A_3R'(p)\Phi(p) = 2\varphi'(p)[(C_2 - C_1)\varphi(p)\psi(p) + \psi(p)(B_2p + s_1)-\\ &-B_1\varphi(p)p + (A_1 - A_2)p^2 + \lambda_1 p]; \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$(\varphi^2(p) + R(p)\varkappa^2(p) - 1)p^2 + Q(p)\psi^2(p) = 0. \tag{10}$$

В уравнениях (7)–(9) штрихом обозначена производная по переменной p. После интегрирования уравнений (8), (9) зависимость p от времени t находим из дифференциального уравнения (7).

2. Одно новое частное решение. Рассмотрим случай когда в (6) $n = 4$, $m = 4$, $l = 2$, $n = 1$, $m_1 = 0$. Тогда

$$\begin{gathered} q^2 = Q(p) = b_4p^4 + b_3p^3 + b_2p^2 + b_1p + b_0,\\ r^2 = R(p) = c_4p^4 + c_3p^3 + c_2p^2 + c_1p + c_0,\\ \nu_1 = \varphi(p) = a_2p^2 + a_1p + a_0, \quad \nu_2 = \frac{\psi(p)}{p}q, \quad \nu_3 = \varkappa(p)r,\\ \psi(p) = g_1p + g_0, \quad \varkappa(p) = f_0. \end{gathered} \tag{11}$$

Подставим значения для компонент векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\nu}$ из (11) в уравнения (8)–(10) и потребуем их выполнение при всех p. Получим систему уравнений на параметры задачи и коэффициенты решения (11):

$$
\begin{gathered}
\alpha g_1 f_0 + B_3 f_0 - B_2 g_1 + A_2 - A_3 = 0, \quad A_1(g_1 - f_0) - 2a_2\mu = 0,\\
A_1 g_0 - a_1\mu = 0, \quad 2b_4 g_1\mu + A_1 a_2 = 0,\\
(2b_4 g_0 + 3b_3 g_1)\mu - 2A_1(f_0 - a_1) = 0,\\
(b_3 g_0 + 2b_2 g_1)\mu + 2A_1 a_0 = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_0 = 0, \quad 2c_4 f_0\mu - A_1 a_2 = 0,\\
3c_3 f_0\mu - 2A_1(a_1 - g_1) = 0, \quad c_2 f_0\mu + A_1(g_0 - a_0) = 0,\\
c_1 = 0, \quad 2A_2 b_4\mu - A_1(\beta f_0 + B_1)a_2 = 0, \qquad (12)\\
3A_2 b_3\mu - 2A_1((\beta f_0 + B_1)a_1 - B_3 f_0 + A_3 - A_1) = 0,\\
A_2 b_2\mu - A_1((\beta f_0 + B_1)a_0 - f_0 s_1 - \lambda_1) = 0, \quad a_0^2 + b_2 g_0^2 + c_0 f_0^2 - 1 = 0,\\
2A_3 c_4\mu + A_1((\alpha+\beta)g_1 + B_1)a_2 = 0, \quad (\alpha+\beta)a_0 - s_1 = 0,\\
3A_3 c_3\mu + 2A_1((\alpha+\beta)(a_1 g_1 + a_2 g_0) - B_2 g_1 + B_1 a_1 + A_2 - A_1) = 0,\\
A_3 c_2\mu + A_1((\alpha+\beta)(a_0 g_1 + a_1 g_0) - B_2 g_0 + B_1 a_0 - \lambda_1 - g_1 s_1) = 0.
\end{gathered}
$$

Здесь $\alpha = C_3 - C_2,\ \beta = C_1 - C_3,\ \mu = (\alpha f_0 - B_2)g_0$.

Система уравнений (12) совместна относительно параметров $A_1, A_2, A_3, B_3, g_0, f_0$. Запишем решение этой системы так

$$
\begin{gathered}
b_4 = -\frac{(A_1+\mu_2)(A_1+4\mu_2)A_2(A_1 f_0)^2}{\mu_1^2\mu_2 g_0^2},\\
b_3 = \frac{2(A_1+\mu_2)(A_1+4\mu_2)(A_2-\mu_2)A_1 f_0}{3\mu_1\mu_2^2 g_0},\\
b_2 = -\frac{A_1}{12(A_1+\mu_2)A_2\mu_2^3}[4(B_3 f_0)^4 + 8(A_1 + A_2 - 2A_3)(B_3 f_0)^3 +\\
+4(A_1^2 - (A_2 + 6A_3)A_1 + 2(2A_2^2 - 3A_2A_3 + 3A_3^2))(B_3 f_0)^2 +\\
+2((3A_2 - 4A_3)A_1^2 - 4(3A_2^2 - A_2A_3 - 3A_3^2)A_1 + 4(A_2 - A_3)(3A_2^2 - A_2A_3 +\\
+2A_3^2))B_3 f_0 + (3A_2^2 - 6A_2A_3 + 4A_3^2)A_1^2 - 4(A_2 - A_3)(3A_2^2 - 3A_2A_3 -\\
-2A_3^2)A_1 + +4(3A_2^2 + A_3^2)(A_2 - A_3)^2], \quad b_1 = 0, \quad b_0 = 0,\\
c_4 = -\frac{(A_1+\mu_2)(A_1+4\mu_2)^2(A_1A_2 f_0)^2}{\mu_1^3\mu_2 g_0^2},\\
c_3 = \frac{2(A_1+\mu_2)(A_1+4\mu_2)^2 A_1 A_2^2 f_0}{3(\mu_1\mu_2)^2 g_0},\\
c_2 = -\frac{A_1A_2(A_1+4\mu_2)}{12\mu_1\mu_2^3(A_1+\mu_2)}[8(B_3 f_0)^3 - 8(A_1 - 5A_2 + 3A_3)(B_3 f_0)^2 +\\
+2(A_1^2 - 4(A_2 - 2A_3)A_1 + 4(7A_2 - 3A_3)(A_2 - A_3))B_3 f_0 + (3A_2 - 2A_3)A_1^2 +\\
+8(A_2 - A_3)A_3A_1 + 8(3A_2 - A_3)(A_2 - A_3)^2], \quad c_1 = 0,
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
a_2=-\frac{2(A_1+\mu_2)(A_1+4\mu_2)A_1A_2f_0^2}{\mu_1^2 g_0},\quad a_1=\frac{(A_1+4\mu_2)A_1A_2f_0}{\mu_1\mu_2},\\
a_0=-\frac{g_0}{12\mu_2^2(A_1+\mu_2)}[-4(B_3f_0)^3-4(5A_1-A_2-3A_3)(B_3f_0)^2+\\
+2(A_1^2-4(4A_2-5A_3)A_1+2(5A_2+3A_3)(A_2-A_3))B_3f_0+(3A_2-\\
-2A_3)A_1^2-4(A_2-A_3)(3A_2-5A_3)A_1+4(3A_2+A_3)(A_2-A_3)^2],\\
c_0=-(a_0^2+b_2g_0^2-1)f_0^{-2},\quad g_1=-\frac{(A_1+4\mu_2)A_2f_0}{\mu_1},\\
B_1=-\frac{1}{2(A_1-2\mu_2)f_0}[4(B_3f_0)^2+4(A_1+A_2-3A_3)B_3f_0+\\
+(3A_2-2A_3)A_1-8(A_2-A_3)A_3],\\
B_2=-\frac{1}{(A_1+4\mu_2)(A_1-2\mu_2)A_2f_0}[4(3A_1-2A_2)(B_3f_0)^3+4(3A_1^2+(5A_2-\\
-9A_3)A_1-4A_2(A_2-A_3))(B_3f_0)^2+((25A_2-24A_3)A_1^2+2(A_2-A_3)(A_2-\\
-18A_3)A_1-8A_2(A_2-A_3)^2)B_3f_0+6A_1(A_2-A_3)^2(2A_1-A_2-2A_3)],\\
\alpha=-\frac{1}{(A_1+4\mu_2)(A_1-2\mu_2)A_2f_0^2}[8(B_3f_0)^4+16(A_1+A_2-2A_3)(B_3f_0)^3+\\
+2(4A_1^2+(17A_2-24A_3)A_1+4(A_2-A_3)(A_2-6A_3))(B_3f_0)^2+\\
+2(A_1+A_2-A_3)((9A_2-8A_3)A_1-16A_3(A_2-A_3))B_3f_0+\\
+(A_2-A_3)((9A_2-8A_3)A_1^2-16(A_2-A_3)A_3A_1-8A_3(A_2-A_3)^2)],\\
\beta=\frac{1}{2(A_1+4\mu_2)(A_1-2\mu_2)f_0^2}[4(3A_1-4A_3)(B_3f_0)^2+\\
+4(3A_1^2+(3A_2-5A_3)A_1-8A_3(A_2-A_3))B_3f_0+(9A_2-10A_3)A_1^2-\\
-8(A_2-A_3)A_1A_3-16A_3(A_2-A_3)^2],\\
s_1=\frac{\mu_1^2g_0}{24(A_1+\mu_2)(A_1+4\mu_2)(A_1-2\mu_2)\mu_2^2A_2f_0^2}[-4(B_3f_0)^3-4(5A_1-\\
-A_2-3A_3)(B_3f_0)^2+2(A_1^2-4(4A_2-5A_3)A_1+\\
+2(5A_2+3A_3)(A_2-A_3))B_3f_0+(3A_2-2A_3)A_1^2-\\
-4(A_2-A_3)(3A_2-5A_3)A_1+4(3A_2+A_3)(A_2-A_3)^2],\\
\lambda_1=-\frac{\mu_1g_0}{24(A_1+\mu_2)(A_1+4\mu_2)(A_1-2\mu_2)\mu_2^2A_2f_0}[-8(9A_1-8A_2)(B_3f_0)^4-\\
-4(18A_1^2+3(11A_2-24A_3)A_1-16A_2(3A_2-4A_3))(B_3f_0)^3-12(2(7A_2-\\
-9A_3)A_1^2+(A_2^2-33A_2A_3+36A_3^2)A_1-16A_2(A_2-A_3)(A_2-\\
-2A_3))(B_3f_0)^2+2(5A_2A_1^3-6(11A_2^2-28A_2A_3+18A_3^2)A_1^2+\\
+6(A_2-A_3)(7A_2^2+9A_2A_3-24A_3^2)A_1+32A_2(A_2-4A_3)(A_2-
\end{gathered}
\tag{13}
$$

$$-A_3)^2)B_3f_0 + A_2(9A_2 - 10A_3)A_1^3 - 12(A_2 - A_3)(3A_2^2 -$$
$$-8A_2A_3 + 6A_3^2)A_1^2 + 12(3A_2^2 - A_2A_3 - 6A_3^2)(A_2 -$$
$$-A_3)^2A_1 - 64A_2A_3(A_2 - A_3)^3].$$

Здесь

$$\mu_1 = 4(B_3f_0)^2 + 4(A_1 + A_2 - 2A_3)B_3f_0 + (3A_2 - 4A_3)A_1 - 4A_3(A_2 - A_3),$$
$$\mu_2 = A_2 - A_3 + B_3f_0.$$

Решение (11) при условиях (13) будет действительным, например, при выполнении неравенств

$$c_0 > 0 \quad \text{и} \quad b_2 > 0. \tag{14}$$

Зависимость переменной p от времени получим из дифференциального уравнения (7)

$$\dot{p} = \frac{\mu}{A_1}\sqrt{(b_4p^2 + b_3p + b_2)(c_4p^4 + c_3p^3 + c_2p^2 + c_0)}, \tag{15}$$
$$\mu = \frac{\mu_1\mu_2g_0}{(A_1 + 4\mu_2)A_2f_0}.$$

Рассмотрим численный пример решения (11), (13), (15) дифференциальных уравнений движения гиростата (3), (4) при условиях (14).

Пусть

$$A_1 = a, \quad A_2 = \frac{4}{3}a, \quad A_3 = \frac{5}{4}a, \quad B_3 = b, \quad f_0 = -\frac{a}{5b},$$
$$g_0 = -\frac{a^2}{5b^2} \quad \left(0 < a < \left(\frac{134888180}{92214083}\right)^{1/4} b\right).$$

Тогда из (11), (13) получим

$$\begin{gathered}
B_1 = \frac{147}{37}b, \quad B_2 = -\frac{19321}{9472}b,\\
\alpha = (C_3 - C_2) = \frac{280493b^2}{18944a}, \quad \beta = (C_1 - C_3) = -\frac{38825b^2}{1184a},\\
\boldsymbol{\lambda} = \left(-\frac{127491481a^2}{24598784b}, 0, 0\right), \quad \mathbf{s} = \left(\frac{735586413a}{245987840}, 0, 0\right),\\
q^2 = p^2\,Q^*(p), \quad Q^*(p) = \frac{3392000}{794983}\frac{b^2p^2}{a^2} - \frac{491840}{16513}\frac{bp}{a} + \frac{1192521}{72716},\\
r^2 = R(p) = -\frac{2170880000}{803727813}\frac{b^2p^4}{a^2} + \frac{868352000}{50083929}\frac{bp^3}{a} - \frac{5606400}{6126323}p^2 +\\
+\frac{5(134888180b^4 - 92214083a^4)}{26977636(ab)^2},\\
\nu_1 = \varphi(p) = \frac{67840}{340707}p^2 - \frac{2560}{2359}\frac{ap}{b} - \frac{2159}{12985}\frac{a^2}{b^2},\\
\nu_2 = -\left(\frac{128a}{1011b}p + \frac{a^2}{5b^2}\right)\sqrt{Q^*(p)}, \quad \nu_3 = -\frac{a}{5b}r.
\end{gathered} \tag{16}$$

Функцию $p = p(t)$ находим из уравнения (15). При этом зависимость $p = p(t)$ выражается функциями времени, получаемыми в результате обращения гиперэллиптических интегралов.

Полученное решение (15), (16) характеризуется одним линейным инвариантным соотношением $r = f_0^{-1}\nu_3$ и не является частным случаем решения [13].

3. Второе новое частное решение. Случай $n = 3$, $m = 2$, $l = 2$, $n_1 = 1$, $m_1 = 1$. Пусть теперь полиномы решения (6) имеют вид

$$q^2 = Q(p) = b_3p^3 + b_2p^2 + b_1p + b_0, \quad r^2 = R(p) = c_2p^2 + c_1p + c_0,$$
$$\nu_1 = \varphi(p) = a_2p^2 + a_1p + a_0, \quad \nu_2 = \frac{\psi(p)}{p}q, \quad \nu_3 = \varkappa(p)r, \tag{17}$$
$$\psi(p) = g_1p + g_0, \quad \varkappa(p) = f_1p + f_0.$$

Подставим полиномы из (17) в первое динамическое уравнение системы (9). Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях многочленов, стоящих в левой и правой частях этого уравнения, заключаем, что оно при $a_1 \neq 0$ может быть тождеством по p только при выполнении условия

$$\tilde{\alpha}q_1 + B_3 = 0, \quad \tilde{\alpha} = C_3 - C_2. \tag{18}$$

Тогда в силу (18) первое уравнение из (9) упрощается:

$$\Phi(p) = \varphi'(p)(d_1p + d_0)A_1^{-1},$$
$$d_1 = \tilde{\alpha}(g_1f_0 + g_0f_1) + B_3f_0 - B_2g_1 + A_2 - A_3, \tag{19}$$
$$d_0 = (\tilde{\alpha}f_0 - B_2)g_0.$$

Соотношения (19) позволяют упростить другие уравнения исследуемой системы (8), (9). Исключим функцию $\Phi(p)$ из уравнений (8) и второго и третьего уравнений системы (9). Подставим в упрощенные уравнения, геометрический интеграл (10) и в функцию $\Phi(p)$ из (19) полиномы (17). Требование того, чтобы полученные равенства при условии (18) были тождествами по p приводит к следующей системе уравнений на параметры задачи и коэффициенты решения (17):

$$2a_2d_1 + A_1f_1 = 0, \quad 2a_2d_0 + a_1d_1 + A_1(f_0 - g_1) = 0, \quad a_1d_0 - A_1g_0 = 0,$$
$$b_0 = 0, \quad b_1 = 0, \quad \eta_1d_1 + 2A_1(a_2 - f_1) = 0, \quad \eta_2d_1 + \eta_1d_0 + 2A_1(a_1 - f_0) = 0,$$
$$C_1 = C_3,$$
$$\eta_2d_0 + 2A_1a_0 = 0, \quad \gamma_2d_1 - 2A_1a_2 = 0, \quad \gamma_1d_1 + \gamma_2d_0 + 2A_1(g_1 - a_1) = 0,$$
$$\gamma_0d_1 + \gamma_1d_0 + 2A_1(g_0 - a_0) = 0, \quad \gamma_0d_0 = 0,$$
$$3b_3d_1A_2 + 2A_1(B_3f_1 - a_2B_1) = 0, \quad A_2(3b_3d_0 + 2b_2d_1) + 2A_1(f_1s_1 + B_3f_0-$$
$$-a_1B_1 + A_1 - A_3) = 0, \quad b_2d_0A_2 + A_1(f_0s_1 + \lambda_1 - B_1a_0) = 0, \quad \tilde{\alpha}g_1 + B_1 = 0,$$

$$c_2 d_1 A_3 + A_1(\tilde{\alpha}(a_2 g_0 + a_1 g_1) - B_2 g_1 + B_1 a_1 + A_2 - A_1) = 0, \tag{20}$$
$$A_3(2c_2 d_0 + c_1 d_1) + 2A_1(\tilde{\alpha}(a_1 g_0 + a_0 g_1) - B_2 g_0 + B_1 a_0 - s_1 g_1 - \lambda_1) = 0,$$
$$c_1 d_0 A_3 + 2A_1(\tilde{\alpha} a_0 - s_1) g_0 = 0, \quad a_0^2 - 1 + b_2 g_0^2 + c_0 f_0^2 = 0.$$

Здесь $\eta_1 = 3b_3 g_1$, $\eta_2 = 2b_2 g_1 + b_3 g_0$, $\gamma_0 = 2c_0 f_1 + c_1 f_0$, $\gamma_1 = 3c_1 f_1 + 2c_2 f_0$, $\gamma_2 = 4c_2 f_1$.

Система алгебраических уравнений (18), (20) разрешима относительно ненулевых параметров A_2, B_3, a_2, a_1. Обозначая $h = a_2 f_1^{-1}$, запишем решение этой системы в виде

$$C_1 = C_3, \quad B_1 = B_3, \quad \alpha = C_3 - C_2 = \frac{B_3^2}{A_2},$$
$$A_1 = \frac{a_1 B_3}{12h^2 A_2(2A_2(h-1) - 3a_1 B_3)(2A_2(h+2) + 3a_1 B_3)} \times$$
$$\times\{(h+2)(12A_2^3 h^3 + 4(3A_2 - 4a_1 B_3)A_2^2 h^2 - ((46A_2 + 9a_1 B_3)a_1 B_3 +$$
$$+24A_2^2)A_2 h + (2A_2 - 3a_1 B_3)(4A_2 - 3a_1 B_3)a_1 B_3) + \tilde{\mu}\sqrt{\Delta}\};$$
$$A_3 = \frac{6A_1 A_2 h^2 - (3A_1 + a_1 B_3)a_1 B_3 h + a_1^2 B_3^2}{\tilde{\mu} h^2};$$
$$B_2 = \frac{(-4A_2^2 h^2 + 2(3a_1 B_3 + 2(3A_1 - 2A_2))A_2 h - 3a_1^2 B_3^2)B_3}{2\tilde{\mu} A_2 h};$$
$$s_1 = -\frac{(h-1)(10A_1 A_2 h^2 - (4A_1 A_2 + (21A_1 - a_1 B_3)a_1 B_3)h + 8a_1^2 B_3^2)}{6\tilde{\mu} h^2 f_2},$$
$$\lambda_1 = \frac{h-1}{12\tilde{\mu}^2 h^3 a_1 B_3^2 f_2}\{8(6A_1 - 5a_1 B_3)A_1 A_2^3 h^4 + 4(-a_1^3 B_3^3 + \tag{21}$$
$$+(35a_1 B_3 - 16A_2)a_1 B_3 A_1 + 24A_1^2 A_2)A_2^2 h^3 + 2(4(a_1 B_3)^3 -$$
$$-(81A_1 + 20A_2)(a_1 B_3)^2 + 2(38A_2 - 27A_1)A_1 a_1 B_3 + 8A_1 A_2(2A_2 -$$
$$-9A_1))A_2 a_1 B_3 h^2 + (-3a_1^3 B_3^3 + 7(9A_1 + 8A_2)(a_1 B_3)^2 + 4(9A_1 -$$
$$-16A_2)A_2 a_1 B_3 + 32A_1 A_2^2)(a_1 B_3)^2 h + 8(A_2 - 3a_1 B_3)(a_1 B_3)^4\},$$
$$c_2 = -h^2, \quad a_0 = \delta_1 f_1^{-1}, \quad c_0 = \delta_2 f_1^{-2},$$
$$c_1 = \frac{h}{3\tilde{\mu} a_1 B_3^2 f_1}\{4A_2^2(3A_1 - a_1 B_3)h^2 + 2(-3a_1^2 B_3^2 + (9A_1 - 8A_2)a_1 B_3 +$$
$$+12A_1 A_2)A_2 h - (16A_2^2 + 3(4A_2 - 3a_1 B_3)a_1 B_3)a_1 B_3\},$$
$$b_3 = 4(1-h)h B_3 f_1 (3A_2)^{-1}, \quad b_1 = 0, \quad b_0 = 0, \quad g_1 = -A_2 B_3^{-1}, \quad g_0 = \delta_3 f_1^{-1},$$
$$b_2 = \frac{1}{3\tilde{\mu} h A_2 a_1 B_3}\{12A_1 A_2^2 h^4 + 2(-9(a_1 B_3)^2 + 2(5A_1 - 3A_2)a_1 B_3 +$$
$$+12A_1 A_2)A_2 h^3 + (17(a_1 B_3)^2 + 3(A_1 - 4A_2)a_1 B_3 + 2A_2(A_1 - 12A_2)) \times$$
$$\times a_1 B_3 h^2 - (10(a_1 B_3)^2 + 3(A_1 - 4A_2)a_1 B_3 + 4A_1 A_2)a_1 B_3 h + 2(a_1 B_3)^3\},$$

$$f_0 = \frac{4(A_1 - a_1B_3)A_2^2h^2 + 2((3A_1 - 4A_2 + 3a_1B_3)a_1B_3 + 4A_1A_2)A_2h - 3(a_1B_3)^3}{2\tilde{\mu}ha_1B_3^2},$$

$$f_1 = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2 f_0^2 + \delta_3^2 b_2}.$$

Здесь

$$\tilde{\mu} = 2(h+2)A_2 - 3a_1B_3,$$

$$\Delta = (h+2)(36(A_2h - a_1B_3)A_1^3h^4 - (59(a_1B_3)^2 +$$
$$+156A_2a_1B_3 + 108A_2^2)A_2^2h^3 + 6((27A_2 + 11a_1B_3)(a_1B_3)^2 +$$
$$+4A_2^2(3A_2 + 10a_1B_3))A_2h^2 - 3(4A_2^2(4A_2 + 7a_1B_3) -$$
$$-(4A_2 + 3a_1B_3)(a_1B_3)^2)a_1B_3h + 2((2A_2 - 3a_1B_3)a_1B_3)^2),$$

$$\delta_1 = -\frac{A_2}{2(\tilde{\mu}ha_1B_3^2)^2}\{4A_1A_2^2h^3 + 2(-3(a_1B_3)^2 + (3A_1 - 2A_2)a_1B_3 +$$
$$+4A_1A_2)A_2h^2 - 2(-3(a_1B_3)^2 + 2A_2a_1B_3 + 4A_2^2)a_1B_3h +$$
$$+(4A_2 - 3a_1B_3)(a_1B_3)^2\}(2A_1A_2h^2 +$$
$$+(-(a_1B_3)^2 + 3A_1a_1B_3 + 4A_1A_2)h - 2(a_1B_3)^2),$$

$$\delta_2 = -\frac{1}{12(\tilde{\mu}a_1B_3^2)^2}(4(A_1 - a_1B_3)A_2^2h^2 + 2(3(a_1B_3)^2 +$$
$$+(3A_1 - 4A_2)a_1B_3 + 4A_1A_2)A_2h - 3(a_1B_3)^3)(4(3A_1 - a_1B_3)A_2^2h^2 -$$
$$-2(3(a_1B_3)^2 + (8A_2 - 9A_1)a_1B_3 -$$
$$-12A_1A_2)A_2h + a_1B_3(9(a_1B_3)^2 - 12A_2a_1B_3 - 16A_2^2)),$$

$$\delta_3 = -\frac{A_2(2A_1A_2h^2 + ((3A_1 - a_1B_3)a_1B_3 + 4A_1A_2)h - 2(a_1B_3)^2)}{2h^2\tilde{\mu}B_3^2}.$$

Зависимость p от времени найдем из уравнения (7)

$$\dot{p} = \frac{(d_1p + d_0)}{A_1}\sqrt{(b_3p + b_2)(c_2p^2 + c_1p + c_0)}. \tag{22}$$

Рассмотрим численный пример решения (17), (21), (22) уравнений (3), (4). Пусть

$$A_2 = a, \quad B_3 = b, \quad a_1 = \frac{a}{b}, \quad h = 3 \quad (a > 0,\ b > 0). \tag{23}$$

Тогда из (21) получим

$$A_1 = \frac{5(25 + 7\delta_0)a}{702}, \quad A_3 = \frac{(67 + 25\delta_0)a}{702},$$
$$B_1 = b, \quad B_2 = \frac{5(2\delta_0 - 43)b}{234}, \quad (C_3 - C_2) = \frac{b^2}{a}, \quad C_1 = C_3, \tag{24}$$
$$\boldsymbol{\lambda} = \left(\frac{5(421 + 43\delta_0)a^2}{37908bf}, 0, 0\right), \quad \mathbf{s} = \left(-\frac{(457 + 25\delta_0)a}{6318f}, 0, 0\right).$$

Решение (17) примет вид

$$q = p\sqrt{\tilde{Q}^*(p)}, \quad r = \sqrt{R(p)}, \tag{25}$$

$$\nu_1 = 3fp^2 + \frac{a}{b}p + \frac{5(23\delta_0 - 382)a^2}{972b^2 f}, \quad \nu_2 = \left(-\frac{a}{b}p - \frac{5(1+\delta_0)a^2}{324b^2 f}\right)\sqrt{\tilde{Q}^*(p)},$$

$$\nu_3 = \left(fp + \frac{5(\delta_0 - 8)a}{54b}\right)\sqrt{R(p)};$$

$$\tilde{Q}^*(p) = -\frac{8fb}{a}p + \frac{140\delta_0 - 751}{81};$$

$$R(p) = -9p^2 + \frac{(5\delta_0 - 34)a}{3fb}p + \frac{5(37\delta_0 - 341)a^2}{162b^2 f^2}.$$

В соотношениях из (24), (25) обозначено

$$\delta_0 = \sqrt{82}, \quad f = \frac{5a^2}{2916b^2}\sqrt{5(165838\delta_0 - 1437071)}.$$

$$\dot{p} = (d_1 p + d_0)A_1^{-1}\sqrt{\tilde{Q}^*(p)R(p)}, \tag{26}$$

$$d_1 = -\frac{5(25 + 7\delta_0)a}{4212}, \quad d_0 = -\frac{25(599 + 32\delta_0)a^2}{227448bf},$$

где

$$\frac{(5\delta_0 - 34 - \sqrt{30\delta_0 - 204})a}{54bf} < p < \frac{(5\delta_0 - 34 + \sqrt{30\delta_0 - 204})a}{54bf}.$$

На указанном интервале функции $\tilde{Q}^*(p)$ и $R(p)$ принимают положительные значения. Следовательно, действительность решения (23)–(26) установлена.

В приведенном примере (23)–(26) решения дифференциальных уравнений (3), (4) присутствуют произвольные положительные параметры a и b. Функция $p = p(t)$ находится обращением эллиптического интеграла Лежандра третьего рода, полученного из (26). Это позволяет установить из (25) зависимость от времени всех переменных задачи.

Выводы. Исследованы условия существования обобщенного класса полиномиальных решений уравнений Кирхгофа–Пуассона. Построены два новых решения этих уравнений. В первом решении квадраты проекций угловой скорости на небарицентрические оси являются многочленами четвертой степени от компоненты вектора угловой скорости на барицентрическую ось, которая выражается в виде гиперэллиптической функции времени. Структура второго решения такова: квадраты второй и третьей компоненты вектора угловой скорости являются полиномами третьего и второго порядков, соответственно, от первой компоненты этого вектора, которая находится обращением эллиптического интеграла Лежандра.

1. *Klein F., Sommerfeld A.* Über die Theorie des Kreisels. – New York: Johnson reprint corp., 1965. – 996 p.
2. *Харламов П.В.* Современное состояние и перспективы развития классических задач динамики твердого тела // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 1–13.
3. *Гашененко И.Н., Горр Г.В., Ковалев А.М.* Классические задачи динамики твердого тела. – Киев: Наук. думка, 2012. – 401 с.
4. *Горр Г.В., Ковалев А.М.* Движение гиростата. – Киев: Наук. думка, 2013. – 408 с.
5. *Горр Г.В., Зыза А.В.* Полиномиальные решения в одной задаче о движении гиростата с неподвижной точкой // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 6. – С. 12–21.
6. *Зыза А.В.* Один случай полиномиальных решений уравнений Кирхгофа–Пуассона // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 103–109.
7. *Зыза А.В.* Новое решение уравнений движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил // Тр. ИПММ НАНУ. – 2012. – **25**. – С. 92–99.
8. *Зыза А.В.* О полиномиальных решениях с квадратичным инвариантным соотношением уравнений движения гиростата // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43. – С. 29–38.
9. *Зыза А.В.* Полиномиальное решение с линейным инвариантным соотношением уравнений Кирхгофа–Пуассона // Механика твердого тела. – 2015. – Вып. 45. – С. 63–69.
10. *Зыза А.В.* Новое решение уравнений движения гиростата в магнитном поле // Тр. ИПММ. – 2015. – **29**. – С. 51–59.
11. *Зыза А.В., Ткаченко Д.Н.* Полиномиальные решения в задаче о движении гиростата в магнитном поле // Механика твердого тела. – 2016. – Вып. 46. – С. 55–63.
12. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неповижную точку. – Донецк: Изд-во ДонНУ, 2010. – 364 с.
13. *Харламов П.В.* О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1963. – № 4. – С. 17–29.

A.V. Zyza

Integration of Kirchhoff–Poisson equations on polynomial invariant relations

We consider existence conditions for a special class of polynomial solutions of Kirchhoff–Poisson equations in the problem about gyrostat under potential and gyroscopic forces. New cases of integrability of this problem are obtained based on the investigation of reduced equations.

Keywords: *polynomial solutions, gyrostat, Kirchhoff–Poisson equation, potential and gyroscopic forces.*

ГОУ ВПО "Донецкий национальный ун-т"
Получено 22.09.17
z9125494@mail.ru