Український математичний вісник
Том 13 **(2016)**, № 1, 129 – 141

УМВ

Метрические свойства классов Орлича–Соболева

Руслан Р. Салимов

(*Представлена В.Я. Гутлянским*)

Аннотация. В работе изучаются гомеоморфизмы классов Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ в $\mathbb{R}^n, n \geqslant 3$ при условии типа Кальдерона на функцию φ. Для таких отображений установлен целый ряд теорем о локальном поведении и, в частности, доказан аналог известной теоремы Геринга о локальной липшицевости, приведены различные теоремы об оценке искажения евклидовых расстояний. В частности, результаты справедливы для классов Соболева $W^{1,p}_{\rm loc}$ при $p > n-1$.

2010 MSC. 30C65, 30C75.

Ключевые слова и фразы. p-модуль семейства кривых, нижние Q-гомеоморфизмы, классы Орлича–Соболева.

1. Введение

Модули семейств кривых и поверхностей являются основным инструментом для исследования в геометрической теории функций. Развитие метода модулей, происходившее в последнее время, тесно связано с современными классами отображений, см., напр., монографию [1], и уравнениями в частных производных, см., напр., монографии [2] и [3]. Смотри также недавние статьи и монографии [4–26] и дальнейшие ссылки в них.

Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Напомним, что гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением с конечным искажением,* если $f \in W^{1,1}_{\rm loc}$ и

$$\|f'(x)\|^n \leqslant K(x)\, J(x,f) \tag{1.1}$$

для некоторой почти всюду конечной функции $K(x) \geqslant 1$, где $f'(x)$ якобиева матрица f, $\|f'(x)\|$ – её операторная норма:

$$\|f'(x)\| = \sup_{|h|=1} |f'(x)\cdot h| \tag{1.2}$$

Статья поступила в редакцию 27.01.2016

и
$$J(x,f)=\det f'(x) \tag{1.3}$$
— якобиан отображения f.

Пусть $p\in(1,\infty)$. В дальнейшем, полагаем
$$K_p(x,f)=\begin{cases}\frac{\|f'(x)\|^p}{J(x,f)}, & \text{если } J(x,f)\neq 0\\ 1, & \text{если } f'(x)=0\\ \infty, & \text{в остальных точках}\,.\end{cases} \tag{1.4}$$
Впервые понятие отображения с конечным искажением введено в случае плоскости для $f\in W^{1,2}_{\rm loc}$ в работе [27], см. также [28].

Следуя Орличу, для заданной выпуклой возрастающей функции $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $\varphi(0)=0$, обозначим символом L^{φ} пространство всех функций $f:D\to\mathbb{R}$, таких что
$$\int\limits_D \varphi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)\,dm(x)<\infty \tag{1.5}$$
при некотором $\lambda>0$, см., напр., [29]. Здесь m — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Пространство L^{φ} называется *пространством Орлича*.

Классом Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(D)$ называется класс всех локально интегрируемых функций f, заданных в D, с первыми обобщёнными производными по Соболеву, градиент ∇f которых принадлежит классу Орлича локально в области D. Если же, более того, ∇f принадлежит классу Орлича в области D, мы пишем $f\in W^{1,\varphi}(D)$. Заметим, что по определению $W^{1,\varphi}_{\rm loc}\subset W^{1,1}_{\rm loc}$. Как обычно, мы пишем $f\in W^{1,p}_{\rm loc}$, если $\varphi(t)=t^p$, $p\geqslant 1$. Известно, что непрерывная функция f принадлежит классу $W^{1,p}_{\rm loc}$ тогда и только тогда, когда $f\in ACL^p$, т.е., если f локально абсолютно непрерывна на почти всех прямых, параллельных координатным осям, а первые частные производные f локально интегрируемы в степени p в области D, см., напр., [30, разд. 1.1.3].

Далее, если f — локально интегрируемая вектор-функция n вещественных переменных $x_1,\ldots,x_n$, $f=(f_1,\ldots,f_m)$, $f_i\in W^{1,1}_{\rm loc}$, $i=1,\ldots,m$, и
$$\int\limits_D \varphi\left(|\nabla f(x)|\right)\,dm(x)<\infty\,, \tag{1.6}$$
где $|\nabla f(x)|=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^m\sum\limits_{j=1}^n\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2}$, то мы снова пишем $f\in W^{1,\varphi}_{\rm loc}$. Мы также используем обозначение $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ в случае более общих функций φ, чем в классах Орлича, всегда предполагающих выпуклость функции φ и ее нормировку $\varphi(0)=0$.

2. Нижние Q-гомеоморфизмы относительно p-модуля

Следуя [1, разд. 9.2, гл. 9], далее *k-мерной поверхностью* S в $\mathbb{R}^n$ называется произвольное непрерывное отображение $S:\omega\to\mathbb{R}^n$, где ω — открытое множество в $\overline{\mathbb{R}^k}:=\mathbb{R}^k\cup\{\infty\}$ и $k=1,\ldots,n-1$. *Функцией кратности* поверхности S называется число прообразов

$$N(S,y)=\operatorname{card}S^{-1}(y)=\operatorname{card}\{x\in\omega:\ S(x)=y\},\quad y\in\mathbb{R}^n\,.$$

Другими словами, символ $N(S,y)$ обозначает кратность накрытия точки y поверхностью S. Известно, что функция кратности является полунепрерывной снизу, и, значит, измерима относительно произвольной хаусдорфовой меры H^k, см., [1, разд. 9.2].

Для борелевской функции $\rho:\mathbb{R}^n\to[0,\infty]$ ее *интеграл над поверхностью* S определяется равенством

$$\int\limits_S\rho\,d\mathcal{A}:=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\rho(y)\,N(S,y)\,dH^ky\,. \tag{2.1}$$

Пусть Γ — семейство k-мерных поверхностей S. Борелева функция $\rho:\mathbb{R}^n\to[0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ, пишут $\rho\in\operatorname{adm}\Gamma$, если

$$\int\limits_S\rho^k\,d\mathcal{A}\geqslant 1$$

для каждой поверхности $S\in\Gamma$. Пусть $p\in(1,\infty)$ — заданное фиксированное число. Тогда *p-модулем* семейства Γ называется величина

$$M_p(\Gamma)=\inf_{\rho\in\operatorname{adm}\Gamma}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\rho^p(x)\,dm(x)\,.$$

Будем говорить, что свойство P имеет место для *p-почти всех* (p-п.в.) k-мерных поверхностей S семейства Γ, если подсемейство всех поверхностей семейства Γ, для которых свойство P нарушается, имеет p-модуль нуль.

Говорят, см. [1, разд. 9.2], что измеримая по Лебегу функция $\rho:\mathbb{R}^n\to[0,\infty]$ является *обобщённо p-допустимой* для семейства Γ, состоящего из $(n-1)$-мерных поверхностей S в $\mathbb{R}^n$, пишут $\rho\in\operatorname{ext}_p\operatorname{adm}\Gamma$, если

$$\int\limits_S\rho^{n-1}(x)\,d\mathcal{A}\geqslant 1 \tag{2.2}$$

для p-почти всех $S \in \Gamma$.

В работе [20, разд. 13], Ф. Геринг определил K-квазиконформное отображение как гомеоморфизм, изменяющий модуль кольцевой области не более чем в K раз. Следующее понятие мотивировано кольцевым определением Геринга.

Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in D$, $Q : D \to (0, \infty)$ — измеримая по Лебегу функция. Гомеоморфизм $f : D \to D'$ будем называть *нижним Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля в точке* x_0, если

$$M_p\left(f\Sigma_R\right) \geqslant \inf_{\rho \in \mathrm{ext_p} \, \mathrm{adm}\, \Sigma_R} \int\limits_R \frac{\rho^p(x)}{Q(x)}\, dm(x) \tag{2.3}$$

для каждого кольца

$$R = R(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon_1 < |x - x_0| < \varepsilon_2\right\}, 0 < \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2 < d_0,$$

где $d_0 = \mathrm{dist}(x_0, \partial D)$, а Σ_R обозначает семейство всех сфер

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}\,, \qquad r \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)\,. \tag{2.4}$$

3. Свойства классов Орлича–Соболева

Условимся говорить, что функция $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *удовлетворяет условию* A_k, $k = 2, 3, \ldots$ пишем $\varphi \in A_k$, если функция $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ возрастает и

$$\int\limits_1^\infty \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{k-1}} dt < \infty\,. \tag{3.1}$$

Ниже приведены свойства классов Орлича–Соболева, см. [31].

Теорема 3.1. *Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное открытое отображение класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, где $\varphi \in A_{n-1}$. Тогда отображение f имеет почти всюду полный дифференциал в Ω.*

Замечание 3.1. В частности, заключение теоремы 3.1 имеет место, если $f \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ при некотором $p > n - 1$. Последнее утверждение — результат Вяйсяля, см. [26, лемма 3]. Теорема 3.1 является также распространением в пространство хорошо известной теоремы Меньшова–Геринга–Лехто на плоскости, см., напр., [32, 33] и [23].

Теорема 3.2. *Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное открытое отображение класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, где $\varphi \in A_{n-1}$. Тогда отображение f имеет почти всюду полный дифференциал в Ω.*

Теорема 3.3. *Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$ и $\varphi \in A_{n-1}$. Тогда любое непрерывное отображение $f : U \to \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$, класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ обладает (N)-свойством, более того, локально абсолютно непрерывно относительно $(n-1)$-мерной хаусдорфовой меры на почти всех гиперплоскостях $\mathcal{P}$, параллельных произвольной фиксированной гиперплоскости $\mathcal{P}_0$. Кроме того, на почти всех таких $\mathcal{P}$, $H^{n-1}(f(E)) = 0$, если $|\nabla f| = 0$ на $E \subset \mathcal{P}$.*

Заметим, что, если условие вида (3.1) имеет место для некоторой неубывающей функции φ, то функция $\varphi_c(t) = \varphi(ct)$ при $c > 0$ также удовлетворяет соотношению (3.1). Кроме того, хаусдорфовы меры являются квазиинвариантными при квазиизометриях.

Следствие 3.1. *При условии $\varphi \in A_{n-1}$ любое непрерывное отображение $f \in W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ обладает (N)-свойством относительно $(n-1)$-мерной меры Хаусдорфа, более того, локально абсолютно непрерывно на почти всех сферах S с центром в заданной предписанной точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Кроме того, на почти всех таких сферах S выполнено условие $H^{n-1}(f(E)) = 0$ как только $|\nabla f| = 0$ на множестве $E \subset S$.*

4. Взаимосвязь нижних Q-гомеоморфизмов с классами Орлича–Соболева

Напомним, что отображение $g : X \to Y$ между метрическими пространствами X и Y называется *липшицевым,* если

$$\mathrm{dist}\ (g(x_1), g(x_2)) \leqslant M \cdot \mathrm{dist}\ (x_1, x_2)$$

для некоторой постоянной $M < \infty$ и всех x_1, $x_2 \in X$. Говорят, что отображение $g : X \to Y$ *билипшицево*, если, оно, во-первых, липшицево, во-вторых,

$$M^* \cdot \mathrm{dist}\ (x_1, x_2) \leqslant \mathrm{dist}\ (g(x_1), g(x_2))$$

для некоторой постоянной $M^* > 0$ и всех x_1, $x_2 \in X$.

Следующее утверждение является ключевым для дальнейшего исследования.

Лемма 4.1. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, и $\varphi \in A_{n-1}$. Тогда любой гомеоморфизм $f : D \to D'$ конечного искажения класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ является нижним $K_p(x,f)$-гомеоморфизмом относительно p-модуля с $p > n-1$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{B}$ (борелево) множество всех точек $x \in D$, где отображение f имеет полный дифференциал и $J(x,f) = \det f'(x) \neq 0$. Заметим, что множество $\mathcal{B}$ представляет собой не более чем счётное объединение борелевских множеств $\mathcal{B}_l$, $l = 1, 2, \ldots$, таких что отображения $f_l = f|_{\mathcal{B}_l}$ являются билипшицевыми гомеоморфизмами, см., напр., [34, лемма 3.2.2]. Без ограничения общности, можно считать, что множества $\mathcal{B}_l$ попарно не пересекаются. Обозначим также через $\mathcal{B}_*$ оставшееся множество всех точек $x \in D$, где f имеет полный дифференциал, однако, $f'(x) = 0$.

По теореме 3.1 множество $\mathcal{B}_0 := D \setminus (\mathcal{B} \bigcup \mathcal{B}_*)$ имеет меру Лебега нуль. Следовательно, по [1, теорема 9.1] имеем, что $H^{n-1}(\mathcal{B}_0 \cap S_r) = 0$ для p-почти всех сфер $S_r := S(x_0, r)$ с центром в произвольной точке $x_0 \in D$, где "p-почти всех" определяется в смысле p-модуля семейства поверхностей. Тогда, в силу [1, лемма 9.1], $H^{n-1}(\mathcal{B}_0 \cap S_r) = 0$ для почти всех $r \in \mathbb{R}$ и по следствию 3.1 получаем, что $H^{n-1}(f(\mathcal{B}_0) \cap S_r^*) = 0$ и $H^{n-1}(f(\mathcal{B}_*) \cap S_r^*) = 0$ для почти всех $r \in \mathbb{R}$, где $S_r^* = f(S_r)$.

$\square$

Заметим, что также $H^{n-1}(f(\mathcal{B}_0) \cap S_r^*) = 0$ и $H^{n-1}(f(\mathcal{B}_*) \cap S_r^*) = 0$ для почти всех сфер $S_r := S(x_0, r)$ в смысле p-модуля семейства поверхностей.

Действительно, пусть Γ_0 — подсемейство всех сфер $S_r := S(x_0, r)$, для которых либо $H^{n-1}(f(\mathcal{B}_0) \cap S_r^*) > 0$, либо $H^{n-1}(f(\mathcal{B}_*) \cap S_r^*) > 0$. Обозначим через R множество всех $r \in \mathbb{R}$, для которых либо $H^{n-1}(f(\mathcal{B}_0) \cap S_r^*) > 0$, либо $H^{n-1}(f(\mathcal{B}_*) \cap S_r^*) > 0$. В силу сказанного выше, $m_1(R) = 0$. Тогда по теореме Фубини $m(E) = 0$, где $E = \{x \in D : |x - x_0| = r \in R\}$. Функция $\rho_1 : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$, определённая символом ∞ при $x \in E$ и равная нулю на оставшемся множестве обобщенно p-допустима для семейства Γ_0. Таким образом, по (9.18) в [1] $M_p(\Gamma_0) \leqslant \int\limits_E \rho_1^p dm(x) = 0$, т.е., действительно, $M_p(\Gamma_0) = 0$.

По теореме Кирсбрауна, см. [34, теорема 2.10.43], каждое отображение f_l может быть продолжено до липшицевского отображения $\widetilde{f_l} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, которое по теореме Радемахера–Степанова $\widetilde{f_l}$ дифференцируемо почти всюду в $\mathbb{R}^n$, см. [34, теорема 3.1.6]. В силу единственности аппроксимативного дифференциала (см. [34, пункт 3.1.2]), можно считать, что при всех $x \in \mathcal{B}_l$ выполнено равенство $\widetilde{f_l}'(x) = f'(x)$.

Пусть Γ обозначает семейство всех сфер S_r, $r \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $\varepsilon_2 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$. Для произвольной функции $\rho_* \in \operatorname{adm} f(\Gamma)$, такой что $\rho_* \equiv 0$ вне $f(D)$, полагаем $\rho \equiv 0$ вне D и на $\mathcal{B}_0$, и

$$\rho(x) \ := \ \rho_*(f(x)) \cdot \|f'(x)\| \qquad \text{при } x \in D \setminus \mathcal{B}_0 = \mathcal{B} \cup \mathcal{B}_*$$

Рассуждая покусочно на каждом $\mathcal{B}_l$, $l = 1, 2, \ldots$, согласно [34, разд. 1.7.6], а также используя геометрический смысл величины $\|f'(x)\|$ и её связь с якобианом отображения, см., напр., соотношения (2.5) и (2.6) гл. I § 2 в [10], имеем, что

$$\int\limits_{S_r} \rho^{n-1}\, d\mathcal{A} = \int\limits_{S_r} \rho_*^{n-1}(f(x))\|f'(x)\|^{n-1}\, d\mathcal{A}$$

$$= \int\limits_{S_r} \rho_*^{n-1}(f(x)) \cdot \frac{\|f'(x)\|^{n-1}}{\frac{d\mathcal{A}_*}{d\mathcal{A}}} \cdot \frac{d\mathcal{A}_*}{d\mathcal{A}}\, d\mathcal{A} \geqslant \int\limits_{S_r} \rho_*^{n-1}(f(x)) \cdot \frac{d\mathcal{A}_*}{d\mathcal{A}}\, d\mathcal{A}$$

$$= \int\limits_{S_r^*} \rho_*^{n-1}(y) d\mathcal{A}_* \geqslant 1$$

для почти всех S_r, и, следовательно, $\rho \in \mathrm{ext_p}\, \mathrm{adm}\, \Gamma$. Используя замену переменных на каждом $\mathcal{B}_l$, $l = 1, 2, \ldots$, см., напр., [34, теорема 3.2.5], ввиду счётной аддитивности интеграла, получаем также оценку

$$\int\limits_{D} \frac{\rho^p(x)}{K_p(x, f)}\, dm(x) \ \leqslant \ \int\limits_{f(D)} \rho_*^p(x)\, dm(x)\,,$$

что и завершает доказательство.

Следствие 4.1. *Любой гомеоморфизм с конечным искажением в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, класса $W^{1,\alpha}_{\mathrm{loc}}$ при $\alpha > n-1$ является нижним $K_p(x, f)$-гомеоморфизмом с $p > n-1$.*

5. Гельдеровость и липшицевость классов Орлича–Соболева

В этом разделе найдены достаточные условия гельдеровости для отображений класса Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ в $\mathbb{R}^n, n \geqslant 3$ при условии типа Кальдерона на функцию φ.

Следующий ряд теорем вытекает из леммы 4.1 и соответствующих теорем параграфа 4 из работы [11].

Теорема 5.1. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. Предположим, что $f : D \to D'$ — гомеоморфизм с конечным искажением класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$, $\varphi \in A_{n-1}$. Если для $\lambda > 1$ и $\sigma > 0$*

$$\varepsilon^{\sigma} \int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \frac{dr}{\|\, K_p\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r)} \geqslant C_{x_0} \tag{5.1}$$

для любого $0 < \varepsilon < \delta_0 \leqslant \frac{\operatorname{dist}(x_0, \partial D)}{\lambda^2}$, *где*

$$\| K_p\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r) = \left(\int\limits_{S(x_0,r)} [K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}\, d\mathcal{A} \right)^{\frac{p-n+1}{n-1}}. \qquad (5.2)$$

Тогда при $p \in \left(n, n + \frac{1}{n-2}\right)$ *имеем*

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \nu_0\, C_{x_0}^{-\frac{1}{p-n}}\, |x - x_0|^{\frac{\sigma}{p-n}} \qquad (5.3)$$

для всех $x \in B(x_0, \delta_0)$, *где* ν_0 *— положительная константа, зависящая только от размерности пространства* n, p, λ *и* σ.

Теорема 5.2. *Пусть* D *и* D' *— области в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. *Предположим, что* $f : D \to D'$ *— гомеоморфизм с конечным искажением класса* $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$, $\varphi \in A_{n-1}$. *Если* $K_p(x,f) \in L_\alpha(B(x_0, \delta_0)), \delta_0 \leqslant \frac{\operatorname{dist}(x_0, \partial D)}{4}$, $p \in \left(n, n + \frac{1}{n-2}\right)$, $\alpha > \frac{n}{p-n}$, *то*

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \nu_0 \|K_p(x,f)\|_\alpha^{\frac{1}{p-n}} |x - x_0|^{1 - \frac{n}{\alpha(p-n)}} \qquad (5.4)$$

для всех $x \in B(x_0, \delta_0)$, *где* $\|K_p(x,f)\|_\alpha = \left(\int\limits_{B(x_0,\delta_0)} K_p^\alpha(x,f)\, dm(x) \right)^{\frac{1}{\alpha}}$ *— норма в пространстве* $L_\alpha(B(x_0,\delta_0))$ *и* ν_0 *— положительная постоянная, зависящая только от* n, p *и* α.

Следствие 5.1. *Пусть* D *и* D' *— области в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. *Предположим, что* $f : D \to D'$ *— гомеоморфизм с конечным искажением класса* $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$, $\varphi \in A_{n-1}$. *Если для* $\lambda > 1$ *и* $\sigma > 0$

$$\varepsilon^{p-n} \cdot \int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \frac{dr}{\| K_p(x,f)\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)} \geqslant C_{x_0} \qquad (5.5)$$

для любого $0 < \varepsilon < \delta_0 \leqslant \frac{\operatorname{dist}(x_0, \partial D)}{\lambda^2}$, *где*

$$\| K_p\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r) = \left(\int\limits_{S(x_0,r)} [K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}\, d\mathcal{A} \right)^{\frac{p-n+1}{n-1}}. \qquad (5.6)$$

Тогда при $p \in \left(n, n+\frac{1}{n-2}\right)$ *имеем*

$$|f(x)-f(x_0)| \leqslant \nu_0 C_{x_0}^{-\frac{1}{p-n}}\,|x-x_0| \tag{5.7}$$

для всех $x \in B(x_0,\delta_0)$ *и* ν_0 *— положительная константа, зависящая только от размерности пространства* n, p *и* λ.

Теорема 5.3. *Пусть* D *и* D' *— области в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. *Предположим, что* $f : D \to D'$ *— гомеоморфизм с конечным искажением класса* $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$, $\varphi \in A_{n-1}$. *Если* $p \in \left(n, n+\frac{1}{n-2}\right)$ *и*

$$\left(\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int\limits_{S(x_0,r)}[K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}\;d\mathcal{A}\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}} \leqslant k_{x_0} \tag{5.8}$$

для п.в. $r \in \left(0, \frac{\mathrm{dist}\,(x_0,\partial D)}{e^2}\right)$, *то*

$$|f(x)-f(x_0)| \leqslant \nu_0\, k_{x_0}^{\frac{1}{p-n}}\,|x-x_0| \tag{5.9}$$

для всех $x \in B(x_0,\delta_0)$, *где* ν_0 *— положительная константа, зависящая только от размерности пространства* n *и* p.

Следствие 5.2. *Пусть* D *и* D' *— области в* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. *Предположим, что* $f : D \to D'$ *— гомеоморфизм с конечным искажением класса* $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$, $\varphi \in A_{n-1}$. *Если* $p \in \left(n, n+\frac{1}{n-2}\right)$ *и* $K_p(x,f) \leqslant K$ *для п.в.* $x \in D$, *то*

$$|f(x)-f(x_0)| \leqslant \nu_0\, K^{\frac{1}{p-n}}\,|x-x_0| \tag{5.10}$$

для каждого $x_0 \in D$ *и* $x \in B(x_0,\delta_0)$, $\delta_0 \leqslant \frac{\mathrm{dist}\,(x_0,\partial D)}{e^2}$, *где* ν_0 *— положительная константа, зависящая только от размерности пространства* n *и* p.

6. О логарифмической гельдеровости классов Орлича–Соболева

В этом разделе установлены оценки искажения расстояний логарифмического типа для отображений класса Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$ при условии типа Кальдерона на функцию φ.

Следующие теоремы вытекают из леммы 4.1 и соответствующих теорем параграфа 5 из работы [11].

Теорема 6.1. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. Предположим, что $f : D \to D'$ — гомеоморфизм с конечным искажением класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$, $\varphi \in A_{n-1}$. Если $\| K_p\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r) \neq \infty$ для п.в. $r \in (0, d_0)$, $d_0 = {\rm dist}(0, \partial D)$, $0 \leqslant \kappa < \frac{p}{p-n+1}$ и*

$$\int\limits_{R(x_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \frac{[K_p(x,f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}}\, dm(x)}{|x-x_0|^{\frac{p}{p-n+1}}} \leqslant C_{x_0}\, \ln^{\kappa}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right) \tag{6.1}$$

для любых $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < d_0$. Тогда при $p \in \left(n, n + \frac{1}{n-2}\right)$ имеем

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \lambda_0\, C^{\gamma}_{x_0}\, \ln^{-\theta} \frac{1}{|x-x_0|} \tag{6.2}$$

для всех $x \in B(x_0, \delta_0)$, где $\delta_0 \leqslant \min\{1, {\rm dist}^4\,(x_0, \partial D)\}$,

$$\gamma = \frac{n(p-n+1)}{(n-1)(p-n)}, \quad \theta = \frac{p-\kappa(p-n+1)}{(n-1)(p-n)}$$

и $\lambda_0 = \lambda(n, p, \kappa)$ — положительная постоянная, зависящая только от n, p и κ.

Следствие 6.1. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. Предположим, что $f : D \to D'$ — гомеоморфизм с конечным искажением класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$, $\varphi \in A_{n-1}$. Если $K_p(x, f) \in L_{\frac{n}{p-n}}(B(x_0, \delta_0)), \delta_0 \leqslant$ $\min\{1, {\rm dist}^4({\rm x}_0, \partial {\rm D})\}$ и $p \in \left(n, n + \frac{1}{n-2}\right)$, то*

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \nu_0 \|K_p(x,f)\|^{\frac{1}{p-n}}_{\frac{n}{p-n}}\, \ln^{-\frac{p}{n(p-n)}} \frac{1}{|x-x_0|} \tag{6.3}$$

для всех $x \in B(x_0, \delta_0)$, где

$$\|K_p(x,f)\|_{\frac{n}{p-n}} = \left(\int\limits_{B(x_0,\delta_0)} K_p^{\frac{n}{p-n}}(x,f)\, dm(x)\right)^{\frac{p-n}{n}} \tag{6.4}$$

— норма в пространстве $L_{\frac{n}{p-n}}(B(x_0, \delta_0))$ и ν_0 — положительная постоянная, зависящая только от n и p.

Теорема 6.2. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. Предположим, что $f : D \to D'$ — гомеоморфизм с конечным искажением класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$, $\varphi \in A_{n-1}$. Если $p \in \left(n, n+\frac{1}{n-2}\right)$ и $\|K_p\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r) \leqslant k_{x_0} r$ для п.в. $r \in (0, \delta_0)$, $\delta_0 \leqslant \min\{1, {\rm dist}^4\,(x_0, \partial D)\}$, то*

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \nu_0 \cdot k_{x_0}^{\frac{1}{p-n}}\, \ln^{-\frac{1}{p-n}} \frac{1}{|x - x_0|}\,, \tag{6.5}$$

для всех $x \in B(x_0, \delta_0)$, где ν_0 — положительная постоянная, зависящая только от n и p.

Литература

[1] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Moduli in Modern Mapping Theory, Springer Monographs in Mathematics*, Springer, New York etc., 2009, 367 p.

[2] B. Bojarski, V. Gutlyanskii, O. Martio, V. Ryazanov, *Infinitesimal Geometry of Quasiconformal and Bi-Lipschitz Mappings in the Plane* // EMS Tracts in Mathematics, **19**, EMS Publishing House, Zürich, 2013, 205 p.

[3] V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *The Beltrami Equation: A Geometric Approach*, Developments of Mathematics, **26**, Springer, New York etc., 2012, 301 p.

[4] В. В. Асеев, *Модули семейств локально квазисимметрических поврехностей* // Сиб. матем. журнал, **30** (1989), № 3, 9–15.

[5] С. К. Водопьянов, А. Д. Ухлов, *Операторы суперпозиции в пространствах Соболева* // Изв. вузов. Матем., **10** (2002), 11–33.

[6] В. М. Гольдштейн, Ю. Г. Решетняк, *Введение в теорию функций с обобщёнными производными и квазиконформные отображения*, Наука, Новосибирск, 1983.

[7] В. И. Кругликов, *Ёмкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем* // Матем. сборник, **130** (1986), № 2, 185–206.

[8] С. Л. Крушкаль, Р. Кюнау, *Квазиконформные отображения – новые методы и приложения*, Новосибирск: Наука, 1984.

[9] Д. Ковтонюк, В. Рязанов, *К теории нижних Q-гомеоморфизмов* // Укр. мат. вiсник, **5** (2008), № 2, 157–181.

[10] Ю. Г. Решетняк, *Пространственные отображения с ограниченным искажением*, Наука: Новосибирск, 1982.

[11] Р. Р. Салимов, *Нижние Q-гомеоморфизмы относительно p-модуля* // Укр. мат. вiсник, **12** (2015), № 4, 484–510.

[12] А. В. Сычев, *Модули и пространственные квазиконформные отображения*, Новосибирск: Наука, 1983.

[13] Б. В. Шабат, *Метод модулей в пространстве* // Докл. АН СССР, **130** (1960), 1210–1213.

[14] Б. В. Шабат, *К теории квазиконформных отображений в пространстве* // Докл. АН СССР, **132** (1960), 1045–1048.

[15] Cazacu C. Andreian, *Foundations of quasiconformal mappings. Handbook of complex analysis: geometric function theory*, Vol. 2, Elsevier, Amsterdam, 2005, 687–753.

[16] M. Cristea, *Dilatations of homeomorphisms satisfying some modular inequalities* // Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **56** (2011), No. 4, 275–282.

[17] M. Cristea, *Open discrete mapping having local ACL^n inverses* // Complex Var. Elliptic Equ., **55** (2010), No. 1–3, 61–90.

[18] A. Golberg, *Homeomorphisms with integrally restricted moduli. Complex analysis and dynamical systems IV. Part 1* // Contemp. Math., **553**, (2011), 83–98.

[19] A. Golberg, V. Gutlyanskii, *On Lipschitz continuity of quasiconformal mappings in space* // J. Anal. Math., **109** (2009), 233–251.

[20] F. W. Gehring, *Rings and quasiconformal mappings in space* // Trans. Amer. Math. Soc., **103** (1962), 353–393.

[21] F. W. Gehring, *Quasiconformal mappings in Complex Analysis and its Applications*, V. 2, International Atomic Energy Agency, Vienna, 1976.

[22] F. W. Gehring, *Lipschitz mappings and the p-capacity of ring in n-space* // Advances in the theory of Riemann surfaces (Proc. Conf. Stonybrook, N.Y., 1969), Ann. of Math. Studies, **66** (1971), 175–193.

[23] O. Lehto, K. Virtanen, *Quasiconformal Mappings in the Plane*, Springer–Verlag, New York, 1973.

[24] O. Martio, S. Rickman, J. Väisälä, *Definitions for quasiregular mappings* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math., **448** (1969), 1–40.

[25] J. Väisälä, *Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings*, Lecture Notes in Math., **229**, Springer–Verlag, Berlin, 1971.

[26] J. Väisälä, *Two new characterizations for quasiconformality* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math., **362** (1965), 1–12.

[27] T. Iwaniec, V. Sverák, *On mappings with integrable dilatation* // Proc. Amer. Math. Soc., **118** (1993), 181–188.

[28] T. Iwaniec, G. Martin, *Geometrical Function Theory and Non-Linear Analysis*, Clarendon Press, Oxford, 2001.

[29] М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий, *Выпуклые функции и пространства Орлича*, Гос. издат. физ.-мат. лит., Москва, 1958.

[30] В. Г. Мазья, *Пространства С.Л. Соболева*, ЛГУ, Ленинград, 1985, 416 с.

[31] Д. А. Ковтонюк, В. И. Рязанов, Р. Р. Салимов, Е. А. Севостьянов, *К теории классов Орлича–Соболева* // Алгебра и анализ, **25** (2013), No. 6, 50–102.

[32] D. Menchoff, *Sur les differencelles totales des fonctions univalentes* // Math. Ann., **105** (1931), 75–85.

[33] F. W. Gehring, O. Lehto, *On the total differentiability of functions of a complex variable* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math., **272** (1959), 3–8.

[34] Г. Федерер, *Геометрическая теория меры*, Наука, Москва, 1987, 760 с.

Сведения об авторах

Руслан Радикович Салимов

Институт математики НАН Украины

E-Mail: ruslan623@yandex.ru