Український математичний вісник
Том 12 **(2015)**, № 4, 511 – 538

О неравенстве типа Вяйсяля для угловой дилатации отображений и некоторых его приложениях

Евгений А. Севостьянов, Руслан Р. Салимов

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Аннотация. Для одного подвида отображений с конечным искажением $f : D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, допускающих наличие точек ветвления, установлено некоторое модульное неравенство, играющее существенную роль при исследовании различных проблем плоских и пространственных отображений. В качестве одного из приложений полученных результатов исследован вопрос об устранении изолированной особенности открытых дискретных отображений с конечным искажением длины.

2010 MSC. Primary 30C65; Secondary 30C62, 31A15, 32U20.

Ключевые слова и фразы. Отображения с ограниченным и конечным искажением, устранение изолированных особенностей, модули семейств кривых.

1. Введение

Настоящая статья посвящена изучению отображений с конечным искажением, активно изучаемых в последнее время (см., напр., [1–3, 5, 6, 8, 12] и [13]). Речь идёт, прежде всего, об отображениях с конечным искажением длины, являющихся некоторым подвидом отображений с конечным искажением и содержащим в себе класс отображений с ограниченным искажением по Решетняку (см. [15] и [16]). В данной работе устанавливается некоторый аналог результатов публикации [27], где для отображений с ограниченным искажением вначале было доказано ключевое модульное неравенство, а затем на его основе решён вопрос об устранении изолированной особенности отображений. Здесь та же проблема решена для отображений с конечным искажением длины, при этом, накладываемые условия относятся к

Статья поступила в редакцию 16.03.2014

ISSN 1810 – 3200.

специально подобранному дилатационному коэффициенту, имеющему локальный характер (что, в частности, обобщает результаты, опубликованные одним из авторов ранее, см. [21] и [22]). Отметим, что отображения с конечным искажением длины введены О. Мартио совместно с В. Рязановым, У. Сребро и Э. Якубовым ([13]) и представляют собой одно из обобщений отображений с ограниченным искажением по Решетняку (см. [15] и [16]). Отображения с конечным искажением длины могут быть определены как отображения, искажающие евклидово расстояние в конечное число раз в почти всех точках, а также обладающие N-свойством Лузина относительно меры Лебега в $\mathbb{R}^n$ и меры длины на кривых в прямую и обратную стороны (см. там же).

Опишем вкратце цель исследований настоящей статьи. Всюду далее D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, m — мера Лебега $\mathbb{R}^n$, $\operatorname{dist}(A, B)$ — евклидово расстояние между множествами $A, B \subset \mathbb{R}^n$, (x, y) обозначает (стандартное) скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$, $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$, $\mathbb{B}^n := B(0, 1)$, $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}$, $\mathbb{S}^{n-1} := S(0, 1)$, ω_{n-1} означает площадь сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$, Ω_n — объём единичного шара $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{R}^n$, $f'(x)$ обозначает матрицу Якоби отображения f в точки $x \in D$ её дифференцируемости, запись $f : D \to \mathbb{R}^n$ предполагает, что отображение f, заданное в области D, непрерывно. Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ называется *дискретным*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \mathbb{R}^n$ состоит из изолированных точек, и *открытым*, если образ любого открытого множества $U \subset D$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$. Будем говорить, что отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ обладает *N-свойством Лузина,* или просто N-свойством, если из условия $m(E) = 0$, $E \subset D$, следует, что $m(f(E)) = 0$. Аналогично, говорят, что отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ обладает *N^{-1}-свойством,* если из условия $m(E) = 0$, $E \subset \mathbb{R}^n$, следует, что $m\left(f^{-1}(E)\right) = 0$, где, как обычно, запись $f^{-1}(E)$ обозначает полный прообраз множества E при отображении f. Везде ниже мы подразумеваем, что отображение f сохраняет ориентацию, т.е., топологическая степень отображения $\mu(y, f, G) > 0$ для всех указанных выше y и G, если не оговорено противное. Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ – произвольное отображение и пусть существует область $G \subset D$, $\overline{G} \subset D$, такая, что $\overline{G} \cap f^{-1}(f(x)) = \{x\}$. Тогда величина $\mu\left(f(x), f, G\right)$, называемая *локальным топологическим индексом*, не зависит от выбора области G и обозначается символом $i(x, f)$. Напомним, что точка $x_0 \in D$ называется *точкой ветвления отображения* f, если ни в какой окрестности U точки x_0 сужение $f|_U$ не является гомеоморфизмом. Множество точек ветвления отображения f принято обозначать символом B_f. Очевидно, если $x_0 \in D \setminus B_f$ и f — сохраняющее ориентацию открытое дискретное отображение, то $i(x_0, f) = 1$.

Здесь и далее *кривой* γ мы называем непрерывное отображение отрезка $[a, b]$ (открытого интервала (a, b), либо полуоткрытого интервала $[a, b)$ или $(a, b]$) в $\mathbb{R}^n$, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Под семейством кривых Γ подразумевается некоторый фиксированный набор кривых γ, а $f(\Gamma) = \{f \circ \gamma | \gamma \in \Gamma\}$. Борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в $\mathbb{R}^n$, если соотношение

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x) \quad |dx| \geq 1 \tag{1.1}$$

выполнено для всех кривых $\gamma \in \Gamma$. В этом случае мы пишем: $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma$. *Модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm} \Gamma} \int\limits_{D} \rho^n(x) \quad dm(x)\,.$$

Свойства модуля в некоторой мере аналогичны свойствам меры Лебега m в $\mathbb{R}^n$. Именно, модуль пустого семейства кривых равен нулю, $M(\varnothing) = 0$, модуль обладает свойством монотонности относительно семейств кривых Γ_1 и $\Gamma_2 : \Gamma_1 \subset \Gamma_2 \Rightarrow M(\Gamma_1) \leq M(\Gamma_2)$, а также свойством полуаддитивности: $M\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Gamma_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} M(\Gamma_i)$ (см. [26, теорема 6.2]). Говорят, что семейство кривых Γ_1 *минорируется* семейством Γ_2, пишем $\Gamma_1 > \Gamma_2$, если для каждой кривой $\gamma \in \Gamma_1$ существует подкривая, которая принадлежит семейству Γ_2. В этом случае,

$$\Gamma_1 > \Gamma_2 \quad \Rightarrow \quad M(\Gamma_1) \leq M(\Gamma_2) \tag{1.2}$$

(см. [26, теорема 6.4, гл. I]). Говорят, что некоторое свойство выполнено для *почти всех (п.в.) кривых* области D, если оно имеет место для всех кривых, лежащих в D, кроме некоторого их семейства, модуль которого равен нулю. Пусть $\Delta \subset \mathbb{R}$ — открытый интервал числовой прямой, $\gamma : \Delta \to \mathbb{R}^n$ — локально спрямляемая кривая. В таком случае, очевидно, существует единственная неубывающая функция длины $l_\gamma : \Delta \to \Delta_\gamma \subset \mathbb{R}$ с условием $l_\gamma(t_0) = 0$, $t_0 \in \Delta$, такая что значение $l_\gamma(t)$ равно длине подкривой $\gamma\,|_{[t_0, t]}$ кривой γ, если $t > t_0$, и $-l\left(\gamma\,|_{[t,\,t_0]}\right)$, если $t < t_0$, $t \in \Delta$. Пусть $g : |\gamma| \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, где $|\gamma| = \gamma(\Delta) \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что кривая $\widetilde{\gamma} = g \circ \gamma$ также локально спрямляема. Тогда, очевидно, существует единственная неубывающая функция $L_{\gamma,\,g} : \Delta_\gamma \to \Delta_{\widetilde{\gamma}}$ такая, что $L_{\gamma,\,g}\left(l_\gamma\left(t\right)\right) = l_{\widetilde{\gamma}}\left(t\right)$ при всех $t \in \Delta$. Кривая $\gamma \in D$ называется *(полным) поднятием кривой* $\widetilde{\gamma} \in \mathbb{R}^n$ *при отображении* $f : D \to \mathbb{R}^n$, если $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$.

Говорят, что отображение $f: D \to \mathbb{R}^n$ принадлежит классу ACP в области D, пишем $f \in ACP$, если, для почти всех кривых γ в области D, кривая $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$ локально спрямляема и функция длины $L_{\gamma, f}$, введённая выше, абсолютно непрерывна на всех замкнутых интервалах, лежащих в Δ_γ, для почти всех кривых γ в D. Предположим, что $f: D \to \mathbb{R}^n$ — дискретное отображение, тогда может быть определена функция $L^{-1}_{\gamma, f}$. В таком случае, будем говорить, что f обладает *свойством* ACP^{-1} в области D, пишем $f \in ACP^{-1}$, если для почти всех кривых $\widetilde{\gamma} \in f(D)$ каждое поднятие γ при отображении f, $f \circ \gamma = \widetilde{\gamma}$, является локально спрямляемой кривой и, кроме того, обратная функция $L^{-1}_{\gamma, f}$ абсолютно непрерывна на всех замкнутых интервалах, лежащих в $\Delta_{\widetilde{\gamma}}$, для почти всех кривых $\widetilde{\gamma}$ в $f(D)$ и каждого поднятия γ кривой $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$.

Пусть $f: D \to \mathbb{R}^n$ дискретное отображение, тогда f будем называть *отображением с конечным искажением длины,* пишем $f \in FLD$, если f дифференцируемо почти всюду в D, f обладает N и N^{-1}–свойствами, и, кроме того, $f \in ACP \cap ACP^{-1}$.

Здесь и далее *внутренняя дилатация* $K_I(x, f)$ отображения f в точке x определяется при $J(x, f) \neq 0$ отношением

$$K_I(x, f) \quad = \quad \frac{|J(x, f)|}{l\,(f'(x))^n}\,, \tag{1.3}$$

где $J(x, f) = \det f'(x)$ обозначает якобиан отображения f в точке x, а $l\,(f'(x)) := \min\limits_{|h|=1} |f'(x)h|$. Полагаем $K_I(x, f) = 1$, если $f'(x) = 0$, и $K_I(x, f) = \infty$.

В дальнейшем для кривых $\alpha: J \to \mathbb{R}^n$ и $\beta: I \to \mathbb{R}^n$ и отрезков $J \subset I \subset \mathbb{R}$ запись $\alpha \subset \beta$ означает, что $\beta|_J = \alpha$, т.е., что кривая α является подкривой кривой β. Пусть $f: D \to \mathbb{R}^n$ — отображение с ограниченным искажением (см. [15] и [16]), Γ — семейство кривых в D, Γ' — семейство кривых в $\mathbb{R}^n$ и m — натуральное число, такое что выполнено следующее условие. Для каждой кривой $\beta \in \Gamma'$ найдутся кривые $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ семейства Γ такие что $f \circ \alpha_j \subset \beta$ для всех j и равенство $\alpha_j(t) = x$ имеет место при всех $x \in D$, всех t и не более чем $i(x, f)$ индексах j (где $i(x, f)$ — локальный топологический индекс отображения f в точке x). Тогда

$$M(\Gamma') \quad \leq \quad \frac{1}{m} \cdot M(\Gamma) \tag{1.4}$$

(см. [27, теорема 3.1] либо [16, разд. 9, гл. II]). Неравенство (1.4) установлено Ю. Вяйсяля в [27] и играет существенную роль в исследовании проблемы об изолированной особенности, а также теории распределения значений (см. [27] и [16]). Одним из авторов данной работы был установлен некоторый аналог неравенства типа (1.4) для отображений с конечным искажением длины (см. [21]), а именно, было показано, что для открытых дискретных отображений $f: D \to \mathbb{R}^n$ с конечным искажением длины вместо неравенства (1.4) имеет место соотношение

$$M(\Gamma') \quad \leq \quad \frac{1}{m} \quad \int\limits_{D} K_I(x,\, f) \cdot \rho^n(x)\, dm(x)\,, \tag{1.5}$$

выполненное для любого семейства Γ путей γ в D и для каждой $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma$.

Отметим, что в ряде важных для приложений случаев неравенство (1.5) может оказаться несколько грубым, поскольку для исследования отдельных вопросов возможно использование лишь локальных ограничений в окрестности заданной точки, а не оценок, задействующих всевозможные семейства кривых (и являющихся, таким образом, ограничениями глобального характера). Соответствующие примеры, построенные в заключительной части работы, указывают на упомянутые отличия.

Настоящая работа, прежде всего, посвящена установлению некоторых локальных оценок, аналогичных (1.5). Уточнение (1.5), которое будет здесь проделано, касается двух отдельных "направлений": с одной стороны, вместо произвольных семейств кривых в (1.5) будут рассматриваться лишь кривые, соединяющие обкладки сферического кольца с центром в данной точке; с другой стороны, вместо величины $K_I(x, f)$ будет участвовать другая величина, не превосходящая $K_I(x, f)$ и также имеющая локальный характер (зависит от конкретной точки x_0, в окрестности которой и рассматривается основное неравенство (1.5)).

Для этой цели рассмотрим также следующие определения и обозначения. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$, тогда для отображения $f: D \to \mathbb{R}^n$ полагаем в точке дифференцируемости $x \in D$

$$l_f(x, x_0) = \min_{|h|=1} \frac{|\partial_h f(x)|}{\left|\left(h,\, \frac{x-x_0}{|x-x_0|}\right)\right|}\,,$$

где $\partial_h f(x) = \lim\limits_{t\to+0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t}$ — производная по направлению h отображения f в точке x. Введём в рассмотрение следующую величину, называемую *угловой дилатацией в точке x по отношению к точке $x_0 \in D$*, полагая в точке x дифференцируемости и невырожденности отображения f

$$D_f(x, x_0) = \frac{|J(x, f)|}{l_f^n(x, x_0)}\,. \tag{1.6}$$

При этом, величину $D_f(x,x_0)$ полагаем равной единице в точках x, где $f'(x)=0$ и бесконечности, если $J(x,f)=0$, но, в то же время, $J(x,f)\neq 0$. Отметим, что $D_f(x,x_0)\le K_I(x,f)$ во всех точках x, так как $\frac{1}{l_f(x,x_0)}\le\frac{1}{l(f'(x))}$.

Обозначим $A(r_1,r_2,x_0)=\{x\in\mathbb{R}^n: r_1<|x-x_0|<r_2\}$ при произвольных $0<r_1<r_2<\infty$. Далее символ $\Gamma(E,F,D)$ означает семейство всех кривых $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, которые соединяют E и F в D, т.е. $\gamma(a)\in E$, $\gamma(b)\in F$ и $\gamma(t)\in D$ при $t\in(a,b)$. Одним из наиболее важных результатов настоящей работы является следующее утверждение, установленное в частном случае $m=1$ для гомеоморфизмов класса Соболева $f\in W^{1,2}_{loc}$, $f^{-1}\in W^{1,2}_{loc}$ при $n=2$ в работе [18, теорема 2.17] и для квазиконформных отображений при $n\ge 2$ в работе [5, Лемма 2.4].

Теорема 1.1. *Пусть $f: D\to\mathbb{R}^n$ — открытое дискретное дифференцируемое почти всюду отображение, обладающее N, N^{-1} и ACP^{-1}-свойствами, $x_0\in D$, $A(r_1,r_2,x_0)\subset D$, Γ' — некоторое семейство кривых в $\mathbb{R}^n$ и m — натуральное число, такое что выполнено следующее условие. Для каждой кривой $\beta\in\Gamma'$ найдутся кривые $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ семейства $\Gamma(S(x_0,r_1),S(x_0,r_2),A(r_1,r_2,x_0))$ такие что $f\circ\alpha_j\subset\beta$ для всех j и равенство $\alpha_j(t)=x$ имеет место при всех $x\in D$, всех t и не более чем $i(x,f)$ индексах j. Тогда*

$$M(\Gamma')\quad\le\quad\frac{1}{m}\quad\int\limits_D D_f(x,x_0)\cdot\rho^n(x)\,dm(x) \tag{1.7}$$

для каждой неотрицательной измеримой по Лебегу функции $\rho:[r_1,r_2]\to\mathbb{R}$ такой, что $\int\limits_{r_1}^{r_2}\rho(r)dr\ge 1$.

Следствие 1.1. *Заключение теоремы 1.1 выполнено, если отображение f в условиях этой теоремы является отображением с конечным искажением длины.*

Всюду далее $q_{x_0}(r)$ означает среднее интегральное значение $Q(x)$ над сферой $S(x_0,r)$,

$$q_{x_0}(r):=\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int\limits_{S(x_0,r)}Q(x)\,d\mathcal{H}^{n-1}\,, \tag{1.8}$$

где $\mathcal{H}^{n-1}$ — $(n-1)$-мерная мера Хаусдорфа. Будем говорить, что функция $\varphi: D\to\mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $x_0\in D$, пишем $\varphi\in FMO(x_0)$, если $\limsup\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\Omega_n\cdot\varepsilon^n}\int\limits_{B(x_0,\varepsilon)}|\varphi(x)-\overline{\varphi}_\varepsilon|\,dm(x)<\infty$, где $\overline{\varphi}_{\varepsilon} = \frac{1}{\Omega_n \cdot \varepsilon^n} \int\limits_{B(x_0,\,\varepsilon)} \varphi(x)\, dm(x)$. Функции с конечным средним колебанием введены А. Игнатьевым и В. Рязановым в работе [9], см. также [12, разд. 11.2], и представляют собой обобщение функций BMO, ограниченного среднего колебания по Ф. Джону – Л. Ниренбергу [10]. Напомним, что изолированная точка x_0 границы ∂D области D называется *устранимой* для отображения f, если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Если $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$, точку x_0 будем называть *полюсом.* Изолированная точка x_0 границы ∂D называется *существенно особой точкой* отображения $f : D \to \mathbb{R}^n$, если при $x \to x_0$ нет ни конечного, ни бесконечного предела. В качестве приложений теоремы 1.1, приведём следующие результаты.

Теорема 1.2. *Пусть $b \in D$ и $f : D \setminus \{b\} \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное дифференцируемое почти всюду отображение, $f \in ACP^{-1}$, обладающее N и N^{-1}-свойствами Лузина. Предположим, что существует некоторое число $\delta > 0$, такое, что при всех $x \in B(b,\delta)$ имеет место неравенство*

$$|f(x)| \le C\left(\log\frac{1}{|x-b|}\right)^p\,, \tag{1.9}$$

где $p > 0$ и $C > 0$ — некоторые постоянные. Пусть, кроме того, существует измеримая по Лебегу функция $Q : D \to [1,\infty]$, такая, что $D_f(x,b) \le Q(x)$ при почти всех $x \in D$ и $Q(x) \in FMO(b)$. Тогда точка b является для отображения f либо полюсом, либо устранимой особой точкой. Кроме того, найдётся постоянная β_n, зависящая только от размерности пространства n и функции Q такая, что, как только вместо условия (1.9) имеет место более сильное предположение:

$$\lim\limits_{x\to b}\frac{|f(x)|}{\left(\log\frac{1}{|x-b|}\right)^{\beta_n}} = 0\,, \tag{1.10}$$

то точка $x = b$ является устранимой для отображения f.

Теорема 1.3. *Пусть $b \in D$ и $f : D \setminus \{b\} \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное дифференцируемое почти всюду отображение, $f \in ACP^{-1}$, обладающее N и N^{-1}-свойствами Лузина, а $Q : D \to [0,\infty]$ — некоторая локально интегрируемая по Лебегу функция такая, что $D_f(x,b) \le Q(x)$ при почти всех $x \in D \setminus \{b\}$. Предположим, что существуют некоторые числа δ, C, $p > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 < \operatorname{dist}(b,\partial D)$,* *такие, что при всех* $x \in B(b,\delta)\setminus\{b\}$ *имеет место неравенство*

$$|f(x)| \le C\cdot\exp\left\{p\int\limits_{|x-b|}^{\varepsilon_0}\frac{dt}{tq_b^{1/(n-1)}(t)}\right\}. \qquad (1.11)$$

Пусть, кроме того, $\int\limits_0^{\varepsilon_0}\frac{dt}{tq_b^{1/(n-1)}(t)}=\infty$ *и* $\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\frac{dt}{tq_b^{1/(n-1)}(t)}<\infty$ *при достаточно малых* ε. *Тогда точка* b *является для отображения* f *либо полюсом, либо устранимой особой точкой. Если вместо условия (1.11) имеет место более сильное предположение*

$$\lim_{x\to b}|f(x)|\cdot\exp\left\{-\int\limits_{|x-b|}^{\varepsilon_0}\frac{dt}{tq_b^{1/(n-1)}(t)}\right\}=0\,,$$

то точка $x=b$ *является для отображения* f *устранимой особой точкой.*

Следствие 1.2. *Заключения теорем 1.2 и 1.3 остаются выполненными, если* f *– отображение с конечным искажением длины.*

2. Доказательство неравенства типа Вяйсяля

Пусть E – множество в $\mathbb{R}^n$ и $\gamma:\Delta\to\mathbb{R}^n$ – некоторая кривая. Обозначим $\gamma\cap E=\gamma(\Delta)\cap E$. Пусть кривая γ локально спрямляема и функция длины $l_\gamma(t)$ такова, как было определено в предыдущем разделе. Полагаем $l(\gamma\cap E):=m_1(E_\gamma)$, $\quad E_\gamma=l_\gamma\left(\gamma^{-1}(E)\right)$. Здесь, как обычно, $m_1(A)$ обозначает длину (линейную меру Лебега) множества $A\subset\mathbb{R}$. Заметим, что $E_\gamma=\gamma_0^{-1}(E)$, где $\gamma_0:\Delta_\gamma\to\mathbb{R}^n$ — натуральная параметризация кривой γ, и что $l(\gamma\cap E)=\int\limits_\gamma \chi_E(x)\,|dx|=\int\limits_{\Delta_\gamma}\chi_{E_\gamma}(s)\,dm_1(s)$, см. [26, разд. 4, с. 8]. Следующее утверждение связывает свойства функции длины локально спрямляемой кривой со свойствами произвольного измеримого множества в $\mathbb{R}^n$ (см. [12, теорема 9.1]).

Предложение 2.1. *Пусть* E *— множество в области* $D\subset\mathbb{R}^n$, $n\ge 2$. *Тогда множество* E *измеримо тогда и только тогда, когда множество* $\gamma\cap E$ *измеримо для почти всех кривых* γ *в* D. *Более того,* $m(E)=0$ *тогда и только тогда, когда* $l(\gamma\cap E)=0$ *для почти всех кривых* γ *в* D.

Весьма полезным для дальнейшего исследования является следующее замечание.

Замечание 2.1. Пусть $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ спрямляемая кривая и велчина $S(\gamma, [a,t])$ обозначает длину кривой $\gamma|_{[a,t]}$. Заметим, что свойства функции $L_{\gamma,f}$ между натуральными параметрами $l_\gamma(t)$ и $l_{\widetilde{\gamma}}(t)$ (локально спрямляемых) кривых γ и $\widetilde{\gamma}$ таких, что $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$, не зависят от выбора $t_0 \in (a,b)$. В случае замкнутой кривой γ мы будем считать, что $t_0 = a$, поскольку при заданном $t_0 \in (a,b)$ выполнено равенство $S(\gamma, [a,t]) = S(\gamma, [a,t_0]) + l_\gamma(t)$. Пусть $I = [a,b]$. Для спрямляемой кривой $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ определим функцию длины $l_\gamma(t)$ по следующему правилу: $l_\gamma(t) = S\left(\gamma, [a,t]\right)$. В дальнейшем для замкнутых кривых мы отождествляем функции $l_\gamma(t)$ и $S\left(\gamma, [a,t]\right)$, если не оговорено противное.

Пусть $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ — спрямляемая замкнутая кривая в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $l(\alpha)$ — её длина. *Нормальным представлением кривой* α называется кривая $\alpha^0 : [0, l(\alpha)] \to \mathbb{R}^n$, такая что $\alpha(t) = \alpha^0\left(S\left(\alpha, [a,t]\right)\right) = \alpha^0 \circ l_\alpha(t)$. Отметим, что такая кривая α^0 существует и единственна, при этом, $S\left(\alpha^0, [0,t]\right) = t$ при $t \in [0, l(\alpha)]$, см. [26, теорема 2.4].

Далее I означает открытый, замкнутый или полуоткрытый конечный интервал числовой оси. Следующее определение может быть найдено в [16, п. 5, гл. II].

Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$ — дискретное отображение, $\beta : I_0 \to \mathbb{R}^n$ замкнутая спрямляемая кривая и $\alpha : I \to D$ кривая такая, что $f \circ \alpha \subset \beta$. Если функция длины $l_\beta : I_0 \to [0, l(\beta)]$ постоянна на некотором интервале $J \subset I$, то β постоянна на J и, в силу дискретности f, кривая α также постоянна на J. Следовательно, существует единственная кривая $\alpha^* : l_\beta(I) \to D$ такая, что $\alpha = \alpha^* \circ (l_\beta|_I)$. Будем говорить, что α^* является *f-представлением кривой α относительно β.*

Следующее утверждение содержит в себе критерий выполнения свойства ACP^{-1} относительно произвольного отображения f в терминах абсолютной непрерывности соответствующих кривых.

Лемма 2.1. *Слабо нульмерное отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ обладает ACP^{-1}-свойством тогда и только тогда, когда кривая γ^* является спрямляемой и абсолютно непрерывной для почти всех замкнутых кривых $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$.*

Тут и далее γ^* означает f-представление кривой γ по отношению к $\widetilde{\gamma}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть f обладает ACP_p^{-1}-свойством. Тогда, во-первых, $L_{\gamma,f}^{-1}$ определена корректно для почти всех кривых $\widetilde{\gamma}$ таких, что $\widetilde{\gamma}=f\circ\gamma$. Во-вторых, кривая γ^* является спрямляемой для p-почти всех замкнутых кривых $\widetilde{\gamma}$ как только $\widetilde{\gamma}=f\circ\gamma$, поскольку $(\gamma^*)^0=\gamma^0$ (см. в [26, теорема 2.6]). Кроме того, для почти всех замкнутых кривых $\widetilde{\gamma}$ и всех γ, таких что $\widetilde{\gamma}=f\circ\gamma$, мы получаем равенство $\gamma(t)=\gamma^*\circ l_{\widetilde{\gamma}}(t)=\gamma^0\circ l_{\gamma}(t)=\gamma^0\circ L^{-1}_{\gamma,f}\left(l_{\widetilde{\gamma}}(t)\right)$. Полагая $l_{\widetilde{\gamma}}(t):=s$, мы получаем

$$\gamma^*(s)=\gamma^0\circ L^{-1}_{\gamma,f}(s)\,. \tag{2.1}$$

Таким образом, кривая γ^* абсолютно непрерывна, поскольку $L^{-1}_{\gamma,f}(s)$ абсолютно непрерывна и $|\gamma^0(t_1)-\gamma^0(t_2)|\le|t_1-t_2|$ для всех $t_1,t_2\in[0,l(\gamma)]$).

Достаточность. Согласно предположению, кривая γ^* спрямляема для почти всех замкнутых кривых $\widetilde{\gamma}=f\circ\gamma$; в частности, $\gamma^{*0}=\gamma^0$. Более того, для таких кривых $l_{\gamma^*}(s)=L^{-1}_{\gamma,f}(s)$ и функция $L^{-1}_{\gamma,f}$ определена корректно. Следовательно, для почти всех замкнутых кривых $\widetilde{\gamma}$ и всех γ таких, что $\widetilde{\gamma}=f\circ\gamma$, кривая γ спрямляема и функция $L^{-1}_{\gamma,f}(s)$ абсолютно неперервна (см. в [26, теорема 1.3]). Пусть Γ_1 — семейство всех замкнутых кривых $\widetilde{\alpha}=f\circ\alpha$ в области $f(D)$ таких, что кривая α^* либо не спрямляема, либо функция $L^{-1}_{\alpha,f}(s)$ не абсолютно непрерывна. Пусть Γ — семейство всех кривых $\widetilde{\gamma}=f\circ\gamma$ в области $f(D)$, таких что γ либо не локально спрямляема, либо функция $L^{-1}_{\gamma,f}(s)$ не локально абсолютно непрерывна. Тогда $\Gamma>\Gamma_1$ и, следовательно, ввиду свойства (1.2), $M(\Gamma)\le M(\Gamma_1)=0$, что и требовалось доказать. □

Следующий результат доказан в монографии [12, разд. 8, леммы 8.2 и 8.3] (см. также [13, следствие 3.14 и лемма 3.20]).

Предложение 2.2. *Пусть отображение $f:D\to\mathbb{R}^n$ почти всюду дифференцируемо и обладает N и N^{-1}-свойствами Лузина. Тогда найдётся не более чем счётная последовательность компактных множеств $C_k^*\subset D$, такая что $m(B)=0$, где $B=D\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}C_k^*$ и $f|_{C_k^*}$ взаимно однозначно и билипшицево для каждого $k=1,2,\ldots$. Более того, f дифференцируемо при всех $x\in C_k^*$ и выполнено условие $J(x,f)\ne0$.*

Доказательство теоремы 1.1. Заметим, прежде всего, что мера Лебега множества точек ветвления отображения f равна нулю, $m(B_f)=0$ (см., напр., [12, предложение 8.4]). Пусть множества B и C_k^* таковы, как указано в предложении 2.2. Полагаем $B_0=B\cup B_f$, $B_1=C_1^*\setminus B_f$,

$B_2 = C_2^* \setminus B_1 \dots , B_k = C_k^* \setminus \left(\bigcup\limits_{l=1}^{k-1} B_l \cup B_f\right)$. Таким образом, мы получим не более, чем счётное покрытие области D борелевскими множествами B_k, $k = 0, 1, \dots$, причём $B_l \cap B_j = \varnothing$ при $l \neq j$ и $m(B_0) = 0$, где $B_0 = D \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$. Поскольку отображение f обладает N-свойством, получаем $m(f(B_0)) = 0$. По предложению 2.1 $l\,(\overline{\gamma} \cap f(B_0)) = 0$ для п.в. кривых $\overline{\gamma}$ в области $f(D)$. Следовательно, $\widetilde{\gamma}^0(s) \notin f(B_0)$ для почти всех замкнутых кривых $\widetilde{\gamma}$ в области $f(D)$ и почти всех $s \in [0, l(\widetilde{\gamma})]$; здесь $\widetilde{\gamma}^0(s)$ обозначает нормальное представление кривой $\widetilde{\gamma}(s)$. Кроме того, по лемме 2.1 кривая γ^*, являющаяся f-представлением кривой γ, абсолютно непрерывна для почти всех замкнутых кривых $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$. Здесь f-представление γ^* кривой γ корректно определено для почти всех кривых $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$, поскольку по предположению f – дискретное отображение.

Учитывая, что модуль семейства неспрямляемых кривых равен нулю (см. [26, следствие 6.11]), а также то, что каждая спрямляемая кривая $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ ($\gamma : [a, b) \to \mathbb{R}^n$ или $\gamma : (a, b] \to \mathbb{R}^n$) может быть продолжена непрерывным образом до соответствующей замкнутой кривой $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ (см. [26, теорема 3.2]), мы можем считать, что Γ' состоит только из замкнутых спрямляемых кривых.

Пусть $\rho : [r_1, r_2] \to \mathbb{R}$ — неотрицательная измеримая по Лебегу функция такая, что $\int\limits_{r_1}^{r_2} \rho(r)dr \geq 1$. Полагаем

$$\rho^*(x) = \begin{cases} \rho(|x - x_0|) \left(\frac{D_f(x,x_0)}{J(x,f)}\right)^{1/n}, & x \in A(r_1, r_2, x_0) \setminus B_0, \\ 0, & x \in B_0\,. \end{cases}$$

Рассмотрим следующую функцию:

$$\widetilde{\rho}(y) \quad = \quad \frac{1}{m} \cdot \chi_{f(D \setminus B_0)}(y) \sup\limits_{C} \sum\limits_{x \in C} \rho^*(x)\,, \tag{2.2}$$

где C пробегает все подмножества $f^{-1}(y)$ в $D \setminus B_0$, количество элементов которых не больше m. Заметим, что

$$\widetilde{\rho}(y) \quad = \quad \frac{1}{m} \cdot \sup \sum\limits_{i=1}^{s} \rho_{k_i}(y)\,, \tag{2.3}$$

где sup в (2.3) берётся по всем возможным наборам $\{k_{i_1}, \dots, k_{i_s}\}$ таким, что $i \in \mathbb{N}$, $k_i \in \mathbb{N}$, $k_i \neq k_j$ при $i \neq j$, всех $s \leq m$ и

$$\rho_k(y) = \begin{cases} \rho^*\left(f_k^{-1}(y)\right), & y \in f(B_k), \\ 0, & y \notin f(B_k)\,, \end{cases}$$

а каждое из отображений $f_k = f|_{B_k}$, $k = 1, 2, \ldots$, инъективно. Из (2.3) следует, что функция $\widetilde{\rho}(y)$ является борелевской, поскольку множества $f(B_k)$ борелевские, см. [4, разд. 2.3.2]. Пусть β — произвольная кривая семейства Γ'.

По условию найдутся кривые $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ семейства Γ, такие, что $f \circ \alpha_j \subset \beta$ для всех $j = 1, 2, \ldots, m$, и при каждом фиксированном $x \in D$ и $t \in I$ равенство $\alpha_j(t) = x$ справедливо не более, чем при $i(x, f)$ индексах j.

Покажем, что функция $\widetilde{\rho} \in \operatorname{adm} \Gamma' \setminus \Gamma_0$, где $M(\Gamma_0) = 0$. Пусть β – кривая семейства Γ' и $\beta^0 : [0, l(\beta)] \to \mathbb{R}^n$ — нормальное представление кривой β, $\beta(t) = \beta^0 \circ l_\beta(t)$. Обозначим символами $\alpha_j^*(s) : I_j \to D$ соответствующие f-представления кривых α_j относительно кривой β, т.е. $\alpha_j(t) = \alpha_j^* \circ l_\beta(t)$, $t \in I_j$, $f \circ \alpha_j^* \subset \beta^0$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Обозначим

$$h_j(s) = \rho^* \left(\alpha_j^*(s)\right) \chi_{I_j}(s) \,, \quad s \in [0, l(\beta)] \,, \quad J_s := \{j : s \in I_j\} \,.$$

Поскольку по предположению $\beta^0(s) \notin f(B_0)$ при почти всех $s \in [0, l(\beta)]$, при этих же s точки $\alpha_j^*(s) \in f^{-1}(\beta^0(s))$, $j \in J_s$, являются различными ввиду условия теоремы, что равенство $\alpha_j(t) = x$ возможно не более, чем при $i(x, f)$ индексах j, а $i(x, f) = 1$ на каждом B_k по построению. Тогда, по определению функции $\widetilde{\rho}$ в (2.2), при почти всех $s \in [0, l(\beta)]$

$$\widetilde{\rho}(\beta^0(s)) \geq \frac{1}{m} \cdot \sum_{j=1}^{m} h_j(s) \,. \tag{2.4}$$

Из соотношения (2.4) получаем

$$\int_\beta \widetilde{\rho}(y)\, |dy| = \int_0^{l(\beta)} \widetilde{\rho}(\beta^0(s))\, ds$$

$$\geq \frac{1}{m} \cdot \sum_{j=1}^{m} \int_0^{l(\beta)} h_j(s) ds = \frac{1}{m} \cdot \sum_{j=1}^{m} \int_{I_j} \rho^* \left(\alpha_j^*(s)\right) dm_1(s) \,. \tag{2.5}$$

Осталось показать, что

$$\int_{I_j} \rho^* \left(\alpha_j^*(s)\right) dm_1(s) \geq 1 \tag{2.6}$$

для почти всех кривых $\beta \in \Gamma'$. Если $\int\limits_{I_j} \rho^* \left(\alpha_j^*(s)\right) dm_1(s) = \infty$, доказывать нечего. Пусть $\int\limits_{I_j} \rho^*\left(\alpha_j^*(s)\right) dm_1(s) < \infty$. Заметим, что

$$\rho^*\left(\alpha_j^*(s)\right) = \frac{\rho(|\alpha_j^*(s) - x_0|)}{\left|\frac{dr_j}{ds}(s_*)\right|}\left(\frac{D_f(\alpha_j^*(s), x_0)}{J(\alpha_j^*(s), f)}\right)^{1/n} \cdot \left|\frac{dr_j}{ds}(s_*)\right|, \qquad (2.7)$$

где $r_j(s_*) := |\alpha_j^0(s_*) - x_0|$ и $\left|\frac{dr_j}{ds}(s_*)\right| \neq 0$. Используя равенство вида (2.1), мы получим, что $\alpha_j^*(s) = \alpha_j^0 \circ L_{\alpha_j,f}^{-1}(s) = \alpha_j^0(s_*)$, где $s_* = L_{\alpha_j,f}^{-1}(s)$, откуда также $s = L_{\alpha_j,f}(s_*)$. Заметим, что для почти всех кривых $\beta \in \Gamma'$ функция $s = L_{\alpha_j,f}(s_*)$ обладает N^{-1}-свойством ввиду того, что $f \in ACP^{-1}$ (см., напр., [4, теорема 2.10.13]); значит, ввиду известной теоремы Пономарёва $\frac{ds}{ds_*}(s_*) \neq 0$ для почти всех $s_* \in [0, l(\alpha_j)]$ (см. [14, теорема 1]). Тогда по теореме о дифференцируемости сложной функции при почти всех $s_* \in [0, l(\alpha_j)]$

$$\left|\frac{dr_j}{ds}(s_*)\right| = \frac{\left|\frac{dr_j}{ds_*}\right|}{\left|\frac{ds}{ds_*}\right|}. \qquad (2.8)$$

Путём прямых вычислений, нетрудно показать, что

$$\left|\frac{dr_j}{ds_*}\right| = \left|\left(\alpha_j^{0\prime}(s_*), \frac{\alpha_j^0(s_*) - x_0}{|\alpha_j^0(s_*) - x_0|}\right)\right|$$

(отметим, что кривая $\alpha_j^0(s_*)$ дифференцируема при почти всех $s_* \in (0, l(\alpha_j)))$. С другой стороны, имеем для почти всех s_*, что

$$\beta'(s_*) = f'(\alpha_j^0(s_*))\alpha_j^{0\prime}(s_*) = \partial_{\alpha_j^{0\prime}(s_*)} f(\alpha_j^0(s_*))$$

и, в то же время,

$$\frac{ds}{ds_*} = L'_{\alpha_j,f}(s_*) = |\beta'(s_*)|$$

(по поводу последнего равенства см., напр., [26, пункт (5), теорема 1.3]). Таким образом, из (2.8) вытекает, что

$$\left|\frac{dr_j}{ds}(s_*)\right| = \frac{\left|\left(\alpha_j^{0\prime}(s_*), \frac{\alpha_j^0(s_*) - x_0}{|\alpha_j^0(s_*) - x_0|}\right)\right|}{|\partial_{\alpha_j^{0\prime}(s_*)} f(\alpha_j^0(s_*))|} \leq \frac{1}{l_f(\alpha_j^0(s_*), x_0)}. \qquad (2.9)$$

Таким образом, из (2.7) и (2.9) вытекает, что

$$\begin{aligned}\rho^*\left(\alpha_j^*(s)\right) &\geq \frac{\rho(|\alpha_j^*(s) - x_0|)}{l_f(\alpha_j^*(s), x_0)} \cdot l_f(\alpha_j^*(s), x_0) \cdot \left|\frac{dr_j}{ds}(s_*)\right| \\ &= \rho(r_j(s_*(s))) \cdot \left|\frac{dr_j}{ds}(s_*(s))\right|.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\rho^*\left(\alpha_j^*(s)\right) \geq \rho(r_j(s_*(s))) \cdot \left|\frac{dr_j}{ds}(s_*(s))\right|$$

всюду, где $\frac{dr_j}{ds}(s_*) \neq 0$, и тем более, в точках, где $\frac{dr_j}{ds}(s_*) = 0$. Тогда

$$\int\limits_{I_j} \rho^*\left(\alpha_j^*(s)\right) dm_1(s) \geq \int\limits_{I_j} \rho(r_j(s_*(s))) \cdot \left|\frac{dr_j}{ds}(s_*(s))\right| dm_1(s)\,. \qquad (2.10)$$

Заметим, что функция r_j абсолютно непрерывна относительно параметра s_* для почти всех кривых $\beta \in \Gamma'$. Поскольку по предположению $\int\limits_{I_j} \rho^*\left(\alpha_j^*(s)\right) dm_1(s) < \infty$ ввиду замены переменных относительно линейной меры в интеграле Лебега (см. [4, теорема 3.2.6]), из (2.10) вытекает, что

$$\int\limits_{I_j} \rho^*\left(\alpha_j^*(s)\right) dm_1(s)$$

$$\geq \int\limits_{I_j} \rho(r_j(s_*(s))) \cdot \frac{dr_j}{ds}(s_*(s)) dm_1(s) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \rho(r) dr \geq 1\,,$$

что и требовалось установить. Следовательно, из (2.5) и (2.6) вытекает, что функция $\widetilde{\rho} \in \ \mathrm{adm}\, \Gamma' \setminus \Gamma_0$, где $M(\Gamma_0) = 0$ и, значит,

$$M\left(\Gamma'\right) \quad \leq \quad \int\limits_{f(A)} \widetilde{\rho}^{\,n}(y)\ dm(y)\,. \qquad (2.11)$$

Согласно [4, теорема 3.2.5] для $m = n$, получаем, что

$$\int\limits_{B_k} D_f(x, x_0) \cdot \rho^n(|x - x_0|)\ dm(x) \quad = \quad \int\limits_{f(A)} \rho_k^n(y)\, dm(y)\,. \qquad (2.12)$$

Заметим также, что по неравенству Гёльдера для сумм

$$\left(\frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{s} \rho_{k_i}(y)\right)^n \quad \leq \quad \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{s} \rho_{k_i}^n(y) \qquad (2.13)$$

для произвольного $1 \leq s \leq m$ и любого набора $\{k_1, \ldots, k_s\}$ длины s, $1 \leq i \leq s$, $k_i \in \mathbb{N}$, $k_i \neq k_j$, если $i \neq j$. Тогда по теореме об аддитивности интеграла Лебега, см., напр., [19, теорема 12.3, § 12, разд. I], из (2.11), (2.12) и (2.13) получаем, что

$$\frac{1}{m}\cdot\int\limits_{D} D_f(x,\,x_0)\cdot\rho^n(|x-x_0|)\;dm(x) \quad = \quad \frac{1}{m}\cdot\int\limits_{f(A)}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\rho_k^n(y)\,dm(y)$$

$$\geq \quad \frac{1}{m}\cdot\int\limits_{f(A)}\sup\limits_{\substack{\{k_1,\ldots,k_s\},\,k_i\in\mathbb{N},\\ k_i\neq k_j,\,i\neq j}}\sum\limits_{i=1}^{s}\rho_{k_i}^n(y)\,dm(y) \quad \geq \quad \int\limits_{f(A)}\widetilde{\rho}^{\,n}(y)\,dm(y)$$

$$\geq M(\Gamma')\,.$$

Теорема доказана. □

Замечание 2.2. Утверждение теоремы 1.1, очевидно, остаётся справедливым, если x_0 является изолированной точкой границы области D.

3. Приложения к проблеме устранения особенностей отображений

Аналоги утверждений, приводимых в настоящем разделе, доказаны в работе [22] для внутренних дилатаций $K_I(x,f)$. Здесь рассматривались дифференцируемые почти всюду отображения, обладающие N, N^{-1} и ACP^{-1}-свойствами, для которых их внутренняя дилатация почти всюду удовлетворяет условию $K_I(x,f)\leq Q(x)$. При определённых условиях на функцию Q, а также условиях на рост в окрестности изолированной особой точки $b\in\mathbb{R}^n$, было показано, что такие отображения продолжаются в точку b по непрерывности. Как оказалось, условие $K_I(x,f)\leq Q(x)$ вполне можно ослабить до условия $D_f(x,b)\leq Q(x)$ ввиду теоремы 1.1. С другой стороны, отметим, что (независимо от условий на дилатации, вплоть даже до их ограниченности либо равенства единице) даже аналитические функции на плоскости не продолжаются в изолированную точку границы области по непрерывности без некоторого дополнительного условия выпускания этими отображениями некоторого множества положительной ёмкости ($\varphi(z)=\exp\{1/z\},\quad b=0$). Однако, устранение изолированной особенности имеет место, если вместо упомянутого ёмкостного условия потребовать, чтобы в окрестности точки b соответствующее отображение имело "достаточно слабый" порядок роста. Рассмотрим следующие определения.

Для отображения $f:D\to\mathbb{R}^n$, множества $E\subset D$ и $y\in\mathbb{R}^n$, определим *функцию кратности* $N(y,f,E)$ как число прообразов точки

y во множестве E, т.е. $N(y,f,E) = \mathrm{card}\,\{x\in E : f(x)=y\}$. Множество $G\subset\mathbb{R}^n$ условимся называть *множеством нулевой ёмкости,* пишем $\mathrm{cap}\,G=0$, если существует континуум $T\subset\mathbb{R}^n$, такой что $M(\Gamma(T,G,\mathbb{R}^n))=0$, см., напр., [16, разд. 2 гл. III и предложение 10.2 гл. II]. В противном случае мы говорим, что G имеет положительную ёмкость, что записываем как $\mathrm{cap}\,G>0$. Множества ёмкости нуль, как известно, всюду разрывны (любая компонента их связности вырождается в точку), т.е., условие $\mathrm{cap}\,G=0$ влечёт, что $\mathrm{Int}\,G=\varnothing$, см., напр., [16, следствие 2.5, гл. III]. Открытое множество $U\subset D$, $\overline{U}\subset D$, называется *нормальной окрестностью* точки $x\in D$ при отображении $f:D\to\mathbb{R}^n$, если $U\cap f^{-1}\left(f(x)\right)=\{x\}$ и $\partial f(U)=f(\partial U)$, см., напр., [16, разд. 4, гл. I].

Предложение 3.1. *Пусть $f:D\to\mathbb{R}^n$ открытое дискретное отображение. Тогда для каждого $x\in D$ существует s_x, такое, что при всех $s\in(0,s_x)$ компонента связности множества $f^{-1}\left(B(f(x),s)\right)$, содержащая точку x, и обозначаемая символом $U(x,f,s)$, является нормальной окрестностью точки x при отображении f, при этом $f\left(U(x,f,s)\right)=B(f(x),s)$ и $d(U(x,f,s))\to 0$ при $s\to 0$. (Здесь, как и прежде, $d(A)$ обозначает евклидов диаметр множества $A\subset\mathbb{R}^n$).*

Важную роль при доказательстве основных результатов работы играют следующее утверждение, см. [20, лемма 5.1].

Предложение 3.2. *Пусть $Q:\mathbb{B}^n\setminus\{0\}\to[0,\infty]$ — измеримая по Лебегу функция, $f:\mathbb{B}^n\setminus\{0\}\to\overline{\mathbb{R}^n}$, $n\geq 2$, — открытое дискретное отображение, удовлетворяющее неравенству*

$$M(f(\Gamma))\leq\int\limits_D Q(x)\cdot\eta^n(|x-x_0|)\,dm(x)\,,\qquad(3.1)$$

где $\Gamma:=\Gamma(S(0,r_1),S(0,r_2),A(r_1,r_2,0))$, $0<r_1<r_2<1$ и $\eta:[r_1,r_2]\to\mathbb{R}$ — произвольная неотрицательная измеримая по Лебегу функция, удовлетворяющая условию $\int\limits_{r_1}^{r_2}\eta(r)dr\geq 1$. Пусть, кроме того,

$$\mathrm{cap}\,\left(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus f\left(\mathbb{B}^n\setminus\{0\}\right)\right)>0.$$

Предположим, что существует $\varepsilon_0\in(0,1)$ такое, что при $\varepsilon\to 0$ $\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi^n(|x|)\,dm(x)=o\left(I^n(\varepsilon,\varepsilon_0)\right)$, где $\psi(t)$ — неотрицательная на $(0,\infty)$ функция, такая что $\psi(t)>0$ п.в. и $0<I(\varepsilon,\varepsilon_0)=\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)dt<\infty$ для всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$. Тогда f имеет непрерывное продолжение $f:\mathbb{B}^n\to\overline{\mathbb{R}^n}$ в $\mathbb{B}^n$.

Следующее определение может быть найдено в [16, гл. II, п. 3]. Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ — отображение, $\beta : [a, b) \to \mathbb{R}^n$ — некоторая кривая и $x \in f^{-1}(\beta(a))$. Кривая $\alpha : [a, c) \to D$ называется *максимальным поднятием* кривой β при отображении f с началом в точке x, если (1) $\alpha(a) = x$; (2) $f \circ \alpha = \beta|_{[a,\,c)}$; (3) если $c < c' \leq b$, то не существует кривой $\alpha' : [a, c') \to D$, такой что $\alpha = \alpha'|_{[a,\,c)}$ и $f \circ \alpha = \beta|_{[a,\,c')}$. Следующая конструкция является обобщением приведённого выше определения. Пусть $x_1, \ldots, x_k$ — k различных точек множества $f^{-1}(\beta(a))$ и

$$\widetilde{m} = \sum_{i=1}^{k} i(x_i,\, f)\,. \tag{3.2}$$

Последовательность кривых $\alpha_1, \ldots, \alpha_{\widetilde{m}}$ является *максимальной последовательностью поднятий кривой β при отображении f с началом в точках $x_1, \ldots, x_k$*, если

(a) каждая кривая α_j является максимальным поднятием кривой β при отображении f,

(b) card $\{j : a_j(a) = x_i\} = i(x_i,\, f)$, $\quad 1 \leq i \leq k\,$,

(c) card $\{j : a_j(t) = x\} \leq i(x,\, f)$ при всех $x \in D$ и всех $t \in I_j$, где I_j — область определения кривой α_j. Отметим, что количество кривых $\widetilde{m}$ может быть больше, чем количество соответствующих точек k, см. соотношение (3.2). Следующее утверждение см., напр., в [16, теорема 3.2 гл. II].

Предложение 3.3. *Пусть f — открытое дискретное отображение и точки $x_1, \ldots, x_k \in f^{-1}(\beta(a))$. Тогда кривая β имеет максимальную последовательность поднятий при отображении f с началом в точках $x_1, \ldots, x_k$.*

Следующая лемма является фундаментальным утверждением настоящего раздела.

Лемма 3.1. *Пусть $b \in D$ и $f : D\setminus\{b\} \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное дифференцируемое почти всюду отображение, $f \in ACP^{-1}$, обладающее N и N^{-1}-свойствами Лузина. Предположим, что существует некоторое число $\delta > 0$, такое, что при всех $x \in B(b, \delta) \setminus \{b\}$ и некоторой строго убывающей функции $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$, для которой $\varphi(t) \to \infty$ при $t \to 0$, имеет место неравенство*

$$|f(x)| \leq C \cdot \varphi^p(|x - b|)\,, \tag{3.3}$$

где $p > 0$ и $C > 0$ — некоторые постоянные. Пусть, кроме того, существуют измеримая по Лебегу функция $Q : D \to [0, \infty]$, числа

$\varepsilon_0>0$, $\varepsilon_0<\mathrm{dist}\,(b,\partial D)$, $\varepsilon_0'\in(0,\varepsilon_0)$, $A>0$ *и измеримая по Лебегу функция* $\psi(t):(0,\varepsilon_0)\rightarrow[0,\infty]$, $\psi(t)>0$ *п.в., такие, что* $D_f(x,x_0)\le Q(x)$ *при почти всех* $x\in B(0,\delta)\setminus\{b\}$ *и* $\varepsilon\rightarrow 0$

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-b|<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi^n(|x-b|)\ dm(x)\le\frac{A\cdot I^n(\varepsilon,\varepsilon_0)}{(\log\varphi(\varepsilon))^{n-1}}\,, \tag{3.4}$$

где

$$I(\varepsilon,\varepsilon_0):=\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)dt<\infty\qquad\forall\quad\varepsilon\in(0,\varepsilon_0') \tag{3.5}$$

и, кроме того, $I(\varepsilon,\varepsilon_0)\rightarrow\infty$ *при* $\varepsilon\rightarrow 0$. *Тогда точка* b *является для отображения* f *либо полюсом, либо устранимой особой точкой.*

Доказательство. Предположим противное, а именно, что точка b является существенно особой точкой отображения f. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $b=0$, $\delta<\mathrm{dist}\,(0,\partial D)$ и $C=1$. В таком случае, сфера $S(0,\delta)$ является компактным множеством в $D\setminus\{0\}$, поэтому найдётся $R>0$, такое что

$$f\left(S(0,\delta)\right)\subset B(0,R)\,. \tag{3.6}$$

В силу теоремы 1.1 отображение f удовлетворяет оценке (3.1) в точке $b=0$. Поскольку $b=0$ является существенно особой точкой отображения f, в виду условий (3.4) и (3.5), по предложению 3.2 отображение f в $B(0,\delta)\setminus\{0\}$ принимает все значения в $\mathbb{R}^n$, за исключением, может быть, некоторого множества ёмкости нуль, т.е., $N\left(y,f,\mathbb{B}^n\setminus\{0\}\right)=\infty$ при всех $y\in\mathbb{R}^n\setminus E$, где $\mathrm{cap}\,E=0$. Так как E имеет ёмкость нуль, множество $\mathbb{R}^n\setminus E$ не может быть ограниченным. В таком случае, найдётся $y_0\in\mathbb{R}^n\setminus\left(E\cup B(0,R)\right)$.

Пусть $k_0>\frac{4Ap^{n-1}}{\omega_{n-1}}$, $k_0\in\mathbb{N}$. Поскольку $N\left(y_0,f,\mathbb{B}^n\setminus\{0\}\right)=\infty$, найдутся точки $x_1,\ldots,x_{k_0}\in f^{-1}(y_0)\cap\left(B(0,\delta)\setminus\{0\}\right)$. По предложению 3.1 при некотором фиксированном $r>0$ каждая точка x_j, $j=1,\ldots,k_0$, имеет нормальную окрестность $U_j:=U(x_j,f,r)$, такую, что $\overline{U_l}\cap\overline{U_{\widetilde{m}}}=\varnothing$ при всех $l\ne\widetilde{m}$, $l,\widetilde{m}\in\mathbb{N}$, $1\le l\le k_0$ и $1\le\widetilde{m}\le k_0$.

Полагаем $d:=\min\left\{\varepsilon_0,\mathrm{dist}\,\left(0,\overline{U_1}\cup\ldots\cup\overline{U_{k_0}}\right)\right\}$. Пусть $a\in(0,d)$ и $V:=B(0,\delta)\setminus\overline{B(0,a)}$. В силу неравенства (3.3), строгого убывания функции φ, а также предположения о том, что $C=1$, имеем

$$f(V)\subset B\left(0,\varphi^p(a)\right)\,. \tag{3.7}$$

Поскольку $z_0:=y_0+re\in\overline{B(y_0,r)}=f\left(\overline{U(x_j,f,r)}\right)$, $j=1,\ldots,k_0$, где e — единичный вектор, найдётся конечная последовательность точек $\widetilde{x_1}, \ldots, \widetilde{x_{k_0}}$, $\widetilde{x_j} \in \overline{U_j}$, $1 \le j \le k_0$, такая что $f(\widetilde{x_j}) = z_0$. Заметим, что $k_0 \le \sum\limits_{j=1}^{k_0} i(\widetilde{x_j}, f) = m'$. Заметим, что $z_0 \in f(V)$. Обозначим через H полусферу $H = \left\{e \in \mathbb{S}^{n-1} : (e, y_0) > 0\right\}$, через Γ' — семейство всех кривых $\beta : [r, \varphi^p(a)) \to \mathbb{R}^n$ вида $\beta(t) = y_0 + te$, $e \in H$, $t \in [r, \varphi^p(a))$, а через Γ максимальную последовательность поднятий кривой β при отображении f относительно области V с началом в точках $\widetilde{x_1}, \ldots, \widetilde{x_{k_0}}$, $\widetilde{x_j} \in \overline{U_j}$, $1 \le j \le k_0$, состоящую из m' кривых, $m' = \sum\limits_{j=1}^{k_0} i(\widetilde{x_j}, f)$, которая существует в силу предложения 3.3. Заметим, что ввиду (3.7) при любом фиксированном $e \in H$, каждой кривой $\beta = y_0 + te$ и каждого максимального её поднятия $\alpha(t) : [r, c) \to V$ с началом в точке $\widetilde{x_{j_0}}$, $\alpha \in \Gamma$, $1 \le j_0 \le k_0$, существует последовательность $r_k \in [r, c)$, такая что $r_k \to c - 0$ при $k \to \infty$ и $\operatorname{dist}(\alpha(r_k), \partial V) \to 0$ при $k \to \infty$. Кроме того, заметим, что ситуация, когда $\operatorname{dist}(\alpha(r_k), S(0, \delta)) \to 0$ при $k \to \infty$, исключена. Действительно, пусть эта ситуация имеет место. Тогда найдутся $p_2 \in S(0, \delta)$ и подпоследовательность номеров k_l, $l \in \mathbb{N}$, такие, что $\alpha(r_{k_l}) \to p_2$ при $l \to \infty$. Отсюда, по непрерывности f, получаем, что $\beta(r_{k_l}) \to f(p_2)$ при $l \to \infty$, что невозможно ввиду соотношения (3.6), поскольку, при каждом фиксированном $e \in H$ и $t \in [r, \varphi^p(a))$, имеем $|\beta(t)| = |y_0 + te| = \sqrt{|y_0|^2 + 2t(y_0, e) + t^2} \ge |y_0| > R$ по выбору y_0.

Из сказанного выше следует, что найдётся последовательность $r_k \in [r, c)$, такая что $r_k \to c - 0$ при $k \to \infty$, и $\alpha(r_k) \to p_3 \in S(0, a)$. Кроме того, каждая такая кривая $\alpha \in \Gamma$ пересекает сферу $S(0, d)$, поскольку, согласно построению, α имеет начало вне шара $B(0, d)$.

Из сказанного следует, что при всех достаточно малых ε кривая α содержит замкнутую подкривую α', пересекающую сферы $S(0, d)$ и $S(0, a + \varepsilon)$. Тогда по теореме 1.1 и с учётом замечания 2.2

$$M(\Gamma') \le \frac{1}{m'} \int\limits_D D_f\,(x,\,0) \cdot \rho^n(|x|) dm(x)$$

$$\le \frac{1}{k_0} \int\limits_D D_f(x, 0) \cdot \rho^n(|x|) dm(x) \tag{3.8}$$

для каждой измеримой по Лебегу функции ρ такой, что $\int\limits_{a+\varepsilon}^{d} \rho(t) dt \ge 1$.

Из условия $I(a, d) \to \infty$ при $a \to 0$ вытекает, что $I(a, d) > 0$ при малых a. Рассмотрим функцию

$$\rho_{a,\varepsilon}(t) = \begin{cases} \psi(t)/I(a+\varepsilon, d), & t \in (a + \varepsilon, d), \\ 0, & t \in \mathbb{R}^n \setminus (a + \varepsilon, d)\,, \end{cases}$$

где величина $I(a+\varepsilon,d)$ определена также, как в (3.5), а ψ — функция из условия леммы. Заметим, что

$$\int\limits_{a+\varepsilon}^{d}\rho_{a,\varepsilon}(t)dt=\frac{1}{I(a+\varepsilon,d)}\int\limits_{a+\varepsilon}^{d}\psi(t)dt=1\,,$$

в таком случае, ввиду условий (3.4) и (3.8) получаем, что

$$\begin{aligned}M(\Gamma^{\prime})\quad&\le\quad\frac{1}{k_0\cdot I^n(a+\varepsilon,d)}\int\limits_{a+\varepsilon<|x|<d}D_f(x,0)\cdot\psi^n(|x|)dm(x)\\&\le\frac{2}{k_0\cdot I^n(a+\varepsilon,\varepsilon_0)}\int\limits_{a+\varepsilon<|x|<\varepsilon_0}Q(x)\cdot\psi^n(|x|)dm(x)\end{aligned}\qquad(3.9)$$

при всех $a+\varepsilon\in(0,d_1)$ и некотором d_1, $d_1\le d$, поскольку $I^n(a+\varepsilon,d)\to\infty$ при $a+\varepsilon\to 0$. Снова, из (3.4) и (3.9) получаем, что при $a+\varepsilon\in(0,d_1)$

$$M(\Gamma^{\prime})\le\frac{2A}{k_0\left(\log\varphi(a+\varepsilon)\right)^{n-1}}\,.\qquad(3.10)$$

С другой стороны, в силу [26, замечание 7.7],

$$M(\Gamma^{\prime})=\frac{1}{2}\frac{\omega_{n-1}}{\left(\log\frac{\varphi^p(a+\varepsilon)}{r}\right)^{n-1}}\,.\qquad(3.11)$$

Тогда из неравенства (3.10) и равенства (3.11) получаем, что

$$\frac{1}{2}\frac{\omega_{n-1}}{\left(\log\frac{\varphi^p(a+\varepsilon)}{r}\right)^{n-1}}\le\frac{2A}{k_0\left(\log\varphi(a+\varepsilon)\right)^{n-1}}\,,$$

откуда

$$\frac{1}{r^{\left(\frac{2}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}}}}\ge\left(\varphi(a+\varepsilon)\right)^{\left(\frac{k_0}{2A}\right)^{\frac{1}{n-1}}-p\left(\frac{2}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}}}\,.$$

Поскольку по выбору $k_0>\frac{4Ap^{n-1}}{\omega_{n-1}}$, в правой части последнего соотношения величина $\varphi(a+\varepsilon)$ берётся в некоторой положительной степени. Переходя здесь к пределу при $a+\varepsilon\to 0$ и учитывая, что по условию леммы $\varphi(a+\varepsilon)\to\infty$ при $a+\varepsilon\to 0$, получаем, что

$$\frac{1}{r^{\left(\frac{2}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}}}}\ge\infty\,,$$

что невозможно. Полученное противоречие означает, что точка $b=0$ не может быть существенно особой для отображения f. $\square$

Отдельный случай леммы 3.1 представляет собой ситуация, когда $I(\varepsilon, \varepsilon_0) \le M \cdot \log \varphi(\varepsilon)$ при некоторой постоянной $M > 0$ и $\varepsilon \to 0$. Покажем, что в этом случае при указанных в формулировке леммы 3.1 отображениях, предполагающихся ограниченными, имеет место явная оценка искажения хордального расстояния.

Следующее утверждение может быть получено как следствие из [23, лемма 3.3] и оценки (1.7) при $m = 1$.

Лемма 3.2. *Предположим, что $b \in D$, $f : D \to B(0, R)$ — открытое дискретное дифференцируемое почти всюду отображение, $f \in ACP^{-1}$, обладающее N и N^{-1}-свойствами Лузина, при этом, существуют измеримая по Лебегу функция $Q : D \to [1, \infty]$, числа $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 < \mathrm{dist}\,(b, \partial D)$, и $A > 0$, такие, что $D_f(x, b) \le Q(x)$ почти всюду в D, при этом, при $\varepsilon \to 0$ имеют место соотношения (3.4)–(3.5). Пусть, кроме того, существует постоянная $M > 0$ и $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$, такие что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ выполнено условие*

$$I(\varepsilon, \varepsilon_0) \le M \cdot \log \varphi(\varepsilon)\,, \tag{3.12}$$

где $I(\varepsilon, \varepsilon_0)$ определяется соотношением (3.5), а $\varphi : (0, \infty) \to [0, \infty)$ — некоторая функция. Тогда при всех $x \in B(b, \varepsilon_1)$ имеет место оценка

$$|f(x) - f(b)| \le \frac{\alpha_n(1 + R^2)}{\delta} \exp\{-\beta_n I\,(|x - b|, \varepsilon_0)\}\,, \tag{3.13}$$

где постоянные α_n и $\beta_n = \left(\frac{\omega_{n-1}}{AM^{n-1}}\right)^{1/(n-1)}$ зависят только от n, а δ — от R.

Доказательство. В первую очередь, заметим, что f удовлетворяет соотношению вида (1.7) при $m = 1$. Из соотношения (3.4) с учётом (3.12) следует, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$

$$\int\limits_{\varepsilon < |x-b| < \varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n(|x - b|)\; dm(x) \le AM^{n-1} \cdot I(\varepsilon, \varepsilon_0)\,. \tag{3.14}$$

Поскольку $|f(x) - f(b)| \le (1 + R^2) \cdot h(f(x), f(b))$, из (3.14) и [23, лемма 5] вытекает соотношение (3.13). $\square$

Мы показали, что при определённых условиях изолированная особенность отображений, более общих, чем отображения с конечным искажением длины, является либо полюсом, либо устранимой особой точкой. Однако, как мы увидим ниже, при ещё более сильных ограничениях на рост отображения f ситуация, когда изолированная точка границы является полюсом, также исключена. Подобный результат может быть получен как следствие из оценки расстояния (3.13). Имеет место следующее утверждение.

Следствие 3.1. *Предположим, что в условиях леммы 3.1, помимо соотношений (3.4) и (3.5) имеет место условие (3.12), а вместо условия (3.3) имеет место более сильное предположение:*

$$\lim_{x\to b}|f(x)|\cdot\exp\{-\beta_n I\left(|x-b|,\varepsilon_0\right)\}=0\,, \tag{3.15}$$

где $\beta_n=\left(\frac{\omega_{n-1}}{AM^{n-1}}\right)^{1/(n-1)}$. *Тогда точка* $x=b$ *является устранимой изолированной особой точкой отображения* f.

Доказательство. Можно считать, что $b=0$. По лемме 3.1, точка b не может быть существенно особой для f. Предположим, что $b=0$ является для отображения f полюсом. Тогда рассмотрим композицию отображений $h=g\circ f$, где $g(x)=\frac{x}{|x|^2}$ — инверсия относительно единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$. Заметим, что $h\in ACP^{-1}$, обладает N и N^{-1}-свойствами Лузина, при этом, $D_f(x,0)=D_h(x,0)$ и $h(0)=0$. Кроме того, в некоторой окрестности нуля отображение h (по построению) является ограниченным. В таком случае, найдутся $\varepsilon_0>0$ и $R>0$, такие, что $|h(x)|\le R$ при $|x|<\varepsilon_0$. Следовательно, возможно применение леммы 3.2. По неравенству (3.13), $|h(x)|=\frac{1}{|f(x)|}\le\frac{\alpha_n(1+R^2)}{\delta}\exp\{-\beta_n I\left(|x|,\varepsilon_0\right)\}$. Отсюда следует, что

$$|f(x)|\cdot\exp\{-\beta_n I\left(|x|,\varepsilon_0\right)\}\ge\frac{\delta}{\alpha_n(1+R^2)}\,.$$

Однако, последнее соотношение противоречит (3.15).

Полученное противоречие доказывает, что точка $b=0$ является устранимой для отображения f. □

Сформулируем и докажем теперь основные результаты настоящего раздела. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть* $b\in D$ *и* $f:D\setminus\{b\}\to\mathbb{R}^n$ *— открытое дискретное дифференцируемое почти всюду отображение,* $f\in ACP^{-1}$, *обладающее* N *и* N^{-1}*-свойствами Лузина, при этом* $D_f(x,b)\le Q(x)$ *почти всюду и для некоторых* $\varepsilon_0>0$, $\varepsilon_0<\operatorname{dist}(b,\partial D)$ *и* $\varepsilon_0'\in(0,\varepsilon_0)$ *имеет место условие*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-b|<\varepsilon_0}\frac{Q(x)}{|x-b|^n\log^n\frac{1}{|x-b|}}\;dm(x)\le A\cdot\log\frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log\frac{1}{\varepsilon_0}}\qquad\forall\,\varepsilon\in(0,\varepsilon_0')\,, \tag{3.16}$$

кроме того,

$$\lim_{x\to b}\frac{|f(x)|}{\left(\log\frac{1}{|x-b|}\right)^{\beta_n}}=0\,, \tag{3.17}$$

где $\beta_n = \left(\frac{\omega_{n-1}}{A}\right)^{1/(n-1)}$. *Тогда точка* $x = b$ *является устранимой для отображения* f.

Доказательство. Полагаем $\varphi(t) := \log\frac{1}{t}$ и $\psi(t) := \frac{1}{t\log\frac{1}{t}}$. Отметим, что в этом случае выполнено соотношение (3.12) при $M = 1$ и соотношение (3.15), которое соответствует соотношению (3.17) при указанном выборе функций φ и ψ (где, как и прежде, $I(\varepsilon, \varepsilon_0) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)dt$). Кроме того, выполнены соотношения (3.4)–(3.5). Тогда необходимое заключение следует из следствия 3.1. □ □

Для дальнейшего изложения крайне важным является следующее утверждение (см. [9, следствие 2.3], см. также [12, лемма 6.1, гл. 6]).

Предложение 3.4. *Пусть* $\varphi : D \to \mathbb{R}, n \geq 2$ *— неотрицательная функция, имеющая конечное среднее колебание в точке* $0 \in D$. *Тогда*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} \frac{\varphi(x)\, dm(x)}{\left(|x|\log\frac{1}{|x|}\right)^n} = O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{3.18}$$

при $\varepsilon \to 0$ *и для некоторого* $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 \leq \operatorname{dist}(0, \partial D)$.

Доказательство теоремы 1.2. Выберем в лемме 3.1 в качестве $\varphi(t) := \log\frac{1}{t}$ и $\psi(t) := \frac{1}{t\log\frac{1}{t}}$. Тогда доказательство теоремы 1.2 вытекает из леммы 3.1 и оценки (3.16), справедливой для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ и произвольной функции $Q \in FMO(b)$ (см. предложение 3.4), а также леммы 3.1. Первая часть теоремы 1.2 доказана.

Доказательство второй части теоремы 1.2 немедленно следует из теоремы 3.1, поскольку, как уже было отмечено выше, условия вида (3.16) выполняются для произвольных функций класса FMO в соответствующей точке. □

Доказательство теоремы 1.3. В лемме 3.1 полагаем

$$\psi(t) = 1/tq_b^{1/(n-1)}(t), \quad \varphi(t) = \exp\left\{\int\limits_t^{\varepsilon_0} \frac{dr}{rq_b^{1/(n-1)}(r)}\right\}.$$

Поскольку функция $Q(x)$ по условию локально интегрируема, по теореме Фубини $q_b(r) < \infty$ при почти всех $r \in (0, \varepsilon_0)$, откуда вытекает строгое убывание функции φ и положительность функции ψ. Кроме того, по теореме Фубини имеем

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\varepsilon<|x-b|<\varepsilon_0} Q(x)\cdot\psi^n(|x-b|)dm(x)\\
=\;&\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\int\limits_{S(b,r)} Q(x)\cdot\psi^n(|x-b|)\,d\mathcal{H}^{n-1}\,dr\\
=\;&\omega_{n-1}\cdot\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} r^{n-1}\psi^n(r)q_b(r)dr=\omega_{n-1}\cdot I(\varepsilon,\varepsilon_0)=\omega_{n-1}\cdot\log\varphi(\varepsilon).
\end{aligned}
$$

Отсюда, в частности, следует, что выполнено условие (3.12) при $M = 1$. Оставшаяся часть утверждения следует из леммы 3.1 и следствия 3.1. □

4. Некоторые примеры и замечания

В качестве приложений полученных в работе результатов, укажем, в частности, на один из подклассов отображений с конечным искажением длины, для которых утверждения теорем 1.1–1.3 имеют место (см. [24, теорема 1]).

Теорема 4.1. *Утверждения теорем 1.1–1.3 выполняются, если отображение $f\in W_{loc}^{1,n}(D)$ является открытым, дискретным, мера его множества точек ветвления равна нулю и, кроме того, внутренняя дилатация $K_I(x,f)$ отображения f является локально суммируемой в области D. В частности, заключения теорем 1.1–1.3 выполнены, если f — отображение с ограниченным искажением.*

Заметим, что дилатация $D_f(x,x_0)$, определённая соотношением (1.6), заведомо не может обслуживать все семейства кривых в области D подобно соотношению (1.5) (т.е., в (1.5) величина $K_I(x,f)$ не может быть заменена на $D_f(x,x_0)$), так как даже при $m=1$, в этом случае, должно быть $D_f(x,x_0)\geq 1$ почти всюду (см. [25, Следствие 4.1]). В то же время, $D_f(x,x_0)$ может быть меньше единицы на множестве положительной меры. По этому поводу, рассмотрим для простоты случай $n=2$. Согласно [18, лемма 2.10] для дифференцируемого и невырожденного отображения $f: D\to\mathbb{C}$ в точке $z\in D\subset\mathbb{C}$

$$
D_f(z,z_0)=\frac{\left|1-\frac{\overline{z-z_0}}{z-z_0}\mu(z)\right|^2}{1-|\mu(z)|^2}\,,
$$

где, как обычно, $z = x + iy$, $\overline{\partial} f = f_{\overline{z}} = (f_x + if_y)/2$ и $\partial f = f_z = (f_x - if_y)/2$ и $\mu(z) = \mu_f(z) = f_{\overline{z}}/f_z$, когда $f_z \neq 0$, и $\mu(z) = 0$ в противном случае. Обозначим через $\mathfrak{F}_Q$ класс всех Q-квазиконформных автоморфизмов f расширенной комплексной плоскости, нормированных условиями $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ и $f(\infty) = \infty$. (Отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ будем называется Q-квазиконформным, если f — гомеоморфизм класса $W^{1,n}_{loc}$, для которого функция $K_I(x, f) \leq Q$ при почти всех $x \in D$). Пусть $h \in \mathfrak{F}_Q$ имеет комплексную характеристику вида $\mu(z) = k(|z|)\frac{z}{\overline{z}}$, где $k(\tau) : \mathbb{R} \to \mathbb{B}^2$ — измеримая функция. Тогда

$$h(z) = \frac{z}{\overline{z}} \exp\left\{\int\limits_1^{|z|} \frac{1 + k(\tau)}{1 - k(\tau)} \frac{d\tau}{\tau}\right\}, \tag{4.1}$$

см. [7, предложение 6.5, гл. 6]. Полагаем $k(\tau) = \tau$ при $|\tau| < 1$ и $k(\tau) = 0$ при $|\tau| \geq 1$, и комплексную характеристику μ, определённую по правилу $\mu(z) = k(|z|)\frac{z}{\overline{z}}$. Ввиду сказанного выше, отображение $h(z)$, заданное соотношением (4.1) при выбранной функции k, является квазиконформным. Рассмотрим точку $z_0 = 0$. Посредством непосредственного подсчёта убеждаемся, что $D_f(z, 0) = \frac{1-|z|}{1+|z|}$ при $z \in \mathbb{B}^2$ и $D_f(z, 0) = 1$ при $z \notin \mathbb{B}^2$. Таким образом, отображение $\widetilde{h} := h|_{\mathbb{B}^2}$ имеет угловую дилатацию $D_f(z, 0)$, всюду меньшую единицы в единичном круге.

Нетрудно привести пример ограниченного отображения $f : D \setminus \{b\} \to \mathbb{R}^n$ с конечным искажением длины, для которого соответствующая угловая дилатация $Q := D_f(x, b)$ удовлетворяет условию $Q \in FMO(b)$, равно как и условиям $\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dt}{tq_b^{1/(n-1)}(t)} = \infty$, $\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{tq_b^{1/(n-1)}(t)} < \infty$ при малых $\varepsilon > 0$, однако, этим же условиям, в то же время, не удовлетворяет функция $\widetilde{Q} = K_I(x, f)$, где $K_I(x, f)$ определена в (1.3). (Прямыми вычислениями можно показать, что при $n = 2$ всегда $K_I(z, f) = \frac{1+|\mu(z)|}{1-|\mu(z)|}$, где $\mu(z) = \mu_f(z) = f_{\overline{z}}/f_z$, когда $f_z \neq 0$, и $\mu(z) = 0$ в противном случае). Для этой цели снова рассмотрим случай $n = 2$ и $D := \mathbb{B}^2 \setminus \{0\}$. Положим $b = 0$, $\mu(z) = k(|z|)\frac{z}{\overline{z}}$, тогда соответствующая угловая дилатация $D_f(z, 0)$ равна: $D_f(z, 0) = \frac{1-|z|}{1+|z|}$. Полагая $Q(z) := D_f(z, 0)$ и вычисляя $q_0(z)$ по правилу (1.8), заметим, что, $\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dt}{tq_0(t)} = \infty$ и $\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{tq_0(t)} < \infty$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$. Кроме того, $D_f(z, 0)$ в этом случае просто ограничена, что немедленно влечет условие $D_f(z, 0) \in FMO(0)$. Полагаем теперь $k(r) := \frac{1+r^\beta}{1-r^\beta,}$ где β произвольное фиксированное число из интервала $(0, 1)$. Поскольку ку $\mu(z) = k(|z|)\frac{z}{\bar{z}}$, то $K_I(z,f) = \frac{1+|\mu(z)|}{1-|\mu(z)|} = \frac{1+k(|z|)}{1-k(|z|)} = \frac{1}{|z|^\beta}$. Полагая $\widetilde{Q}(z) := K_I(z,f)$, мы видим, что при каждом $\varepsilon_0 > 0, \varepsilon_0 < 1$, $\int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dr}{r\widetilde{q}_0(r)} = \int\limits_0^{\varepsilon_0} \frac{dr}{r^{1-\beta}} < \infty$. Используя предложение 3.4, покажем также, что $\widetilde{Q}(z) \notin FMO(0.)$ Действительно, прямые вычисления показывают, что при достаточно малых $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и некоторой постоянной $C > 0$ выполнено $\int\limits_{\varepsilon<|z|<\varepsilon_0} \frac{\widetilde{Q}(z)\, dm(z)}{\left(|z| \log \frac{1}{|z|}\right)^2} = \omega_{n-1} \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dr}{r^{1+\beta} \log^2 \frac{1}{r}} \geq \frac{C}{\varepsilon^{\beta/2}}$, откуда вытекает, что соотношение (3.18) не выполнено; следовательно, $\widetilde{Q}(z) \notin FMO(0)$.

Осталось показать, что найдётся открытое дискретное отображение f с конечным искажением длины в $\mathbb{B}^2 \setminus \{0\}$, которому соответствуют построенные функции $\widetilde{Q}(z) := K_I(z,f)$ и $Q(z) := D_f(z,0)$. В самом деле, в силу [17, предложение 6.4] найдётся гомеоморфизм $f : \mathbb{B}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ вида $f(z) = e^{i\theta + \frac{1}{\beta}\left(\frac{r^\beta - 1}{r^\beta}\right)}$, $z = re^{i\theta}$, которому соответствует выбранная функция $\mu(z) = k(|z|)\frac{z}{\bar{z}}$, а также функции $\widetilde{Q}(z) := K_I(z,f)$ и $Q(z) := D_f(z,0)$, указанные выше. Заметим, что f — гомеоморфизм класса $W_{loc}^{1,2}(\mathbb{B}^2 \setminus \{0\})$, при этом, т.к. $K_I(z,f) = \frac{1}{|z|^\beta} \in L^1_{loc}(\mathbb{B}^2 \setminus \{0\})$, то $f^{-1} \in W_{loc}^{1,2}(f(\mathbb{B}^2 \setminus \{0\}))$ (см. [11, следствие 2.3]). В таком случае, f — отображение с конечным искажением длины (см. [12, теоремы 8.1 и 8.6], см., также, [13, теоремы 4.6 и 6.10]), что и следовало установить.

Литература

[1] Cazacu C. Andreian, *On the length-area dilatation* // Complex Var. Theory Appl., **50** (2005), No. 7–11, 765–776.

[2] C. J. Bishop, V. Ya. Gutlyanskii, O. Martio, M. Vuorinen, *On conformal dilatation in space* // Intern. Journ. Math. and Math. Scie., **22** (2003), 1397–1420.

[3] M. Cristea, *Local homeomorphisms having local ACL^n inverses* // Compl. Var. and Ellipt. Equat., **53** (2008), No. 1, 77–99.

[4] Г. Федерер, *Геометрическая теория меры*, М.: Наука, 1987, 760 с.

[5] A. Golberg, V. Gutlyanskii, *On Lipschitz continuity of quasiconformal mappings in space* // J. Anal. Math., **109** (2009), 233–251.

[6] V. Ya. Gutlyanskii, V. I. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *The Beltrami Equation: A Geometric Approach*, Developments in Mathematics, vol. 26., New York etc.: Springer, 2012.

[7] В. Я. Гутлянский, В. И. Рязанов, *Геометрическая и топологическая теория функций и отображений*, К.: Наукова думка, 2011, 425 с.

[8] T. Iwaniec, G. Martin, *Geometrical Function Theory and Non-Linear Analysis*, Oxford, Clarendon Press, 2001, 552 p.

[9] А. Игнатьев, В. Рязанов, *Конечное среднее колебание в теории отображений* // Укр. матем. вестник, **2** (2005), No. 3, 395–417.

[10] F. John, L. Nirenberg, *On functions of bounded mean oscillation* // Comm. Pure Appl. Math., **14** (1961), 415–426.

[11] P. Koskela, J. Onninen, *Mappings of finite distortion: Capacity and modulus inequalities*, **599** (2006), 1–26.

[12] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Moduli in Modern Mapping Theory*, New York: Springer Science, 2009.

[13] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Mappings with finite length distortion* // J. d'Anal. Math., **93** (2004), 215–236.

[14] С. П. Пономарёв, *N^{-1}-свойство отображений и условие (N) Лузина* // Матем. заметки, **58** (1995), 411–418.

[15] Ю. Г. Решетняк, *Пространственные отображения с ограниченным искажением*, Новосибирск: Наука, 1982.

[16] S. Rickman, *Quasiregular mappings* // Results in Mathematic and Related Areas (3), **26**, Berlin, Springer-Verlag, 1993.

[17] V. Ryazanov , U. Srebro, E. Yakubov, *Plane mappings with dilatation dominated by functions of bounded mean mean oscillation* // Sib. Adv. in Math., **11** (2001), No. 2, 94–130.

[18] V. Ryazanov , U. Srebro, E. Yakubov, *On ring solutions of Beltrami equations* // J. d'Anal. Math., **96** (2005), 117–150.

[19] С. Сакс, *Теория интеграла*, М.: Издательство иностранной литературы, 1949, 495 с.

[20] Р. Р. Салимов, Е. А. Севостьянов, *Теория кольцевых Q-отображений в геометрической теории функций* // Матем. сборник, **201** (2010), No. 6, 131–158.

[21] E. A. Sevost'yanov, *The Väisälä inequality for mappings with finite length distortion* // Complex Variables and Elliptic Equations, **55** (2010), No. 1–3, 91–101.

[22] Е. А. Севостьянов, *О локальном поведении отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности* // Сиб. матем. ж., **53** (2012), No. 3, 648–662.

[23] Е. А. Севостьянов, *Теория модулей, ёмкостей и нормальные семейства отображений, допускающих ветвление* // Укр. матем. вестник, **4** (2007), No. 4, 582–604.

[24] Е. А. Севостьянов, *Обобщение одной леммы Е.А. Полецкого на классы пространственных отображений* // Укр. матем. ж., **61** (2009), No. 7, 969–975.

[25] Е. А. Севостьянов, Р. Р. Салимов, *О внутренних дилатациях отображений с неограниченной характеристикой* // Укр. матем. вестник, **8** (2011), No. 1, 129–143.

[26] J. Väisälä., *Lectures on n–Dimensional Quasiconformal Mappings*, Lecture Notes in Math., **229**, Berlin etc.: Springer–Verlag, 1971.

[27] J. Väisälä, *Modulus and capacity inequalities for quasiregular mappings* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A 1 Math., **509** (1972), 1–14.

Сведения об авторах

Руслан Радикович Салимов — Институт математики НАН Украины
E-Mail: `ruslan623@yandex.ru`

Евгений Александрович Севостьянов — Житомирский государственный университет имени Ивана Франко
E-Mail: `brusin2006@rambler.ru`