Український математичний вісник
Том 13 **(2016)**, № 2, 270 – 289

О моногенных отображениях кватернионной переменной

Виталий С. Шпаковский, Татьяна С. Кузьменко

(Представлена В.Я. Гутлянским)

Аннотация. В работе [1] рассмотрен класс, так называемых, G-моногенных (дифференцируемых по Гато) кватернионных отображений. В этой работе введены кватернионные H-моногенные (дифференцируемые по Хаусдорфу) отображения и установлена связь между G-моногенными и H-моногенными отображениями. Доказана эквивалентность разных определений G-моногенного отображения.

2010 MSC. 30G35, 57R35.

Ключевые слова и фразы. Алгебра комплексных кватернионов, G-моногенные отображения, теорема Морера, H-моногенные отображения.

1. Введение

Проблеме определения аналитической функции в ассоциативных (коммутативных или некоммутативных) алгебрах посвящено много работ (см., например, [1–23]). В частности, в работах [15–23] указанная проблема рассматривается в алгебре кватернионов.

В то же время в кватернионном анализе осталось незамеченным определение аналитической функции по Хаусдорфу (H-аналитической) [3], не смотря на то, что в работах [4, 9–12] предпринимались некоторые попытки построения теории H-аналитических функций в общей ассоциативной алгебре.

Так, Ф. Ринглеб в работе [4] развивает теорию H-аналитических функций в произвольной конечномерной полупростой (т. е., являющейся прямой суммой простых подалгебр) алгебре над полем действительных чисел $\mathbb{R}$. При этом он рассматривает функции, определенные и принимающие значения во всей алгебре.

Статья поступила в редакцию 26.05.2016
Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Украины (проект “Моногенные функции в банаховых алгебрах и краевые задачи анализа и математической физики”).

ISSN 1810 – 3200.

Развивая идеи Хаусдорфа, С. Воловельская в работе [9] определяет H-аналитические функции в области алгебры из некоторого класса конечномерных неполупростых алгебр над полем $\mathbb{R}$ и описывает общий вид таких функций.

В заметке М. Дегтеревой [10] показано, что в коммутативной алгебре над $\mathbb{R}$ дифференцируемость по Хаусдорфу совпадает с дифференцируемостью по Шефферсу (см. [2]). В. Портман [11] определяет производную от H-аналитической функции в ассоциативных алгебрах над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ и исследует вопрос о ее соотношении с некоторыми другими определениями производной.

В работе Р. Ринехарта и Дж. Вилсона [12] вводится класс функций, в некотором смысле дифференцируемых в любой ассоциативной алгебре над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, и изучается вопрос о соотношении между этими функциями и H-аналитическими функциями на различных классах алгебр.

В нашей работе [1] в алгебре комплексных кватернионов был определен класс G-моногенных (дифференцируемых по Гато) отображений. Там же установлено конструктивное описание всех отображений из этого класса с помощью четырех аналитических функций комплексной переменной. В работе [24] для G-моногенных отображений доказаны аналоги интегральной теоремы Коши для криволинейного и поверхностного интеграла и интегральной формулы Коши. Кроме того, в статье [25] получены разложения G-моногенных отображений в ряды Тейлора и Лорана, а также проведено классификацию особых точек рассматриваемых отображений.

В этой работе мы вводим класс H-моногенных (дифференцируемых по Хаусдорфу) отображений в алгебре комплексных кватернионов и устанавливаем связь между G-моногенными и H-моногенными отображениями. Кроме того, доказывается теорема об эквивалентности разных определений G-моногенного отображения.

2. Алгебра комплексных кватернионов

Пусть $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ — алгебра кватернионов над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, базис которой состоит из единицы алгебры 1 и элементов I, J, K, для которых выполняются правила умножения:

$$I^2 = J^2 = K^2 = -1,$$

$$IJ = -JI = K, \qquad JK = -KJ = I, \qquad KI = -IK = J.$$

В алгебре $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ существует другой базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$:

$$e_1 = \frac{1}{2}(1 + iI), \quad e_2 = \frac{1}{2}(1 - iI), \quad e_3 = \frac{1}{2}(iJ - K), \quad e_4 = \frac{1}{2}(iJ + K),$$

где i — мнимая комплексная единица. Таблица умножения в новом базисе принимает следующий вид (см., например, [26])

$\cdot$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	0	e_3	0
e_2	0	e_2	0	e_4
e_3	0	e_3	0	e_1
e_4	e_4	0	e_2	0

,

при этом единица алгебры представляется в виде $1 = e_1 + e_2$. Очевидно, что коммутативная подалгебра с базисом $\{e_1, e_2\}$ является алгеброй бикомплексных чисел или алгеброй коммутативних кватернионов Сегре [27].

Напомним (см., например, [28, с. 64]), что подмножество $\mathcal{I} \subset \mathbb{H}(\mathbb{C})$ называется *левым* (или *правым*) *идеалом*, если из условия $x \in \mathcal{I}$ следует $yx \in \mathcal{I}$ (или $xy \in \mathcal{I}$) для любого $y \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$.

Теперь отметим, что алгебра $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ содержит два правых максимальных идеала

$$\mathcal{I}_1 := \{\lambda_2 e_2 + \lambda_4 e_4 : \lambda_2, \lambda_4 \in \mathbb{C}\}, \qquad \mathcal{I}_2 := \{\lambda_1 e_1 + \lambda_3 e_3 : \lambda_1, \lambda_3 \in \mathbb{C}\}$$

и два левых максимальных идеала

$$\widehat{\mathcal{I}}_1 := \{\lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 : \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}\}, \qquad \widehat{\mathcal{I}}_2 := \{\lambda_1 e_1 + \lambda_4 e_4 : \lambda_1, \lambda_4 \in \mathbb{C}\}.$$

Следствием очевидных равенств

$$\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2 = \widehat{\mathcal{I}}_1 \cap \widehat{\mathcal{I}}_2 = 0, \qquad \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 = \widehat{\mathcal{I}}_1 \cup \widehat{\mathcal{I}}_2 = \mathbb{H}(\mathbb{C})$$

является разложение в прямую сумму:

$$\mathbb{H}(\mathbb{C}) = \mathcal{I}_1 \oplus \mathcal{I}_2 = \widehat{\mathcal{I}}_1 \oplus \widehat{\mathcal{I}}_2.$$

Определим линейные функционалы $f_1 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ и $f_2 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, полагая

$$f_1(e_1) = f_1(e_3) = 1, \qquad f_1(e_2) = f_1(e_4) = 0,$$
$$f_2(e_2) = f_2(e_4) = 1, \qquad f_2(e_1) = f_2(e_3) = 0,$$

при этом очевидно $f_1(\mathcal{I}_1) = f_2(\mathcal{I}_2) = 0$.

Определим также линейные функционалы $\widehat{f_1} : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ и $\widehat{f_2} : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, полагая

$$\widehat{f_1}(e_1) = \widehat{f_1}(e_4) = 1, \qquad \widehat{f_1}(e_2) = \widehat{f_1}(e_3) = 0,$$
$$\widehat{f_2}(e_2) = \widehat{f_2}(e_3) = 1, \qquad \widehat{f_2}(e_1) = \widehat{f_2}(e_4) = 0,$$

для которых очевидно $\widehat{f_1}(\widehat{\mathcal{I}}_1) = \widehat{f_2}(\widehat{\mathcal{I}}_2) = 0$.

Отметим, что указанные функционалы являются непрерывными и в некотором смысле мультипликативными (см. [1]).

3. G-моногенные отображения

Пусть

$$i_1 = 1, \quad i_2 = a_1e_1 + a_2e_2, \quad i_3 = b_1e_1 + b_2e_2 \tag{3.1}$$

при $a_k, b_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2$ — тройка линейно независимых векторов над полем $\mathbb{R}$. Это означает, что равенство

$$\alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \alpha_3 i_3 = 0, \qquad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$$

выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Выделим в алгебре $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ линейную оболочку $E_3 := \{\zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ над полем $\mathbb{R}$, порожденную векторами i_1, i_2, i_3. Введем обозначения

$$\xi_1 := f_1(\zeta) = \widehat{f}_1(\zeta) = x + ya_1 + zb_1,$$

$$\xi_2 := f_2(\zeta) = \widehat{f}_2(\zeta) = x + ya_2 + zb_2.$$

Теперь элемент $\zeta \in E_3$ может быть представлен в виде $\zeta = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$.

Множеству $S \subset \mathbb{R}^3$ поставим в соответствие множество $S_\zeta := \{\zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 : (x, y, z) \in S\}$ в E_3.

Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^3$. В работе [1] предложено следующее определение.

Непрерывное отображение $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ (или $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$) называется *право-$G$-моногенным* (или *лево-$G$-моногенным*) в области $\Omega_\zeta \subset E_3$, если Φ (или $\widehat{\Phi}$) дифференцируемо по Гато в каждой точке этой области, т. е., если для каждого $\zeta \in \Omega_\zeta$ существует элемент $\Phi'(\zeta)$ (или $\widehat{\Phi}'(\zeta)$) алгебры $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ такой, что выполняется равенство

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \Big(\Phi(\zeta + \varepsilon h) - \Phi(\zeta)\Big)\varepsilon^{-1} = h\Phi'(\zeta) \quad \forall\, h \in E_3 \tag{3.2}$$

$$\left(\text{или } \lim_{\varepsilon \to 0+0} \left(\widehat{\Phi}(\zeta + \varepsilon h) - \widehat{\Phi}(\zeta)\right)\varepsilon^{-1} = \widehat{\Phi}'(\zeta)h \quad \forall\, h \in E_3\right).$$

При этом $\Phi'(\zeta)$ называется *правой производной Гато* отображения Φ, а $\widehat{\Phi}'(\zeta)$ — *левой производной Гато* отображения $\widehat{\Phi}$ в точке ζ.

Рассмотрим разложение отображения $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ по базису $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$:

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=1}^{4} U_k(x, y, z)e_k. \tag{3.3}$$

В предположении, что функции $U_k : \Omega \to \mathbb{C}$ являются $\mathbb{R}$-дифференцируемыми в области Ω, т. е. во всех точках $(x, y, z) \in \Omega$ выполняются соотношения

$$U_k(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - U_k(x, y, z)$$
$$= \frac{\partial U_k}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U_k}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial U_k}{\partial z}\Delta z + o\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}\right),$$
$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \to 0,$$

в теореме 1 из [1] установлены необходимые и достаточные условия право-G-моногенности отображения Φ (или лево-G-моногенности отображения $\widehat{\Phi}$) (аналоги условий Коши–Римана), которые всюду в области Ω_ζ в свернутом виде выражаются равенствами

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = i_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = i_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{3.4}$$

$$\left(\text{или} \quad \frac{\partial \widehat{\Phi}}{\partial y} = \frac{\partial \widehat{\Phi}}{\partial x} i_2, \qquad \frac{\partial \widehat{\Phi}}{\partial z} = \frac{\partial \widehat{\Phi}}{\partial x} i_3\right). \tag{3.5}$$

Из леммы 2 работы [1] вытекает, что точки $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, соответствующие необратимым элементам $\zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3$, лежат на прямых

$$L^1 : x + y\Re\, a_1 + z\Re\, b_1 = 0, \qquad y\Im\, a_1 + z\Im\, b_1 = 0,$$

$$L^2 : x + y\Re\, a_2 + z\Re\, b_2 = 0, \qquad y\Im\, a_2 + z\Im\, b_2 = 0$$

в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$.

Обозначим через $f_k(E_3)$ при $k = 1, 2$ — образ множества E_3 при отображении f_k. Отметим, что существенным для дальнейшего изложения является предположение $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. Очевидно, что оно имеет место тогда и только тогда, когда хотя бы одно из чисел в каждой из пар (a_1, b_1), (a_2, b_2) принадлежит $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Пусть D_1 и D_2 — области в $\mathbb{C}$, на которые область Ω_ζ отображается соответственно функционалами f_1 и f_2.

В теореме 5 из [1] описаны все право-G-моногенные отображения, определенные в области Ω_ζ и принимающие значения в алгебре $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, с помощью аналитических функций комплексной переменной. А именно, если область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ выпукла в направлении прямых L^1, L^2 и $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$, то каждое право-$G$-моногенное отображение $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ представляется в виде

$$\Phi(\zeta) = F_1(\xi_1)e_1 + F_2(\xi_2)e_2 + F_3(\xi_1)e_3 + F_4(\xi_2)e_4 \tag{3.6}$$

$$\forall\,\zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 \in \Omega_\zeta\,,$$

где F_1, F_3 — некоторые аналитические в области D_1 функции переменной $\xi_1 = x + ya_1 + zb_1$, а F_2, F_4 — некоторые аналитические в области D_2 функции переменной $\xi_2 = x + ya_2 + zb_2$.

При таких же предположениях, каждое лево-G-моногенное отображение $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ представляется в виде

$$\widehat{\Phi}(\zeta) = \widehat{F}_1(\xi_1)e_1 + \widehat{F}_2(\xi_2)e_2 + \widehat{F}_3(\xi_2)e_3 + \widehat{F}_4(\xi_1)e_4, \tag{3.7}$$

где $\widehat{F}_1, \widehat{F}_4$ — некоторые аналитические в области D_1 функции переменной $\xi_1 = x + ya_1 + zb_1$, а $\widehat{F}_2, \widehat{F}_3$ — некоторые аналитические в области D_2 функции переменной $\xi_2 = x + ya_2 + zb_2$.

Отметим, что производная Гато право-G-моногенного отображения $\Phi(\zeta)$ (или лево-G-моногенного отображения $\widehat{\Phi}(\zeta)$) вычисляется по формуле

$$\Phi'(\zeta) = F_1'(\xi_1)e_1 + F_2'(\xi_2)e_2 + F_3'(\xi_1)e_3 + F_4'(\xi_2)e_4$$

$$\Big(\text{или} \quad \widehat{\Phi}'(\zeta) = \widehat{F}_1'(\xi_1)e_1 + \widehat{F}_2'(\xi_2)e_2 + \widehat{F}_3'(\xi_2)e_3 + \widehat{F}_4'(\xi_1)e_4\Big).$$

Используя представления (3.6), (3.7), в работе [25] получены разложения G-моногенных отображений в ряды Тейлора. Если $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$ и $\zeta_0 := x_0i_1 + y_0i_2 + z_0i_3 \in \Omega_\zeta$, то каждое право-$G$-моногенное отображение $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ представляется в виде суммы сходящегося степенного ряда

$$\Phi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} (\zeta - \zeta_0)^n\, p_n, \qquad p_n \in \mathbb{H}(\mathbb{C}), \tag{3.8}$$

а каждое лево-G-моногенное отображение $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ — в виде суммы сходящегося степенного ряда:

$$\widehat{\Phi}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{p}_n\, (\zeta - \zeta_0)^n, \qquad \widehat{p}_n \in \mathbb{H}(\mathbb{C}). \tag{3.9}$$

4. Теорема Морера

Рассмотрим алгебру $\widetilde{\mathbb{H}}(\mathbb{R})$ с базисом $\{e_k, ie_k\}_{k=1}^4$ над полем действительных чисел $\mathbb{R}$, которая изоморфна алгебре $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Очевидно, что в алгебре $\widetilde{\mathbb{H}}(\mathbb{R})$ существует базис $\{i_k\}_{k=1}^8$, где векторы i_1, i_2, i_3 те же, что и в соотношениях (3.1).

Для элемента $a := \sum\limits_{k=1}^{8} a_k i_k$, $a_k \in \mathbb{R}$ определим евклидову норму

$$\|a\| := \sqrt{\sum_{k=1}^{8} a_k^2}\,.$$

Соответственно, $\|\zeta\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ и $\|i_1\| = \|i_2\| = \|i_3\| = 1$.

В силу теоремы об эквивалентности норм, для произвольного элемента $b := \sum\limits_{k=1}^{4} (b_{1k} + i b_{2k}) e_k$, $b_{1k}, b_{2k} \in \mathbb{R}$, выполняются неравенства

$$|b_{1k} + i b_{2k}| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{4} (b_{1k}^2 + b_{2k}^2)} \leq c\|b\|, \tag{4.1}$$

где c — положительная постоянная, не зависящая от b.

Пусть γ — жорданова спрямляемая кривая в $\mathbb{R}^3$. Для непрерывной функции $\Psi : \gamma_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ вида

$$\Psi(\zeta) = \sum_{k=1}^{4} U_k(x,y,z) e_k + i V_k(x,y,z) e_k, \tag{4.2}$$

где $(x,y,z) \in \gamma$ и $U_k : \gamma \to \mathbb{R}$, $V_k : \gamma \to \mathbb{R}$, определим интегралы по жордановой спрямляемой кривой γ_ζ равенствами

$$\int\limits_{\gamma_\zeta} d\zeta \Psi(\zeta) := \sum_{k=1}^{4} e_k \int\limits_{\gamma} U_k(x,y,z)dx + \sum_{k=1}^{4} i_2 e_k \int\limits_{\gamma} U_k(x,y,z)dy$$

$$+ \sum_{k=1}^{4} i_3 e_k \int\limits_{\gamma} U_k(x,y,z)dz + i \sum_{k=1}^{4} e_k \int\limits_{\gamma} V_k(x,y,z)dx$$

$$+ i \sum_{k=1}^{4} i_2 e_k \int\limits_{\gamma} V_k(x,y,z)dy + i \sum_{k=1}^{4} i_3 e_k \int\limits_{\gamma} V_k(x,y,z)dz$$

и

$$\int\limits_{\gamma_\zeta} \Psi(\zeta)d\zeta := \sum_{k=1}^{4} e_k \int\limits_{\gamma} U_k(x,y,z)dx + \sum_{k=1}^{4} e_k i_2 \int\limits_{\gamma} U_k(x,y,z)dy$$
$$+ \sum_{k=1}^{4} e_k i_3 \int\limits_{\gamma} U_k(x,y,z)dz + i\sum_{k=1}^{4} e_k \int\limits_{\gamma} V_k(x,y,z)dx$$
$$+ i\sum_{k=1}^{4} e_k i_2 \int\limits_{\gamma} V_k(x,y,z)dy + i\sum_{k=1}^{4} e_k i_3 \int\limits_{\gamma} V_k(x,y,z)dz,$$

где $d\zeta := dx + i_2 dy + i_3 dz$.

Лемма 4.1. *Если γ — замкнутая жорданова спрямляемая кривая в $\mathbb{R}^3$ и функция $\Psi : \gamma_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ непрерывна, то*

$$\left\| \int\limits_{\gamma_\zeta} d\zeta\, \Psi(\zeta) \right\| \le c \int\limits_{\gamma_\zeta} \|\Psi(\zeta)\| \|d\zeta\| \tag{4.3}$$

и

$$\left\| \int\limits_{\gamma_\zeta} \Psi(\zeta)\, d\zeta \right\| \le c \int\limits_{\gamma_\zeta} \|\Psi(\zeta)\| \|d\zeta\|, \tag{4.4}$$

где c — абсолютная положительная постоянная.

Доказательство. Используя представление функции Ψ в виде (4.2), получаем оценку

$$\left\| \int\limits_{\gamma_\zeta} d\zeta \Psi(\zeta) \right\| \le \sum_{k=1}^{4} \|i_1 e_k\| \int\limits_{\gamma} |U_k(x,y,z) + iV_k(x,y,z)|\, dx$$
$$+ \sum_{k=1}^{4} \|i_2 e_k\| \int\limits_{\gamma} |U_k(x,y,z) + iV_k(x,y,z)|\, dy$$
$$+ \sum_{k=1}^{4} \|i_3 e_k\| \int\limits_{\gamma} |U_k(x,y,z) + iV_k(x,y,z)|\, dz.$$

Принимая во внимание неравенство (4.1) при $b = \Psi(\zeta)$ и неравенства $\|i_s e_k\| \le c_s$, $s = 1,2,3$, где c_s — абсолютные положительные постоянные, получаем оценку (4.3). Аналогично устанавливается оценка (4.4). Лемма доказана. $\square$

Под треугольником Δ будем понимать плоскую фигуру ограниченную тремя отрезками, соединяющими три его вершины. Через $\partial\Delta$ обозначим границу треугольника Δ в относительной топологии его плоскости.

Используя лемму 4.1 для отображений, принимающих значения в алгебре $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, по стандартной схеме доказывается следующий аналог теоремы Морера.

Теорема 4.1. *Пусть* $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. *Если отображение* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ (*или* $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$) *непрерывно в области* Ω_ζ *и удовлетворяет равенству*

$$\int\limits_{\partial\Delta_\zeta} d\zeta\, \Phi(\zeta) = 0 \tag{4.5}$$

$$\left(\text{или} \int\limits_{\partial\Delta_\zeta} \widehat{\Phi}(\zeta)\, d\zeta = 0\right) \tag{4.6}$$

для каждого треугольника Δ_ζ *такого, что замыкание* $\overline{\Delta_\zeta} \subset \Omega_\zeta$, *то отображение* Φ *право-*G*-моногенное* (*или* $\widehat{\Phi}$ — *лево-*G*-моногенное*) *в области* Ω_ζ.

5. $H-$моногенные отображения

Ф. Хаусдорф [3] предложил определение аналитической функции в любой ассоциативной (коммутативной или некоммутативной) алгебре $\mathbb{A}$ над полем $\mathbb{C}$ с единицей, которое может быть сформулировано следующим образом.

Гиперкомплексная функция

$$f(\eta) = \sum_{k=1}^{n} f_k(\eta_1, \ldots, \eta_n) e_k\,, \tag{5.1}$$

где e_k — базисные элементы алгебры $\mathbb{A}$, называется H*-аналитической функцией* переменной $\eta := \sum\limits_{k=1}^{n} \eta_k e_k$, если компоненты f_k из разложения (5.1) являются аналитическими функциями комплексных переменных $\eta_1, \ldots, \eta_n$ и дифференциал

$$df := \sum_{k=1}^{n} df_k(\eta_1, \ldots, \eta_n) e_k = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial \eta_j}\, d\eta_j\, e_k \tag{5.2}$$

является линейным однородным полиномом дифференциала $d\eta := \sum\limits_{k=1}^{n} d\eta_k\, e_k$, т. е.

$$df = \sum_{s=1}^{n^2} A_s\, d\eta\, B_s\,, \tag{5.3}$$

где A_s и B_s — некоторые $\mathbb{A}$-значные функции.

При этом значение $f'(\eta) := \sum\limits_{s=1}^{n^2} A_s\, B_s$ называют *производной Хаусдорфа* функции $f(\eta)$.

Отметим, что в работе [4] при определении H-аналитической функции в ассоциативной алгебре над полем $\mathbb{R}$, предполагается аналитичность действительнозначных компонент f_k из разложения (5.1), а в работе [12] рассматриваются ассоциативные алгебры над полями $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ и предполагается лишь существование частных производных $\frac{\partial f_k}{\partial \eta_j}$ при всех $j, k = 1, 2, \ldots, n$.

Подчеркнем, что свойство H-аналитичности функции не зависит от выбора базиса алгебры. Кроме того, если функции $f(\eta)$ и $g(\eta)$ H-аналитические, то функции $f(\eta) + g(\eta)$ и $f(\eta) \cdot g(\eta)$ также H-аналитические, при этом $d(f+g) = df + dg$ и $d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg$ (см. [4, 11]).

Теперь реализуем подход Хаусдорфа к отображениям переменной $\zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3$.

Непрерывное отображение $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ вида (3.3) будем называть *H-моногенным* в области $\Omega_\zeta \subset E_3$, если Φ дифференцируемо по Хаусдорфу в каждой точке $\zeta \in \Omega_\zeta$, т. е. если компоненты отображения (3.3) имеют частные производные первого порядка по переменным x, y, z, и формальный дифференциал отображения

$$d\Phi := \sum_{k=1}^{4} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x} dx + \frac{\partial U_k}{\partial y} dy + \frac{\partial U_k}{\partial z} dz \right) e_k \tag{5.4}$$

является линейным однородным полиномом от дифференциала $d\zeta = dx + i_2 dy + i_3 dz$, т. е.

$$d\Phi = \sum_{s=1}^{16} A_s\, d\zeta\, B_s\,, \tag{5.5}$$

где A_s, B_s — некоторые $\mathbb{H}(\mathbb{C})$-значные функции.

Отметим, что если частные производные первого порядка функций U_k при $k = 1, 2, 3, 4$ существуют и непрерывны, то формальный дифференциал (5.4) будет полным дифференциалом отображения Φ, т. е. является главной частью приращения этого отображения.

Как и выше, $\Phi'_H(\zeta) := \sum\limits_{s=1}^{16} A_s B_s$ назовем *производной Хаусдорфа* отображения $\Phi(\zeta)$.

Покажем, что определение производной Φ'_H является корректным.

Теорема 5.1. *Если отображение $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ является H-моногенным в области Ω_ζ, то его производная Φ'_H существует и не зависит от выбора функций A_s, B_s в равенстве* (5.5), *при этом*

$$\Phi'_H(\zeta) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

Доказательство. Вследствие H-моногенности отображения Φ выполняется равенство

$$\sum_{s=1}^{16} A_s d\zeta B_s = \sum_{k=1}^{4} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x} dx + \frac{\partial U_k}{\partial y} dy + \frac{\partial U_k}{\partial z} dz \right) e_k \,. \tag{5.6}$$

Пусть

$$\begin{aligned} A_s &= a_{s1}e_1 + a_{s2}e_2 + a_{s3}e_3 + a_{s4}e_4 \,, \\ B_s &= b_{s1}e_1 + b_{s2}e_2 + b_{s3}e_3 + b_{s4}e_4 \end{aligned} \tag{5.7}$$

для $s = 1, 2, \ldots, 16$. Учитывая равенство $d\zeta = (dx + a_1 dy + b_1 dz)e_1 + (dx + a_2 dy + b_2 dz)e_2$ и (5.7), получаем:

$$\begin{aligned} A_s d\zeta B_s = (a_{s1}e_1 + a_{s2}e_2 + a_{s3}e_3 + a_{s4}e_4)\Big((dx + a_1 dy + b_1 dz)e_1 \\ +(dx + a_2 dy + b_2 dz)e_2\Big)(b_{s1}e_1 + b_{s2}e_2 + b_{s3}e_3 + b_{s4}e_4) \\ = \Big(a_{s1}b_{s1}(dx + a_1 dy + b_1 dz) + a_{s3}b_{s4}(dx + a_2 dy + b_2 dz)\Big)e_1 \\ +\Big(a_{s2}b_{s2}(dx + a_2 dy + b_2 dz) + a_{s4}b_{s3}(dx + a_1 dy + b_1 dz)\Big)e_2 \\ +\Big(a_{s1}b_{s3}(dx + a_1 dy + b_1 dz) + a_{s3}b_{s2}(dx + a_2 dy + b_2 dz)\Big)e_3 \\ +\Big(a_{s2}b_{s4}(dx + a_2 dy + b_2 dz) + a_{s4}b_{s1}(dx + a_1 dy + b_1 dz)\Big)e_4 \,. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Следствием равенств (5.6) и (5.8) являются соотношения

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = \sum_{s=1}^{16} a_{s1}b_{s1} + a_{s3}b_{s4} \,, \qquad \frac{\partial U_2}{\partial x} = \sum_{s=1}^{16} a_{s2}b_{s2} + a_{s4}b_{s3} \,, \tag{5.9}$$

$$\frac{\partial U_3}{\partial x} = \sum_{s=1}^{16} a_{s1}b_{s3} + a_{s3}b_{s2}\,, \qquad \frac{\partial U_4}{\partial x} = \sum_{s=1}^{16} a_{s2}b_{s4} + a_{s4}b_{s1}\,.$$

С учетом равенств (5.7), имеем

$$\Phi'_H(\zeta) := \sum_{s=1}^{16} A_s B_s = \sum_{s=1}^{16} \Big((a_{s1}b_{s1} + a_{s3}b_{s4})e_1$$

$$+(a_{s2}b_{s2} + a_{s4}b_{s3})e_2 + (a_{s1}b_{s3} + a_{s3}b_{s2})e_3 + (a_{s2}b_{s4} + a_{s4}b_{s1})e_4 \Big),$$

откуда, принимая во внимание соотношения (5.9), получаем

$$\Phi'_H(\zeta) = \frac{\partial U_1}{\partial x}e_1 + \frac{\partial U_2}{\partial x}e_2 + \frac{\partial U_3}{\partial x}e_3 + \frac{\partial U_4}{\partial x}e_4 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

Теорема доказана. □

Теорема 5.2. *Если отображения $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ и $\Psi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ являются H-моногенными в области Ω_ζ, то произведение $\Phi \cdot \Psi$ также является H-моногенным отображением в Ω_ζ, при этом*

$$d(\Phi \cdot \Psi) = d\Phi \cdot \Psi + \Phi \cdot d\Psi.$$

Доказательство. Пусть

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=1}^{4} U_k(x,y,z)e_k\,, \quad \Psi(\zeta) = \sum_{k=1}^{4} V_k(x,y,z)e_k\,.$$

Тогда

$$d\Phi = \sum_{k=1}^{4} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x}dx + \frac{\partial U_k}{\partial y}dy + \frac{\partial U_k}{\partial z}dz \right) e_k\,,$$

$$d\Psi = \sum_{k=1}^{4} \left(\frac{\partial V_k}{\partial x}dx + \frac{\partial V_k}{\partial y}dy + \frac{\partial V_k}{\partial z}dz \right) e_k$$

и

$$d(\Phi \cdot \Psi) = d\Big(U_1V_1 + U_3V_4\Big)e_1 + d\Big(U_2V_2 + U_4V_3\Big)e_2$$

$$+d\Big(U_1V_3 + U_3V_2\Big)e_3 + d\Big(U_2V_4 + U_4V_1\Big)e_4$$

$$= \Bigg[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}V_1 + \frac{\partial V_1}{\partial x}U_1 + \frac{\partial U_3}{\partial x}V_4 + \frac{\partial V_4}{\partial x}U_3 \right) dx$$

$$+ \left(\frac{\partial U_1}{\partial y}V_1 + \frac{\partial V_1}{\partial y}U_1 + \frac{\partial U_3}{\partial y}V_4 + \frac{\partial V_4}{\partial y}U_3 \right) dy$$

$$+\left(\frac{\partial U_1}{\partial z}V_1+\frac{\partial V_1}{\partial z}U_1+\frac{\partial U_3}{\partial z}V_4+\frac{\partial V_4}{\partial z}U_3\right)dz\Bigg]e_1$$

$$+\Bigg[\left(\frac{\partial U_2}{\partial x}V_2+\frac{\partial V_2}{\partial x}U_2+\frac{\partial U_4}{\partial x}V_3+\frac{\partial V_3}{\partial x}U_4\right)dx$$

$$+\left(\frac{\partial U_2}{\partial y}V_2+\frac{\partial V_2}{\partial y}U_2+\frac{\partial U_4}{\partial y}V_3+\frac{\partial V_3}{\partial y}U_4\right)dy$$

$$+\left(\frac{\partial U_2}{\partial z}V_2+\frac{\partial V_2}{\partial z}U_2+\frac{\partial U_4}{\partial z}V_3+\frac{\partial V_3}{\partial z}U_4\right)dz\Bigg]e_2$$

$$+\Bigg[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}V_3+\frac{\partial V_3}{\partial x}U_1+\frac{\partial U_3}{\partial x}V_2+\frac{\partial V_2}{\partial x}U_3\right)dx$$

$$+\left(\frac{\partial U_1}{\partial y}V_3+\frac{\partial V_3}{\partial y}U_1+\frac{\partial U_3}{\partial y}V_2+\frac{\partial V_2}{\partial y}U_3\right)dy$$

$$+\left(\frac{\partial U_1}{\partial z}V_3+\frac{\partial V_3}{\partial z}U_1+\frac{\partial U_3}{\partial z}V_2+\frac{\partial V_2}{\partial z}U_3\right)dz\Bigg]e_3$$

$$+\Bigg[\left(\frac{\partial U_2}{\partial x}V_4+\frac{\partial V_4}{\partial x}U_2+\frac{\partial U_4}{\partial x}V_1+\frac{\partial V_1}{\partial x}U_4\right)dx$$

$$+\left(\frac{\partial U_2}{\partial y}V_4+\frac{\partial V_4}{\partial y}U_2+\frac{\partial U_4}{\partial y}V_1+\frac{\partial V_1}{\partial y}U_4\right)dy$$

$$+\left(\frac{\partial U_2}{\partial z}V_4+\frac{\partial V_4}{\partial z}U_2+\frac{\partial U_4}{\partial z}V_1+\frac{\partial V_1}{\partial z}U_4\right)dz\Bigg]e_4.$$

Преобразуем полученное выражение к следующему виду:

$$\left(V_1\frac{\partial U_1}{\partial x}dx+V_1\frac{\partial U_1}{\partial y}dy+V_1\frac{\partial U_1}{\partial z}dz+V_4\frac{\partial U_3}{\partial x}dx+V_4\frac{\partial U_3}{\partial y}dy+V_4\frac{\partial U_3}{\partial z}dz\right)e_1$$

$$+\left(V_2\frac{\partial U_2}{\partial x}dx+V_2\frac{\partial U_2}{\partial y}dy+V_2\frac{\partial U_2}{\partial z}dz+V_3\frac{\partial U_4}{\partial x}dx+V_3\frac{\partial U_4}{\partial y}dy+V_3\frac{\partial U_4}{\partial z}dz\right)e_2$$

$$+\left(V_3\frac{\partial U_1}{\partial x}dx+V_3\frac{\partial U_1}{\partial y}dy+V_3\frac{\partial U_1}{\partial z}dz+V_2\frac{\partial U_3}{\partial x}dx+V_2\frac{\partial U_3}{\partial y}dy+V_2\frac{\partial U_3}{\partial z}dz\right)e_3$$

$$+\left(V_4\frac{\partial U_2}{\partial x}dx+V_4\frac{\partial U_2}{\partial y}dy+V_4\frac{\partial U_2}{\partial z}dz+V_1\frac{\partial U_4}{\partial x}dx+V_1\frac{\partial U_4}{\partial y}dy+V_1\frac{\partial U_4}{\partial z}dz\right)e_4$$

$$+\left(U_1\frac{\partial V_1}{\partial x}dx+U_1\frac{\partial V_1}{\partial y}dy+U_1\frac{\partial V_1}{\partial z}dz+U_4\frac{\partial V_3}{\partial x}dx+U_4\frac{\partial V_3}{\partial y}dy+U_4\frac{\partial V_3}{\partial z}dz\right)e_1$$

$$+\left(U_2\frac{\partial V_2}{\partial x}dx+U_2\frac{\partial V_2}{\partial y}dy+U_2\frac{\partial V_2}{\partial z}dz+U_3\frac{\partial V_4}{\partial x}dx+U_3\frac{\partial V_4}{\partial y}dy+U_3\frac{\partial V_4}{\partial z}dz\right)e_2$$

$$+\left(U_3\frac{\partial V_1}{\partial x}dx+U_3\frac{\partial V_1}{\partial y}dy+U_3\frac{\partial V_1}{\partial z}dz+U_2\frac{\partial V_3}{\partial x}dx+U_2\frac{\partial V_3}{\partial y}dy+U_2\frac{\partial V_3}{\partial z}dz\right)e_3$$

$$+\left(U_4\frac{\partial V_2}{\partial x}dx+U_4\frac{\partial V_2}{\partial y}dy+U_4\frac{\partial V_2}{\partial z}dz+U_1\frac{\partial V_4}{\partial x}dx+U_1\frac{\partial V_4}{\partial y}dy+U_1\frac{\partial V_4}{\partial z}dz\right)e_4\,,$$

откуда будем иметь

$$\Big(V_1dU_1+V_4dU_3\Big)e_1+\Big(V_2dU_2+V_3dU_4\Big)e_2+\Big(V_3dU_1+V_2dU_3\Big)e_3$$

$$+\Big(V_4dU_2+V_1dU_4\Big)e_4+\Big(U_1dV_1+U_3dV_4\Big)e_1+\Big(U_2dV_2+U_4dV_3\Big)e_2$$

$$+\Big(U_1dV_3+U_3dV_2\Big)e_3+\Big(U_2dV_4+U_4dV_1\Big)e_4=d\Phi\cdot\Psi+\Phi\cdot d\Psi.$$

Теорема доказана. □

В силу теоремы 5.2 множество H-моногенных отображений со значениями в алгебре $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ образует функциональную алгебру, поскольку произведение двух H-моногенных отображений также является H-моногенным отображением.

В следующей теореме устанавливается связь между G-моногенными и H-моногенными отображениями.

Теорема 5.3. *Каждое право-G-моногенное отображение $\Phi:\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ и каждое лево-G-моногенное отображение $\widehat{\Phi}:\Omega_\zeta\to\mathbb{H}(\mathbb{C})$ в области Ω_ζ являются H-моногенными отображениями в этой области.*

Доказательство. Пусть $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ — право-G-моногенное отображение. Тогда существование частных производных первого порядка от компонент отображения Φ вытекает из существования производной Гато (равенство (3.2)). Покажем теперь, что дифференциал

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}dz \tag{5.10}$$

представим в виде (5.5).

С этой целью заметим, что следствием равенства (5.10) и условий (3.4) является равенство

$$d\Phi = \big(dx + i_2 dy + i_3 dz\big)\frac{\partial \Phi}{\partial x} = d\zeta\, \Phi'(\zeta),$$

т. е. представление вида (5.5), в котором $A_1 = 1, B_1 = \Phi'(\zeta)$.

Аналогично устанавливается, что следствием равенства (5.10) при $\Phi = \widehat{\Phi}$ и условий (3.5) является равенство

$$d\widehat{\Phi} = \widehat{\Phi}'(\zeta)d\zeta,$$

т. е. снова представление вида (5.5), в котором $A_1 = \widehat{\Phi}'(\zeta), B_1 = 1$. Теорема доказана. □

Поскольку право- и лево-G-моногенные отображения являются H-моногенными, то их произведения также являются H-моногенными отображениями. Поэтому следствием теорем 5.2, 5.3 и представлений (3.6), (3.7) является следующее утверждение.

Следствие 5.1. *Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ является выпуклой в направлении прямых L^1, L^2 и $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$. Тогда H-моногенными в области Ω_ζ являются отображения*

$$\begin{aligned}
&\Phi(\zeta)\cdot\widehat{\Phi}(\zeta)\\
&= \Big(F_1(\xi_1)\widehat{F}_1(\xi_1) + F_3(\xi_1)\widehat{F}_4(\xi_1)\Big)e_1 + \Big(F_2(\xi_2)\widehat{F}_2(\xi_2) + F_4(\xi_2)\widehat{F}_3(\xi_2)\Big)e_2\\
&+\Big(F_1(\xi_1)\widehat{F}_3(\xi_2) + F_3(\xi_1)\widehat{F}_2(\xi_2)\Big)e_3 + \Big(F_2(\xi_2)\widehat{F}_4(\xi_1) + F_4(\xi_2)\widehat{F}_1(\xi_1)\Big)e_4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\widehat{\Phi}(\zeta)\cdot\Phi(\zeta)\\
&= \Big(\widehat{F}_1(\xi_1)F_1(\xi_1) + \widehat{F}_3(\xi_2)F_4(\xi_2)\Big)e_1 + \Big(\widehat{F}_2(\xi_2)F_2(\xi_2) + \widehat{F}_4(\xi_1)F_3(\xi_1)\Big)e_2\\
&+\Big(\widehat{F}_1(\xi_1)F_3(\xi_1) + \widehat{F}_3(\xi_2)F_2(\xi_2)\Big)e_3 + \Big(\widehat{F}_2(\xi_2)F_4(\xi_2) + \widehat{F}_4(\xi_1)F_1(\xi_1)\Big)e_4,
\end{aligned}$$

где аналитические функции $F_k, \widehat{F}_k$ определены в равенствах (3.6), (3.7).

В то же время существуют H-моногенные отображения, не являющиеся ни право-G-моногенными, ни лево-G-моногенными.

Пример 5.1. Отображение

$$h(\zeta) = (e^{\xi_1} + \xi_2^2)\, e_1 + \xi_1 \sin \xi_2\, e_2 + \xi_2^2\, e_3 + e^{\xi_1}\, e_4$$

является H-моногенным в пространстве E_3, но не является ни лево-G-моногенным, ни право-G-моногенным. Действительно, дифференциал этого отображения представляется в виде (5.5):

$$dh = e^{\xi_1} e_1 d\zeta e_1 + \xi_1 \cos \xi_2\, e_2\, d\zeta e_2 + 2\xi_2\, e_3\, d\zeta e_2$$

$$+ e^{\xi_1}\, e_4\, d\zeta e_1 + 2\xi_2\, e_3\, d\zeta\, e_4 + \sin \xi_2\, e_4\, d\zeta\, e_3.$$

Однако отображение h не представляется ни в виде (3.6), ни в виде (3.7).

H-моногенное отображение Φ, дифференциал которого представляется в виде

$$d\Phi = d\zeta\, \Phi'_H(\zeta) \tag{5.11}$$

будем называть *право-H-моногенным*, а H-моногенное отображение $\widehat{\Phi}$, дифференциал которого представляется в виде

$$d\widehat{\Phi} = \widehat{\Phi}'_H(\zeta) d\zeta \tag{5.12}$$

— *лево-H-моногенным* в области Ω_ζ.

Установим необходимые и достаточные условия G-моногенности отображения.

Теорема 5.4. *Пусть компоненты* $U_k : \Omega \to \mathbb{C}$ *отображения* (3.3) *являются* $\mathbb{R}$*-дифференцируемыми в области* Ω. *Отображение* $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *является право-G-моногенным тогда и только тогда, когда оно — право-H-моногенное, а отображение* $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ *является лево-G-моногенным тогда и только тогда, когда оно — лево-H-моногенное.*

Доказательство. Необходимость доказана при доказательстве теоремы 5.3. Докажем достаточность. Пусть отображение Φ — право-H-моногенное, т. е. выполняется равенство (5.11). Следствием равенств (5.10) и (5.11) является равенство

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz = d\zeta \Phi'_H(\zeta).$$

С учетом выражений $\Phi'_H(\zeta) = \frac{\partial\Phi}{\partial x}$ и $d\zeta = dx + i_2 dy + i_3 dz$ имеем тождество

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z}dz = \frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + i_2\frac{\partial\Phi}{\partial x}dy + i_3\frac{\partial\Phi}{\partial x}dz,$$

следствием которого являются условия Коши–Римана (3.4). Тогда по теореме 1 из [1] отображение Φ — право-G-моногенное.

Аналогично рассматривается случай лево-H-моногенного отображения. Теорема доказана. $\square$

Из теоремы 5.4 и теоремы 5 из [1] вытекает

Следствие 5.2. *Если область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ является выпуклой в направлении прямых L^1, L^2 и $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$, то каждое право-$H$-моногенное отображение $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ представляется в виде* (3.6) *и каждое лево-H-моногенное отображение $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ представляется в виде* (3.7).

Следующая теорема содержит критерии право-G-моногенности и лево-G-моногенности отображений.

Теорема 5.5. *Отображение $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})$ $\big($или $\widehat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H}(\mathbb{C})\big)$ является право-G-моногенным $\big($или лево-G-моногенным$\big)$ в области $\Omega_\zeta \subset E_3$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

(I) *компоненты $U_k : \Omega \to \mathbb{C}$ разложения* (3.3) *являются $\mathbb{R}$-дифференцируемыми в области Ω и выполняются условия* (3.4) $\big($*или* (3.5)$\big)$ *в каждой точке области Ω_ζ;*

(II) *компоненты $U_k : \Omega \to \mathbb{C}$ разложения* (3.3) *являются $\mathbb{R}$-дифференцируемыми в области Ω и отображение Φ $\big($или $\widehat{\Phi}\big)$ — право-H-моногенное $\big($или лево-H-моногенное$\big)$ в Ω_ζ.*

Если $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$, то отображение Φ является право-G-моногенным $\big($или $\widehat{\Phi}$ — лево-G-моногенным$\big)$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:

(III) *для каждой точки $\zeta_0 \in \Omega_\zeta$ найдется окрестность, в которой отображение Φ $\big($или $\widehat{\Phi}\big)$ разлагается в степенной ряд* (3.8) $\big($*или* (3.9)$\big)$*;*

(IV) *отображение Φ $\big($или $\widehat{\Phi}\big)$ непрерывно и удовлетворяет равенству* (4.5) $\big($*или* (4.6)$\big)$ *для каждого треугольника Δ_ζ такого, что $\overline{\Delta_\zeta} \subset \Omega_\zeta$.*

Если $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$ и, кроме того, область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ является выпуклой в направлениии прямых L^1, L^2, то отображение Φ —

право-G-моногенное $\big($*или* $\widehat{\Phi}$ *— лево-G-моногенное*$\big)$ *тогда и только тогда, когда*

(V) *существуют единственные аналитические в области* $D_1 := \{\xi_1 = x + a_1y + b_1z : (x,y,z) \in \Omega\}$ *функции* F_1, F_3 $\big($*или* $\widehat{F}_1$, $\widehat{F}_4\big)$ *и единственные аналитические в области* $D_2 := \{\xi_2 = x + a_2y + b_2z : (x,y,z) \in \Omega\}$ *функции* F_2, F_4 $\big($*или* $\widehat{F}_2$, $\widehat{F}_3\big)$ *такие, что в области* Ω_ζ *отображение* Φ $\big($*или* $\widehat{\Phi}\big)$ *представляется в виде* (3.6) $\big($*или* (3.7)$\big)$.

Доказательство. Эквивалентность условия (I) и свойства право-G-моногенности установлена в теореме 1 из [1]. Эквивалентность условия (II) и право-G-моногенности установлена в теореме 5.4. Эквивалентность условия (III) и право-G-моногенности вытекает из теоремы 1 работы [25] и свойства сходящегося ряда (3.8) определять функцию, право-G-моногенную в шаре сходимости. Эквивалентность условия (IV) и право-G-моногенности вытекает из теоремы 4.1 и теоремы 2 работы [24].

Наконец, для доказательства эквивалентности условия (V) и право-G-моногенности отображения Φ достаточно заметить, что отображение (3.6) является право-G-моногенным в Ω_ζ, а единственность функций F_1, F_2, F_3, F_4 из (3.6) следует из единственности разложения элемента алгебры $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ по базису $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. В случае лево-G-моногенного отображения теорема доказывается аналогично. Теорема доказана. $\square$

Благодарности. Авторы признательны профессору С. А. Плаксе за ценные советы, которые способствовали улучшению работы.

Литература

[1] В. С. Шпаківський, Т. С. Кузьменко, *Про один клас кватерніонних відображень* // Укр. мат. журн., **68** (2016), № 1, 117–130.

[2] G. Scheffers, *Verallgemeinerung der Grundlagen der gewohnlich complexen Funktionen* // Ber. Verh. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig Mat.-Phys. Kl., **45** (1893), 828–848.

[3] F. Hausdorff, *Zur Theorie der Systeme complexer Zahlen* // Leipziger Berichte, **52** (1900), 43–61.

[4] F. Ringleb, *Beiträge zur funktionentheorie in hyperkomplexen systemen, I.* // Rend. Circ. Mat. Palermo, **57** (1933), No. 1, 311–340.

[5] J. Ward, *A theory of analytic functions in linear associative algebras* // Duke Math. J., **7** (1940), No. 1, 233–248.

[6] R. D. Wagner, *Differentials and analytic continuation in non-commutative algebras* // Duke Math. J., **9** (1942), No. 4, 677–691.

[7] E. R. Lorch, *The theory of analytic runction in normed abelin vector rings* // Trans. Amer. Math. Soc., **54** (1943), 414–425.

[8] В. С. Федоров, *Моногенность* // Мат. сб., **18** (1946), № 3, 353–378.

[9] С. Н. Воловельская, *Аналитические функции в неполупростых ассоциативных линейных алгебрах* // Записки Научно-исслед. ин-та математики и механики и Харьков. мат. общ., **19**(4) (1948), 153–159.

[10] М. Дегтерева, *К вопросу построения теории аналитических функций в линейных алгебрах* // Докл. АН СССР, **61** (1948), No. 1, 13–15.

[11] W. O. Portman, *A derivative for Hausdorff-analytic functions* // Proc. Amer. Math. Soc., **V** (10) (1959), 101–105.

[12] R. F. Rinehart, J. C. Wilson, *Two types of differentiability of functions on algebras* // Rend. Circ. Matem. Palermo, **II** (11) (1962), 204–216.

[13] M. N. Roşculeţ, *Funcţii monogene pe algebre comutative*, Bucuresti, Acad. Rep. Soc. Romania, 1975, 339 p.

[14] И. П. Мельниченко, С. А. Плакса, *Коммутативные алгебры и пространственные потенциальные поля,*, Ин-т математики НАН Украины, 2008, 230 с.

[15] М. В. Синьков, Ю. С. Бояринова, Я. А. Калиновский, *Конечномерные гиперкомплексные числовые системы. Основы теории. Применения*, Ин-т проблем регистр. информ. НАН Украины, 2010, 389 с.

[16] G. C. Moisil, N. Theodoresco, *Functions holomorphes dans l'espace* // Mathematica (Cluj), **5** (1931), 142–159.

[17] R. Fueter, *Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen* $\Delta u = 0$ *und* $\Delta\Delta u = 0$ *mit vier reellen Variablen* // Comment. math. helv, **7** (1935), 307–330.

[18] Н. М. Крылов, *О кватернионах Роана Гамильтона и понятии моногенности* // Докл. АН СССР, **55** (1947), № 9, 799–800.

[19] А. С. Мейлихзон, *По поводу моногенности кватернионов* // Докл. АН СССР, **59** (1948), № 3, 431–434.

[20] A. Sudbery, *Quaternionic analysis* // Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **85** (1979), 199–225.

[21] G. Gentili, D. C. Struppa, *A new approach to Cullen-regular functions of a quaternionic variable* // Comptes Rendus Mathematique, **342** (10) (2006), 741–744.

[22] M. E. Luna Elizarrarás, M. Shapiro, *A Survey on the* $(Hyper-)$ *Derivatives in Complex, Quaternionic and Clifford Analysis* // Milan J. Math., **79** (2) (2011), 521–542.

[23] O. Dzagnidze, $\mathbb{C}^2$-*differentiability of quaternion functions and their representation by integrals and series* // Proc. A. Razmadze Math. Inst., **167** (2015), 19–27.

[24] V. S. Shpakivskyi, T. S. Kuzmenko, *Integral theorems for the quaternionic G-monogenic mappings:* accepted to An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa, **24** (2) (2016), http://arxiv.org/pdf/1412.5320v1.pdf.

[25] Т. С. Кузьменко, *Степеневі ряди та ряди Лорана в алгебрі комплексних кватерніонів* // Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **12**(3) (2015), 164–174.

[26] E. Cartan, *Les groupes bilinéares et les systèmes de nombres complexes* // Annales de la faculté des sciences de Toulouse, **12**(1) (1898), 1–64.

[27] C. Segre, *The real representations of complex elements and extension to bicomplex systems* // Math. Ann. **40** (1892), 413–467.

[28] Б. Л. Ван дер Варден, *Алгебра*, М., Мир, 1976, 648 с.

Сведения об авторах

Виталий Станиславович Шпаковский
Институт математики НАН Украины, Киев, Украина
E-Mail: `shpakivskyi86@gmail.com`

Татьяна Сергеевна Кузьменко
Институт математики НАН Украины, Киев, Украина
E-Mail: `kuzmenko.ts15@gmail.com`