Український математичний вісник
Том 12 **(2015)**, № 4, 484 – 510

Нижние Q-гомеоморфизмы относительно p-модуля

Руслан Р. Салимов

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Аннотация. Статья посвящена развитию теории нижних Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Для таких классов отображений установлен целый ряд теорем о локальном поведении и, в частности, доказан аналог известной теоремы Геринга о локальной липшицевости, приведены различные теоремы об оценке искажения евклидовых расстояний, установлена оценка меры образа шара и, как следствие, получен аналог леммы Икома–Шварца.

2010 MSC. 30C65, 30C75.

Ключевые слова и фразы. p-модуль семейства кривых, p-ёмкость конденсатора, отображения квазиконформные в среднем, нижние Q-гомеоморфизмы относительно p-модуля, локальное поведение.

1. Введение

Модули семейств кривых и поверхностей являются основным инструментом для исследования в геометрической теории функций. Развитие метода модулей, происходившее в последнее время, тесно связано с современными классами отображений, см., напр., монографии [2, 12], и уравнениями в частных производных, см., напр., монографии [3] и [6]. Смотри также недавние книги по теории модулей и ёмкостей [5] и [6], а также следующие статьи и монографии [7]– [55] и дальнейшие ссылки в них.

Следуя [12, разд. 9.2, гл. 9], далее *k-мерной поверхностью S* в $\mathbb{R}^n$ называется произвольное непрерывное отображение $S : \omega \to \mathbb{R}^n$, где ω — открытое множество в $\overline{\mathbb{R}^k} := \mathbb{R}^k \cup \{\infty\}$ и $k = 1, \ldots, n-1$. *Функцией кратности* поверхности S называется число прообразов

$$N(S, y) = \operatorname{card} S^{-1}(y) = \operatorname{card}\{x \in \omega :\ S(x) = y\}, \quad y \in \mathbb{R}^n .$$

Статья поступила в редакцию 09.11.2015

ISSN 1810 – 3200.

Другими словами, символ $N(S,y)$ обозначает кратность накрытия точки y поверхностью S. Известно, что функция кратности является полунепрерывной снизу, и, значит, измерима относительно произвольной хаусдорфовой меры H^k, см., [12, разд. 9.2].

Для борелевской функции $\rho : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ ее *интеграл над поверхностью* S определяется равенством

$$\int\limits_S \rho\, d\mathcal{A} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(y)\, N(S,y)\, dH^k y\,. \tag{1.1}$$

Пусть Γ — семейство k-мерных поверхностей S. Борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ, пишут $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, если

$$\int\limits_S \rho^k\, d\mathcal{A} \geqslant 1$$

для каждой поверхности $S \in \Gamma$. Пусть $p \in (1,\infty)$ — заданное фиксированное число. Тогда *p-модулем* семейства Γ называется величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x)\, dm(x)\,.$$

Будем говорить, что свойство P имеет место для *p-почти всех* (p-п.в.) k-мерных поверхностей S семейства Γ, если подсемейство всех поверхностей семейства Γ, для которых свойство P нарушается, имеет p-модуль нуль.

Говорят, см. [12, разд. 9.2], что измеримая по Лебегу функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ является *обобщённо p-допустимой* для семейства Γ, состоящего из $(n-1)$ — мерных поверхностей S в $\mathbb{R}^n$, пишут $\rho \in \operatorname{ext}_p \operatorname{adm}\Gamma$, если

$$\int\limits_S \rho^{n-1}(x)\, d\mathcal{A} \geqslant 1 \tag{1.2}$$

для p-почти всех $S \in \Gamma$.

В работе [44, разд. 13], Ф. Геринг определил K-квазиконформное отображение как гомеоморфизм, изменяющий модуль кольцевой области не более чем в K раз. Следующее понятие мотивировано кольцевым определением Геринга.

Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in D$, $Q : D \to (0,\infty)$ — измеримая по Лебегу функция. Гомеоморфизм $f : D \to D'$ будем называть *нижним Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля в точке x_0*, если

$$M_p\left(f\Sigma_R\right) \geqslant \inf_{\rho \in \mathrm{ext_p} \operatorname{adm}\Sigma_R} \int\limits_R \frac{\rho^p(x)}{Q(x)}\, dm(x) \tag{1.3}$$

для каждого кольца

$$R = R(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon_1 < |x - x_0| < \varepsilon_2\}, 0 < \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2 < d_0,$$

где $d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, а Σ_R обозначает семейство всех сфер

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}, \qquad r \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2). \tag{1.4}$$

Развиваемая в работе теория нижних Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля применима, в частности, к отображениям квазиконформным в среднем, см. [13, 40], и к так называемым (p, q)-квазиконформным отображениям, см. [8], которые использовались при изучении проблемы Ю. Решетняка о суперпозиции функций пространств Соболева, см. напр., [8–11].

Заметим, что соответствующий плоский случай был изучен в работе [62], где установлено, что любой гомеоморфизм f конечного искажения на плоскости является нижним Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля.

В работах [63, 64] и [65] приводятся приложения нижних Q-гомеоморфизмов к исследованию локального и граничного поведения гомеоморфных решений с обобщенными производными и к задаче Дирихле для уравнений Бельтрами с вырождением.

Исторически нижним Q-гомеоморфизмам относительно p-модуля предшествовали Q-гомеоморфизмы, которые исследовались в работах [23, 66–68]. Кроме того, Q-отображения допускающие точки ветвления, изучались в работах [20, 69, 70, 72].

2. О емкости конденсатора

Следуя работе [51], пару $\mathcal{E} = (A, C)$, где $A \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и C — непустое компактное множество, содержащееся в A, называем *конденсатором*. Конденсатор $\mathcal{E}$ называется *кольцевым конденсатором*, если $G = A \setminus C$ — кольцо, т.е., если G — область, дополнение которой $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus G$ состоит в точности из двух компонент. Говорят также, что конденсатор $\mathcal{E} = (A, C)$ лежит в области D, если $A \subset D$. Очевидно, что если $f : D \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное, открытое отображение и $\mathcal{E} = (A, C)$ — конденсатор в D, то (fA, fC) также конденсатор в fD. Далее $f\mathcal{E} = (fA, fC)$.

Функция $u : A \to \mathbb{R}$ *абсолютно непрерывна на прямой*, имеющей непустое пересечение с A, если она абсолютно непрерывна на любом отрезке этой прямой, заключенном в A. Функция $u : A \to \mathbb{R}$ принадлежит классу ACL (*абсолютно непрерывна на почти всех прямых*), если она абсолютно непрерывна на почти всех прямых, параллельных любой координатной оси.

Обозначим через $C_0(A)$ множество непрерывных функций $u : A \to \mathbb{R}^1$ с компактным носителем, $W_0(\mathcal{E}) = W_0(A, C)$ — семейство неотрицательных функций $u : A \to \mathbb{R}^1$ таких, что 1) $u \in C_0(A)$, 2) $u(x) \geqslant 1$ для $x \in C$ и 3) u принадлежит классу ACL. Также обозначим

$$|\nabla u| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2}. \tag{2.1}$$

Пусть D — область в $\mathbb{R}^n\,, n \geqslant 2$. $E\,, F \subseteq D$— произвольные множества. Обозначим через $\Delta(E, F; D)$ семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, которые соединяют E и F в D, т.е. $\gamma(a) \in E\,, \gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $a < t < b$.

При $p \geqslant 1$ величину

$$\mathrm{cap}_{\mathrm{p}}\, \mathcal{E} = \mathrm{cap}_{\mathrm{p}}\, (A, C) = \inf_{u \in W_0(\mathcal{E})} \int\limits_A |\nabla u|^p \, dm(x) \tag{2.2}$$

называют *p-ёмкостью* конденсатора $\mathcal{E}$.

В дальнейшем при $p > 1$ мы будем использовать равенство

$$\mathrm{cap}_{\mathrm{p}}\, \mathcal{E} = M_p(\Delta(\partial A, \partial C; A \setminus C)) \tag{2.3}$$

см. [28, теорема 1].

Известно, что при $p \geqslant 1$

$$\mathrm{cap}_p\, \mathcal{E} \geqslant \frac{(\inf m_{n-1}\, \sigma)^p}{[m(A \setminus C)]^{p-1}}, \tag{2.4}$$

где $m_{n-1}\, \sigma$ — $(n-1)$-мерная мера Лебега C^{∞}-многообразия σ, являющегося границей $\sigma = \partial U$ ограниченного открытого множества U, содержащего C и содержащегося вместе со своим замыканием $\overline{U}$ в A, а точная нижняя грань берется по всем таким σ, см. [13, предложение 5].

Известно, что при $1 < p < n$

$$\mathrm{cap}_{\mathrm{p}}\, \mathcal{E} \geqslant n \Omega_n^{\frac{p}{n}} \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1} [m(C)]^{\frac{n-p}{n}}\ , \tag{2.5}$$

где Ω_n — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$, см., напр., [50, неравенство (8.9)].

Если множество C связно, то при $n-1 < p \leqslant n$ имеет место оценка

$$(\mathrm{cap_p}\ \mathcal{E})^{n-1} \geqslant \gamma\, \frac{d(C)^p}{m(A)^{1-n+p}}\ , \tag{2.6}$$

где $d(C)$ — диаметр множества C, γ — положительная константа, зависящая только от размерности n и p, см. [13, предложение 6].

3. Переход к верхним оценкам

Ниже приведен критерий нижних Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля при $p > n-1$, см. теорему 3.7 в монографии [2]. Впервые критерий был доказан при $p = n$ в работе [18, теорема 2.1], см. также монографию [12, теорема 9.2].

Лемма 3.1. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in D$. Предположим, что $Q : D \to (0, \infty)$ — измеримая функция. Гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{R}^n$ является нижним Q-гомеоморфизмом в точке x_0 относительно p-модуля при $p > n-1$ тогда и только тогда, когда*

$$M_p(f\Sigma_R) \geqslant \int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{dr}{||\,Q||_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r)} \quad \forall \quad 0 < \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2 < d_0, \tag{3.1}$$

где $d_0 = \mathrm{dist}(x_0, \partial D)$, Σ_R — семейство всех сфер $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |\,x - x_0| = r\}$, $r \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, и

$$\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r) = \left(\int\limits_{S(x_0,r)} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\, d\mathcal{A} \right)^{\frac{p-n+1}{n-1}}. \tag{3.2}$$

Инфимум в (1.3) достигается только для функции

$$\rho_0(x) = \left(\frac{Q(x)}{\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(|x - x_0|)} \right)^{\frac{1}{p-n+1}}. \tag{3.3}$$

Ниже мы используем стандартные соглашения, что $a/\infty = 0$ для $a \neq \infty$, $a/0 = \infty$, если $a > 0$, и $0 \cdot \infty = 0$, см., напр., [19].

Пусть (X, μ) — измеримое пространство с конечной мерой μ, и пусть $\varphi : X \to \mathbb{R}$ — измеримая функция. Для любого измеримого множества $E \subset X$ обозначим

$$\fint\limits_E \varphi(x)\, d\mu(x) = \frac{1}{\mu(E)} \int\limits_E \varphi(x)\, d\mu(x)\,. \tag{3.4}$$

Лемма 3.2. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Предположим, что $Q : D \to (0,\infty)$ — измеримая по Лебегу функция и $f : D \to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм в точке x_0 относительно p-модуля при $p > n-1$. Тогда имеет место оценка*

$$M_{\frac{p}{p-n+1}}\left(\Delta(fS_1, fS_2, fD)\right) \leqslant \left(\int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{dr}{\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r)}\right)^{-\frac{n-1}{p-n+1}}, \tag{3.5}$$

где $S_j = S(x_0, \varepsilon_j), j = 1, 2.$

Доказательство. Действительно, пусть $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < d(x_0, \partial D)$ и $S_i = S(x_0, \varepsilon_i)$, $i = 1, 2$. Согласно неравенствам Хессе и Цимера (см., напр., [47] и [55]),

$$M_{\frac{p}{p-n+1}}\left(f\left(\Delta(S_1, S_2, D)\right)\right) \leqslant \frac{1}{M_p^{\frac{n-1}{p-n+1}}(f\Sigma_R)}\,, \tag{3.6}$$

поскольку $f\Sigma_R \subset \Sigma\left(fS_1, fS_2, fD\right)$, где Σ_R обозначает совокупность всех сфер с центром в точке x_0, расположенных между сферами S_1 и S_2, а $\Sigma\left(fS_1, fS_2, fD\right)$ состоит из всех $(n-1)$-мерных поверхностей в fD, отделяющих fS_1 и fS_2. Из соотношения (3.6) по лемме 3.1 вытекает заключение леммы 3.2. □

Лемма 3.3. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Предположим, что $Q : D \to (0,\infty)$ — измеримая по Лебегу функция такая, что $\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r) \neq \infty$ для п.в. $r \in (0, d_0)$, $d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$ и $f : D \to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм в точке x_0 относительно p-модуля при $p > n-1$. Полагаем*

$$\eta_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{I\,\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,t)}\,, & \text{если} \;\; t \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2), \\ 0, & \text{если} \;\; t \notin (\varepsilon_1, \varepsilon_2), \end{cases} \tag{3.7}$$

где

$$\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r) = \left(\int\limits_{S(x_0,r)} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\, d\mathcal{A}\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}} \tag{3.8}$$

и

$$I = I(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{dr}{||\,Q||_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r)}\,. \tag{3.9}$$

Тогда имеет место оценка

$$I^{-\frac{n-1}{p-n+1}} = \int\limits_{R} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\,\eta_0^{\frac{p}{p-n+1}}(|x-x_0|)\,dm(x)$$
$$\leqslant \int\limits_{R} Q(x)^{\frac{n-1}{p-n+1}}\,\eta^{\frac{p}{p-n+1}}(|x-x_0|)\,dm(x) \qquad (3.10)$$

для любой измеримой функции $\eta:(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\to[0,\infty]$, *такой что*

$$\int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\eta(r)dr=1. \qquad (3.11)$$

Доказательство. Если $I=\infty$, то левая часть соотношения (3.10) равна нулю и неравенство в этом случае очевидно. Если $I=0$, то $\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r)=\infty$ для п.в. $r\in(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ и обе части неравенства (3.10) равны бесконечности по теореме Фубини. Пусть теперь $0<I<\infty$. Тогда $\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r)\neq 0$ и $\eta_0(r)\neq\infty$ п.в. в $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$. Полагая

$$\alpha(r)=\eta(r)\cdot\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r)$$

и

$$\omega(r)=\frac{1}{\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r)}\,,$$

по стандартным соглашениям будем иметь, что $\eta(r)=\alpha(r)\omega(r)$ п.в. в $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ и что

$$C:=\int\limits_{R} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\,\eta^{\frac{p}{p-n+1}}(|x-x_0|)\ dm(x)=\int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\alpha^{\frac{p}{p-n+1}}(r)\,\omega(r)\ dr.$$

Применяя неравенство Иенсена с весом, см. теорему 2.6.2 в [74], к выпуклой функции $\varphi(t)=t^{\frac{p}{p-n+1}}$, заданной в интервале $\Omega=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, с вероятностной мерой

$$\nu(E)=\frac{1}{I}\int\limits_{E}\omega(r)\ dr,$$

получаем что

$$\left(⨍\alpha^{\frac{p}{p-n+1}}(r)\,\omega(r)\,dr\right)^{\frac{p-n+1}{p}}\geqslant ⨍\alpha(r)\,\omega(r)\ dr=\frac{1}{I},$$

где мы также использовали тот факт, что $\eta(r)=\alpha(r)\omega(r)$ удовлетворяет соотношению (3.11). Таким образом,

$$C \geqslant I^{-\frac{n-1}{p-n+1}},$$

что и доказывает (3.10). $\Box$

Лемма 3.4. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$. Предположим, что $Q: D\to(0,\infty)$ — измеримая по Лебегу функция такая, что $\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r)\neq\infty$ для п.в. $r\in(0,d_0)$, $d_0=\operatorname{dist}(x_0,\partial D)$ и $f: D\to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм в точке x_0 относительно p-модуля при $p>n-1$. Тогда для $f\mathcal{E}=\left(fB(x_0,\varepsilon_2),\overline{fB(x_0,\varepsilon_1)}\right)$ имеет место оценка*

$$\operatorname{cap}_{\frac{p}{p-n+1}}\ f\mathcal{E}\leqslant\int\limits_{R} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\ \eta^{\frac{p}{p-n+1}}(|x-x_0|)\ dm(x)\,, \tag{3.12}$$

для каждого кольца $R=R(x_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2<d_0$ и любой измеримой по Лебегу функции $\eta:(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\to[0,\infty]$, такой что

$$\int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\eta(r)dr=1. \tag{3.13}$$

Доказательство. Рассмотрим сферическое кольцо

$$R=R(x_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$$

с $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2<d_0=\operatorname{dist}(x_0,\partial D)$. Пусть $\Gamma^*=\Delta(fS_1,fS_2,fR)$, где $S_j=S(x_0,r_j)$, $j=1,2$ и $\mathcal{E}=\left(B\left(x_0,\varepsilon_2\right),\overline{B\left(x_0,\varepsilon_1\right)}\right)$ — кольцевой конденсатор в D. Тогда $\left(fB\left(x_0,\varepsilon_2\right),\overline{fB\left(x_0,\varepsilon_1\right)}\right)$ — кольцевой конденсатор в D' и, согласно (2.3), имеем равенство

$$\operatorname{cap}_{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p-n+1}}}\ \left(fB\left(x_0,\varepsilon_2\right),\overline{fB\left(x_0,\varepsilon_1\right)}\right)=M_{\frac{p}{p-n+1}}\left(\Gamma^*\right)\,, \tag{3.14}$$

а ввиду гомеоморфности f, равенство

$$\triangle\left(\partial fB\left(x_0,\varepsilon_2\right),\partial fB\left(x_0,\varepsilon_1\right);fR\right)=f\left(\triangle\left(\partial B(x_0,\varepsilon_2),\partial B(x_0,\varepsilon_1);R\right)\right).$$

Из соотношений (3.14) и (3.10) по лемме 3.2 вытекает заключение леммы 3.4. $\Box$

4. Гельдеровость и липшицевость нижних Q-гомеоморфизмов

Лемма 4.1. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Предположим, что $Q : D \to (0, \infty)$ — измеримая по Лебегу функция и $f : D \to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм в точке x_0 относительно p-модуля при $p > n$. Если для $\lambda > 1$ и $\sigma > 0$*

$$\varepsilon^{\sigma} \int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \frac{dr}{\| Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r)} \geqslant C_{x_0}, \tag{4.1}$$

для любого $0 < \varepsilon < \frac{\operatorname{dist}(x_0, \partial D)}{\lambda}$, то

$$\operatorname{cap}_{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p-n+1}}} \left(fB\left(x_0, \lambda\varepsilon\right), \overline{fB\left(x_0, \varepsilon\right)}\right) \leqslant C_{x_0}^{-\frac{n-1}{p-n+1}} \varepsilon^{\frac{\sigma(n-1)}{p-n+1}} . \tag{4.2}$$

Доказательство. Рассмотрим сферическое кольцо

$$R = R(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \subset D$$

с $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Тогда $\left(B\left(x_0, \varepsilon_2\right), \overline{B\left(x_0, \varepsilon_1\right)}\right)$ — кольцевой конденсатор в D и $\left(fB\left(x_0, \varepsilon_2\right), \overline{fB\left(x_0, \varepsilon_1\right)}\right)$ — кольцевой конденсатор в D'.

Пусть $\Gamma^* = \Delta(fS_1, fS_2, fR)$, где $S_j = S(x_0, r_j), j = 1, 2$. Тогда согласно (2.3), имеем равенство

$$\operatorname{cap}_{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p-n+1}}} \left(fB\left(x_0, \varepsilon_2\right), \overline{fB\left(x_0, \varepsilon_1\right)}\right) = M_{\frac{p}{p-n+1}}\left(\Gamma^*\right) . \tag{4.3}$$

По лемме 3.2 получаем, что

$$\operatorname{cap}_{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p-n+1}}} \left(fB\left(x_0, \varepsilon_2\right), \overline{fB\left(x_0, \varepsilon_1\right)}\right) \leqslant \left(\int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{dr}{\| Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r)}\right)^{-\frac{n-1}{p-n+1}}, \tag{4.4}$$

где $\| Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r) = \left(\int\limits_{S(x_0, r)} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\, d\mathcal{A}\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}}$.

Далее, выбирая в (4.4) $\varepsilon_1 = \varepsilon < \frac{\operatorname{dist}(x_0, \partial D)}{\lambda}$ и $\varepsilon_2 = \lambda\varepsilon$, получим

$$\operatorname{cap}_{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p-n+1}}} \left(fB\left(x_0, \lambda\varepsilon\right), \overline{fB\left(x_0, \varepsilon\right)}\right) \leqslant \left(\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \frac{dr}{\| Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r)}\right)^{-\frac{n-1}{p-n+1}}. \tag{4.5}$$

Из условия (4.1) вытекает оценка

$$\operatorname{cap}_{\frac{p}{p-n+1}}\left(fB\left(x_0,\lambda\varepsilon\right),\overline{fB\left(x_0,\varepsilon\right)}\right)\leqslant C_{x_0}^{-\frac{n-1}{p-n+1}}\,\varepsilon^{\frac{\sigma(n-1)}{p-n+1}}\,. \tag{4.6}$$

□

Теорема 4.1. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$. Предположим, что $Q:D\to(0,\infty)$ — измеримая по Лебегу функция и $f:D\to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм в точке x_0 относительно p-модуля при $p>n$. Если для $\lambda>1$ и $\sigma>0$*

$$\varepsilon^{\sigma}\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon}\frac{dr}{\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r)}\geqslant C_{x_0} \tag{4.7}$$

для любого $0<\varepsilon<\frac{\operatorname{dist}(x_0,\partial D)}{\lambda}$, то

$$m\left(\overline{fB(x_0,\varepsilon)}\right)\leqslant \nu_0 C_{x_0}^{-\frac{n}{p-n}}\,\varepsilon^{\frac{\sigma n}{p-n}}\,, \tag{4.8}$$

где ν_0 — положительная постоянная, зависящая только от n и p.

Доказательство. Пусть $\varepsilon\in\left(0,\frac{\operatorname{dist}(x_0,\partial D)}{\lambda}\right)$. Рассмотрим конденсатор

$$\left(fB\left(x_0,\lambda\varepsilon\right),\overline{fB\left(x_0,\varepsilon\right)}\right)\,.$$

В силу леммы 4.1, имеем оценку:

$$\operatorname{cap}_{\frac{p}{p-n+1}}\left(fB\left(x_0,\lambda\varepsilon\right),\overline{fB\left(x_0,\varepsilon\right)}\right)\leqslant C_{x_0}^{-\frac{n-1}{p-n+1}}\,\varepsilon^{\frac{\sigma(n-1)}{p-n+1}}. \tag{4.9}$$

Используя соотношение (2.5), получаем

$$\operatorname{cap}_{\frac{p}{p-n+1}}\left(fB\left(x_0,\lambda\varepsilon\right),\overline{fB\left(x_0,\varepsilon\right)}\right)\geqslant \nu_1\,\left[m(fB(x_0,\varepsilon))\right]^{\frac{n(p-n+1)-p}{n(p-n+1)}}\,, \tag{4.10}$$

где ν_1 — константа, зависящая только от размерности пространства n и p.

Комбинируя (4.9) и (4.10), заключаем, что

$$m\left(\overline{fB(x_0,\varepsilon)}\right)\leqslant \nu_0\, C_{x_0}^{-\frac{n}{p-n}}\,\varepsilon^{\frac{\sigma n}{p-n}}\,, \tag{4.11}$$

где ν_0 — положительная постоянная, зависящая только от n и p. □

Теорема 4.2. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Предположим, что $Q : D \to (0,\infty)$ — измеримая по Лебегу функция и $f : D \to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм в точке x_0 относительно p-модуля при $p \in \left(n, n+\frac{1}{n-2}\right)$. Если для $\lambda > 1$ и $\sigma > 0$*

$$\varepsilon^{\sigma} \int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \frac{dr}{\| Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r)} \geqslant C_{x_0} \tag{4.12}$$

для любого $0 < \varepsilon < \delta_0 \leqslant \frac{\mathrm{dist}\,(x_0, \partial D)}{\lambda^2}$, то

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \nu_0\, C_{x_0}^{-\frac{1}{p-n}}\, |x - x_0|^{\frac{\sigma}{p-n}} \tag{4.13}$$

для всех $x \in B(x_0, \delta_0)$ и ν_0 — положительная константа, зависящая только от размерности пространства n, p, λ и σ.

Доказательство. Полагаем $\varepsilon = |x - x_0| < \delta_0$. Рассмотрим конденсатор

$$\left(fB\,(x_0, \lambda\varepsilon)\,, \overline{fB\,(x_0, \varepsilon)}\right)\,. \tag{4.14}$$

Из леммы 4.1 следует оценка

$$\mathrm{cap}_{\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{p-n+1}}}\ \left(fB\,(x_0, \lambda\varepsilon)\,, \overline{fB\,(x_0, \varepsilon)}\right) \leqslant C_{x_0}^{-\frac{n-1}{p-n+1}}\, \varepsilon^{\frac{\sigma(n-1)}{p-n+1}}. \tag{4.15}$$

С другой стороны, согласно неравенству (2.6), получаем

$$\mathrm{cap}_{\frac{p}{p-n+1}}\ \left(fB\,(x_0, \lambda\varepsilon)\,, \overline{fB\,(x_0, \varepsilon)}\right) \geqslant \left(\nu_1 \frac{d^{j_1}(\overline{fB\,(x_0, \varepsilon)})}{m^{j_2}(fB(x_0, \lambda\varepsilon))}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \tag{4.16}$$

где $j_1 = \frac{p}{p-n+1}$, $j_2 = 1 - n + \frac{p}{p-n+1}$, ν_1 — положительная константа, зависящая только от размерности пространства n и p.

Из (4.15) и (4.16) следует, что

$$d\left(\overline{fB\,(x_0, \varepsilon)}\right) \leqslant \nu_2\, C_{x_0}^{\frac{-(n-1)^2}{p}}\, \varepsilon^{\frac{\sigma(n-1)^2}{p}}\, [m(fB(x_0, \lambda\varepsilon))]^{\frac{(1-n)(p-n+1)+p}{p}}, \tag{4.17}$$

где ν_2 — положительная константа, зависящая только от размерности пространства n и p.

Из теоремы 4.1 вытекает оценка для меры образа шара $B(x_0, \lambda\varepsilon)$

$$m(fB(x_0, \lambda\varepsilon)) \leqslant \nu_3\, C_{x_0}^{-\frac{n}{p-n}}\, \lambda^{\frac{\sigma n}{p-n}}\, \varepsilon^{\frac{\sigma n}{p-n}}\,, \tag{4.18}$$

где ν_3 — положительная константа, зависящая только от размерности пространства n и p.

Наконец, комбинируя (4.17) и (4.18), получаем

$$d\left(\overline{fB\left(x_0,\varepsilon\right)}\right) \leqslant \nu_0 C_{x_0}^{-\frac{1}{p-n}} \varepsilon^{\frac{\sigma}{p-n}},$$

где ν_0 — положительная константа, зависящая только от размерности пространства n, p, λ и σ.

Оценка искажения расстояний вытекает из очевидного неравенства $d\left(\overline{fB\left(x_0,\varepsilon\right)}\right) \geqslant |f(x)-f(x_0)|$. □

Ниже приведен аналог известной теоремы Геринга о локальной липшицевости, см. [46, теорема 2].

Теорема 4.3. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Предположим, что $Q : D \to (0,\infty)$ — измеримая по Лебегу функция и $f : D \to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм в точке x_0 относительно p-модуля при $p \in \left(n, n+\frac{1}{n-2}\right)$. Если*

$$\left(\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}} \int\limits_{S(x_0,r)} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\, d\mathcal{A}\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}} \leqslant q_{x_0} \tag{4.19}$$

для п.в. $r \in \left(0, \frac{\operatorname{dist}(x_0,\partial D)}{e^2}\right)$, то

$$|f(x)-f(x_0)| \leqslant \nu_0\, q_{x_0}^{\frac{1}{p-n}}\, |x-x_0| \tag{4.20}$$

для всех $x \in B(x_0,\delta_0)$, где $0<\delta \leqslant \frac{\operatorname{dist}(x_0,\partial D)}{e^2}$ и ν_0 — положительная константа, зависящая только от размерности пространства n и p.

Доказательство. Из условия (4.19) теоремы вытекает оценка

$$\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r) = \left(\int\limits_{S(x_0,r)} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\, d\mathcal{A}\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}} \leqslant \omega_{n-1}^{\frac{p-n+1}{n-1}}\, q_{x_0}\, r^{p-n+1}. \tag{4.21}$$

Пусть $\lambda = e$ и $\sigma = p-n$.

$$\varepsilon^{p-n} \int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon} \frac{dr}{\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r)} \geqslant \frac{\varepsilon^{p-n}}{\omega_{n-1}^{\frac{p-n+1}{n-1}}\, q_{x_0}} \int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon} \frac{dr}{r^{p-n+1}} \geqslant \frac{e^{n-p}}{\omega_{n-1}^{\frac{p-n+1}{n-1}}\, q_{x_0}}. \tag{4.22}$$

Применяя теорему 4.2, получаем оценку

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant \nu_0\, q_{x_0}^{\frac{1}{p-n}}\,|x-x_0| \tag{4.23}$$

для всех $x\in B(x_0,\delta_0)$, где ν_0 — положительная постоянная, зависящая только от n и p. $\Box$

Следствие 4.1. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$. Предположим, что $f: D\to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм относительно p-модуля при $p\in\left(n, n+\frac{1}{n-2}\right)$. Если $Q(x)\leqslant K$ для п.в. $x\in D$, то*

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant \nu_0\, K^{\frac{1}{p-n}}\,|x-x_0| \tag{4.24}$$

для каждого $x_0\in D$ и $x\in B(x_0,\delta_0)$, $\delta_0\leqslant \frac{\operatorname{dist}(x_0,\partial D)}{e^2}$, где ν_0 — положительная константа, зависящая только от размерности пространства n и p.

Лемма 4.2. *Пусть $Q\in L_\alpha(B(x_0,r_0))$, $\alpha>\frac{n}{p-n}$, $p>n$. Тогда при $\lambda>1$ имеет место оценка*

$$\varepsilon^{\sigma}\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon}\frac{dr}{\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r)}\geqslant\frac{c_0}{\|Q\|_{\alpha}} \tag{4.25}$$

для любого $\varepsilon<\frac{r_0}{\lambda}$, где $\|Q\|_\alpha=\left(\int\limits_{B(x_0,r_0)}Q^{\alpha}(x)\,dm(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, $\sigma=\frac{\alpha(p-n)-n}{\alpha}$ и c_0 — положительная постоянная, зависящая только от n, p, λ и α.

Доказательство. Пусть $\lambda>1$. Заметим, что

$$(\lambda-1)\varepsilon=\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon}\|\,Q\|^{\frac{n-1}{p}}_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r)\cdot\frac{dr}{\|\,Q\|^{\frac{n-1}{p}}_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r)}\,. \tag{4.26}$$

Применяя теорему Фубини и неравенство Гельдера с

$$q=\frac{p}{p-n+1},\quad q'=\frac{p}{n-1}$$

имеем

$$\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon}\frac{dr}{\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r)}\right)^{-\frac{n-1}{p-n+1}}\leqslant\frac{\int\limits_{R}Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\,dm(x)}{((\lambda-1)\varepsilon)^{\frac{p}{p-n+1}}}\,, \tag{4.27}$$

где $R = R(x_0, \varepsilon, \lambda\varepsilon)$.

Применяя еще раз неравенство Гельдера с

$$q = \frac{\alpha(p-n+1)}{n-1} > 1, \quad q' = \frac{\alpha(p-n+1)}{\alpha(p-n+1)-n+1}$$

имеем

$$\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \frac{dr}{\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r)}\right)^{-\frac{n-1}{p-n+1}} \leqslant c_1\,\varepsilon^{\theta}\left(\int\limits_{R} Q^{\alpha}(x)\,dm(x)\right)^{\frac{n-1}{\alpha(p-n+1)}}, \tag{4.28}$$

где $\theta = \frac{(n-1)(\alpha p-\alpha n-n)}{\alpha(p-n+1)}$ и c_1 — положительная постоянная, зависящая только от n, p, λ и α. Отсюда получаем

$$\varepsilon^{\sigma}\int\limits_{\varepsilon}^{\lambda\varepsilon} \frac{dr}{\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r)} \geqslant \frac{c_0}{\|Q\|_{\alpha}}\,, \tag{4.29}$$

где $\|Q\|_{\alpha} = \left(\int\limits_{B(x_0,r_0)} Q^{\alpha}(x)\,dm(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, $\sigma = \frac{\alpha(p-n)-n}{\alpha}$ и c_0 — положительная постоянная, зависящая только от n, p, λ и α. □

Теорема 4.4. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Предположим, что $Q : D \to (0,\infty)$ — измеримая по Лебегу функция и $f : D \to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм в точке x_0 относительно p-модуля при*

$$p \in \left(n, n+\frac{1}{n-2}\right) \text{ с } Q \in L_{\alpha}(B(x_0,\delta_0)), \delta_0 \leqslant \frac{\operatorname{dist}(x_0,\partial D)}{4}, \alpha > \frac{n}{p-n}.$$

Тогда

$$|f(x)-f(x_0)| \leqslant \nu_0 \|Q\|_{\alpha}^{\frac{1}{p-n}} |x-x_0|^{1-\frac{n}{\alpha(p-n)}} \tag{4.30}$$

для всех $x \in B(x_0,\delta_0)$, где $\|Q\|_{\alpha} = \left(\int\limits_{B(x_0,\delta_0)} Q^{\alpha}(x)\,dm(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ — норма в пространстве $L_{\alpha}(B(x_0,\delta_0))$ и ν_0 — положительная постоянная, зависящая только от n, p и α.

Доказательство. Пусть $\lambda = 2$. Поскольку $Q \in L_{\alpha}(B(x_0,\delta_0))$ и $\alpha > \frac{n}{p-n}$, то из Леммы 4.2 следует, что функция Q удовлетворяет условию (4.12) с $\sigma = \frac{\alpha(p-n)-n}{\alpha}$, $C_{x_0} = \frac{c_0}{\|Q\|_{\alpha}}$. Применяя теорему 4.2, получаем оценку

$$|f(x)-f(x_0)| \leqslant \nu_0\,\|Q\|_{\alpha}^{\frac{1}{p-n}}\,|x-x_0|^{1-\frac{n}{\alpha(p-n)}} \tag{4.31}$$

для всех $x \in B(x_0,\delta_0)$, где $\|Q\|_\alpha = \left(\int\limits_{B(x_0,\delta_0)} Q^\alpha(x)\,dm(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ — норма в пространстве $L_\alpha(B(x_0,\delta_0))$ и ν_0 — положительная постоянная, зависящая только от n, p и α. □

5. О логарифмической гельдеровости

Ниже приведена лемма об оценке искажения $\frac{p}{p-n+1}$-емкости образа сферического конденсатора.

Лемма 5.1. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Предположим, что $Q : D \to (0,\infty)$ — измеримая по Лебегу функция такая, что $\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r) \neq \infty$ для п.в. $r \in (0,d_0)$, $d_0 = \operatorname{dist}(x_0,\partial D)$ и $f : D \to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм в точке x_0 относительно p-модуля при $p > n$. Если*

$$\int\limits_{R(x_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \frac{Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\,dm(x)}{|x-x_0|^{\frac{p}{p-n+1}}} \leqslant C_{x_0}\,\ln^{\kappa}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right), \quad 0 \leqslant \kappa < \frac{p}{p-n+1} \tag{5.1}$$

для любых $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \operatorname{dist}(x_0,\partial D)$, *то*

$$\operatorname{cap}_{\frac{p}{p-n+1}}\left(fB(x_0,\varepsilon_2),\overline{fB(x_0,\varepsilon_1)}\right) \leqslant C_{x_0}\,\ln^{\epsilon}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right), \tag{5.2}$$

где $\epsilon = \frac{\kappa(p-n+1)-p}{p-n+1}$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in D$. Рассмотрим сферическое кольцо

$$R = R(x_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \{x :\ \varepsilon_1 < |x_0 - x| < \varepsilon_2\},$$

с произвольными ε_1 и ε_2 такими, что $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < d_0$. Тогда

$$\mathcal{E} = \left(B(x_0,\varepsilon_2),\overline{B(x_0,\varepsilon_1)}\right)$$

— конденсатор в D, а

$$f\mathcal{E} = \left(fB\left(x_0,\varepsilon_2\right), f\overline{B\left(x_0,\varepsilon_1\right)}\right)$$

— конденсатор в D'. Заметим, что функция

$$\eta(t) = \begin{cases} \frac{1}{t\ln\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)}, & \text{если } \ t \in (\varepsilon_1,\varepsilon_2), \\ 0, & \text{если } \ t \notin (\varepsilon_1,\varepsilon_2)\,. \end{cases}$$

удовлетворяет условию (3.13). Тогда в силу Леммы 3.4 имеем

$$\operatorname{cap}_{\frac{p}{p-n+1}} f\mathcal{E} \leqslant \ln^{-\frac{p}{p-n+1}}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right) \int\limits_{R(x_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \frac{Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\, dm(x)}{|x-x_0|^p}\,. \tag{5.3}$$

Из условия (5.1) вытекает оценка (5.2). □

Теорема 5.1. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Предположим, что $Q : D \to (0,\infty)$ — измеримая по Лебегу функция такая, что $\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0,r) \neq \infty$ для п.в. $r \in (0,d_0)$, $d_0 = \operatorname{dist}(x_0,\partial D)$ и $f : D \to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм в точке $x_0 \in D$ относительно p-модуля при $p > n$. Если*

$$\int\limits_{R(x_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \frac{Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\, dm(x)}{|x-x_0|^{\frac{p}{p-n+1}}} \leqslant C_{x_0} \ln^{\kappa}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right), \quad 0 \leqslant \kappa < \frac{p}{p-n+1} \tag{5.4}$$

для любых $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \operatorname{dist}(x_0,\partial D)$, то

$$m\left(\overline{fB(x_0,\varepsilon)}\right) \leqslant \nu_0 C_{x_0}^{n\gamma} \ln^{-n\theta}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{5.5}$$

для всех $\varepsilon < \delta_0 \leqslant \min\{1, \operatorname{dist}^2(x_0,\partial D)\}$, где $\gamma = \frac{p-n+1}{(n-1)(p-n)}$, $\theta = \frac{p-\kappa(p-n+1)}{(n-1)(p-n)}$ и ν_0 — положительная постоянная, зависящая только от n, p и κ.

Доказательство. Пусть $\varepsilon < \delta_0 \leqslant \min\{1, \operatorname{dist}^2(x_0,\partial D)$. Рассмотрим конденсатор $\mathcal{E}_\varepsilon = \left(B(x_0,\sqrt{\varepsilon}), \overline{B(x_0,\varepsilon)}\right)$. В силу леммы 5.1, имеем оценку:

$$\operatorname{cap}_{\frac{p}{p-n+1}} f\mathcal{E}_\varepsilon \leqslant \nu_1\, C_{x_0} \ln^{\frac{\kappa(p-n+1)-p}{p-n+1}}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \tag{5.6}$$

где ν_1 — положительная постоянная, зависящая только от n, p и κ.

Используя соотношение (2.5), получаем

$$\operatorname{cap}_{\frac{p}{p-n+1}} f\mathcal{E}_\varepsilon \geqslant \nu_2 \left[m(fB(x_0,\varepsilon))\right]^{\frac{(p-n)(n-1)}{n(p-n+1)}}, \tag{5.7}$$

где ν_2 — константа, зависящая только от размерности пространства n и p.

Комбинируя (5.6) и (5.7), заключаем, что

$$m\left(\overline{fB(x_0,\varepsilon)}\right) \leqslant \nu_0\, C_{x_0}^{\frac{n(p-n+1)}{(n-1)(p-n)}} \ln^{-\frac{n(p-\kappa(p-n+1))}{(n-1)(p-n)}}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \tag{5.8}$$

где ν_0 — положительная постоянная, зависящая только от n, p и κ. □

Теорема 5.2. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Предположим, что $Q : D \to (0,\infty)$ — измеримая по Лебегу функция такая, что $\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r) \neq \infty$ для п.в. $r \in (0, d_0)$, $d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$ и $f : D \to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм в точке $x_0 \in D$ относительно p-модуля при $p \in \left(n, n + \frac{1}{n-2}\right)$. Если*

$$\int\limits_{R(x_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \frac{Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\, dm(x)}{|x-x_0|^{\frac{p}{p-n+1}}} \leqslant C_{x_0} \ln^{\kappa}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right), \quad 0 \leqslant \kappa < \frac{p}{p-n+1} \tag{5.9}$$

для любых $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, то

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \nu_0\, C_{x_0}^{\gamma} \ln^{-\theta} \frac{1}{|x-x_0|}\,, \tag{5.10}$$

для всех $x \in B(x_0, \delta_0)$, где $\gamma = \frac{p-n+1}{(n-1)(p-n)}$, $\theta = \frac{p-\kappa(p-n+1)}{(n-1)(p-n)}$, $\delta_0 \leqslant \min\{1, \operatorname{dist}^4(x_0, \partial D)\}$ и ν_0 — положительная постоянная, зависящая только от n, p и κ.

Доказательство. Полагаем $\varepsilon = |x - x_0| < \delta_0$. Рассмотрим конденсатор

$$\mathcal{E}_\varepsilon = \left(B\left(x_0, \sqrt{\varepsilon}\right), \overline{B(x_0, \varepsilon)}\right) .$$

Из леммы 5.1 следует оценка

$$\operatorname{cap}_{\frac{p}{p-n+1}} f\mathcal{E}_\varepsilon \leqslant \nu_1\, C_{x_0} \ln^{\frac{\kappa(p-n+1)-p}{p-n+1}} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \tag{5.11}$$

где ν_1 — положительная постоянная, зависящая только от n, p и κ.

С другой стороны, согласно неравенству (2.6), получаем

$$\operatorname{cap}_{\frac{p}{p-n+1}} f\mathcal{E}_\varepsilon \geqslant \left(\nu_2\, \frac{d^{\frac{p}{p-n+1}}\left(\overline{fB(x_0,\varepsilon)}\right)}{m^{1-n+\frac{p}{p-n+1}}\left(fB(x_0,\sqrt{\varepsilon})\right)}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \tag{5.12}$$

где ν_2 — положительная константа, зависящая только от размерности пространства n и p.

Из (5.11) и (5.12) следует, что

$$d\left(\overline{fB(x_0,\varepsilon)}\right) \leqslant \nu_3\, C_{x_0}^{j_1} \ln^{j_2}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) m^{j_3}(fB(x_0,\sqrt{\varepsilon}))\,, \tag{5.13}$$

где $j_1 = \frac{(n-1)(p-n+1)}{p}$, $j_2 = \frac{(\kappa(p-n+1)-p)(n-1)}{p}$, $j_3 = \frac{(1-n)(p-n+1)+p}{p}$ и ν_3 — положительная константа, зависящая только от размерности пространства n,p и κ.

Из теоремы 5.1 вытекает оценка для меры образа шара $B(x_0,\sqrt{\varepsilon})$

$$m(fB(x_0,\sqrt{\varepsilon})) \leqslant \nu_4\, C_{x_0}^{\frac{n(p-n+1)}{(n-1)(p-n)}}\ \ln^{-\frac{n(p-\kappa(p-n+1))}{(n-1)(p-n)}}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \qquad (5.14)$$

где ν_4 — положительная константа, зависящая только от размерности пространства n,p и κ.

Наконец, комбинируя (5.13) и (5.14), получаем

$$d\left(\overline{fB(x_0,\varepsilon)}\right) \leqslant \nu_0\, C_{x_0}^{\frac{p-n+1}{(n-1)(p-n)}}\ \ln^{-\frac{p-\kappa(p-n+1)}{(n-1)(p-n)}}\frac{1}{\varepsilon},$$

где ν_0 — положительная константа, зависящая только от размерности пространства n,p и κ. Оценка искажения расстояний вытекает из очевидного неравенства $d\left(\overline{fB(x_0,\varepsilon)}\right) \geqslant |f(x)-f(x_0)|$. $\square$

Следствие 5.1. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$. Предположим, что $f: D\to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм в точке $x_0\in D$ относительно p-модуля, $p\in\left(n, n+\frac{1}{n-2}\right)$, $Q(x)\in L_{\frac{n}{p-n}}(B(x_0,\delta_0))$ и $\delta_0\leqslant\ \min\{1,\mathrm{dist}^4(\mathrm{x}_0,\partial\mathrm{D})\}$. Тогда имеем*

$$|f(x)-f(x_0)| \leqslant \nu_0 \|Q\|_{\frac{n}{p-n}}^{\frac{1}{p-n}}\ \ln^{-\frac{p}{n(p-n)}}\frac{1}{|x-x_0|} \qquad (5.15)$$

для всех $x\in B(x_0,\delta_0)$, где $\|Q\|_{\frac{n}{p-n}} = \left(\int\limits_{B(x_0,\delta_0)} Q^{\frac{n}{p-n}}(x)\,dm(x)\right)^{\frac{p-n}{n}}$ — норма в пространстве $L_{\frac{n}{p-n}}(B(x_0,\delta_0))$ и ν_0 — положительная постоянная, зависящая только от n и p.

Доказательство. Действительно, применяя неравенство Гельдера с $q=\frac{n(p-n+1)}{(p-n)(n-1)}$ и $q'=\frac{n(p-n+1)}{p}$, получаем

$$\int\limits_R \frac{Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)dm(x)}{|x-x_0|^{\frac{p}{p-n+1}}} \leqslant \left(\int\limits_R Q^{\frac{q(n-1)}{p-n+1}}(x)dm(x)\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int\limits_R \frac{dm(x)}{|x-x_0|^n}\right)^{\frac{1}{q'}},$$

где $R=R(x_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$. Следовательно,

$$\int\limits_R \frac{Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\,dm(x)}{|x-x_0|^{\frac{p}{p-n+1}}} \leqslant \mu_0\left(\int\limits_{B(x_0,\delta_0)} Q^{\frac{n}{p-n}}(x)\,dm(x)\right)^{j_1}\left(\ln\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\right)^{j_2},$$

где $j_1=\frac{(p-n)(n-1)}{n(p-n+1)}$, $j_2=\frac{p}{n(p-n+1)}$, $\mu_0=\omega_{n-1}^{\frac{p}{n(p-n+1)}}$.

Применяя теорему 5.2 с $\kappa=\frac{p}{n(p-n+1)}$ и $C_{x_0}=\omega_{n-1}^{\frac{p}{n(p-n+1)}}\|Q\|_{\frac{n}{p-n}}^{\frac{n-1}{p-n+1}}$, получаем оценку (5.15). $\square$

Теорема 5.3. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Предположим, что $Q : D \to (0, \infty)$ — измеримая по Лебегу и $f : D \to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм в точке $x_0 \in D$ относительно p-модуля при $p \in \left(n, n+\frac{1}{n-2}\right)$. Если*

$$\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r) \leqslant Q_{x_0} r \tag{5.16}$$

для п.в. $r \in (0, d_0)$, $d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, то

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \nu_0\, Q_{x_0}^{\frac{1}{p-n}}\ \ln^{-\frac{1}{p-n}} \frac{1}{|x - x_0|} \tag{5.17}$$

для всех $x \in B(x_0, \delta_0)$, где $\delta_0 \leqslant \min\{1, \operatorname{dist}^4(x_0, \partial D)\}$ и ν_0 — положительная постоянная, зависящая только от n и p.

Доказательство. Пусть $R = R(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < d_0$. Используя условие (5.16) и теорему Фубини, получаем

$$\int\limits_R \frac{Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)dm(x)}{|x - x_0|^{\frac{p}{p-n+1}}} = \int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{|Q\|^{\frac{n-1}{p-n+1}}_{\frac{n-1}{p-n+1}}(x_0, r)dr}{r^{\frac{p}{p-n+1}}} \leqslant Q_{x_0}^{\frac{n-1}{p-n+1}} \ln\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right).$$

Применяя теорему 5.2 с $\kappa = 1$ и $C_{x_0} = Q_{x_0}^{\frac{n-1}{p-n+1}}$, получаем оценку (5.17). □

6. Точные оценки меры образа шара

В этом разделе получена оценка меры образа шара при нижних Q-гомеоморфизмах в $\mathbb{R}^n, n \geqslant 2$. Впервые оценка площади образа круга при квазиконформных отображениях встречается в монографии М. А. Лаврентьева, см. [75]. В. И. Кругликовым была получена оценка меры образа шара для отображений квазиконформных в среднем в $\mathbb{R}^n$, см. в [13, лемма 9].

Теорема 6.1. *Пусть $Q : \mathbb{B}^n \to (0, \infty)$ — измеримая по Лебегу функция и $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ — нижний Q-гомеоморфизм в нуле относительно p-модуля. Тогда при $p = n$ имеет место оценка*

$$m(f\overline{B}_r) \leqslant \Omega_n \cdot \exp\left(-n\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}} \int\limits_r^1 \frac{d\tau}{\|\,Q\|_{\,n-1}(\tau)}\right), \tag{6.1}$$

а при $p > n$

$$m(f\overline{B}_r) \leqslant \Omega_n \left(1 + \omega_{n-1}^{\frac{p-n+1}{n-1}}(p-n)\int\limits_r^1 \frac{d\tau}{\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(\tau)}\right)^{-\frac{n}{p-n}}, \qquad (6.2)$$

где $\overline{B}_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant r\}$, Ω_n *— объем единичного шара в* $\mathbb{R}^n$, ω_{n-1} *— площадь единичной сферы* $\mathbb{S}^{n-1}$ *в* $\mathbb{R}^n$ *и*

$$\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(\tau) = \left(\int\limits_{S_\tau} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\,d\mathcal{A}\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}}, \quad S_\tau = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = \tau\}. \qquad (6.3)$$

Доказательство. Рассмотрим сферическое кольцо $R_t = \{x \in \mathbb{B}^n : t < |x| < t+\triangle t\}$, $0 < t < t+\Delta t < 1$. Пусть $\left(B_{t+\triangle t}, \overline{B}_t\right)$ — конденсатор. Тогда $\left(fB_{t+\triangle t}, \overline{fB}_t\right)$ — кольцевой конденсатор в $\mathbb{R}^n$ и согласно (2.3) имеем

$$\operatorname{cap}_{\frac{p}{p-n+1}}\left(fB_{t+\triangle t}, \overline{fB}_t\right) = M_{\frac{p}{p-n+1}}(\triangle(\partial fB_{t+\triangle t}, \partial fB_t; fR_t)). \qquad (6.4)$$

В силу неравенства (2.4) получим

$$\operatorname{cap}_{\frac{p}{p-n+1}}\left(fB_{t+\triangle t}, \overline{fB}_t\right) \geqslant \frac{[\inf m_{n-1}\,\sigma]^{\frac{p}{p-n+1}}}{\left[m\left(fB_{t+\Delta t}\setminus \overline{fB}_t\right)\right]^{\frac{n-1}{p-n+1}}}, \qquad (6.5)$$

где $m_{n-1}\,\sigma$ — $(n-1)$-мерная мера Лебега C^∞-многообразия σ, являющегося границей $\sigma = \partial U$ ограниченного открытого множества U, содержащего $\overline{fB}_t$ и содержащегося вместе со своим замыканием $\overline{U}$ в $fB_{t+\triangle t}$, а точная нижняя грань берется по всем таким σ.

С другой стороны, в силу леммы 3.2, имеем

$$\operatorname{cap}_{\frac{p}{p-n+1}}\left(fB_{t+\triangle t}, \overline{fB}_t\right) \leqslant \left(\int\limits_t^{t+\triangle t} \frac{d\tau}{\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(\tau)}\right)^{-\frac{n-1}{p-n+1}}. \qquad (6.6)$$

Комбинируя неравенства (6.5) и (6.6), получим

$$\frac{[\inf m_{n-1}\,\sigma]^{\frac{p}{p-n+1}}}{\left[m\left(fB_{t+\Delta t}\setminus \overline{fB}_t\right)\right]^{\frac{n-1}{p-n+1}}} \leqslant \left(\int\limits_t^{t+\triangle t} \frac{d\tau}{\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(\tau)}\right)^{-\frac{n-1}{p-n+1}}.$$

Далее, воспользовавшись изопериметрическим неравенством

$$\inf m_{n-1}\,\sigma \geqslant n\,\Omega_n^{\frac{1}{n}}\left(m(\overline{fB}_t)\right)^{\frac{n-1}{n}},$$

получим

$$n\,\Omega_n^{\frac{1}{n}}\left(m(\overline{fB_t})\right)^{\frac{n-1}{n}}\leqslant\left(\frac{m\left(fB_{t+\Delta t}\setminus\overline{fB}_t\right)}{\int\limits_t^{t+\triangle t}\frac{d\tau}{\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(\tau)}}\right)^{\frac{n-1}{p}}. \qquad (6.7)$$

Полагая $\Phi(t):=m\left(fB_t\right)$, из соотношения (6.7) имеем, что

$$n\,\Omega_n^{\frac{1}{n}}\,\Phi^{\frac{n-1}{n}}(t)\leqslant\left(\frac{\frac{\Phi(t+\Delta t)-\Phi(t)}{\Delta t}}{\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\triangle t}\frac{d\tau}{\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(\tau)}}\right)^{\frac{n-1}{p}}. \qquad (6.8)$$

Заметим, что в силу леммы 3.2 и гомеоморфности отображения f,

$$\|\,Q\|^{-1}_{\frac{n-1}{p-n+1}}(\tau)\in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(0,1).$$

Устремляя в неравенстве (6.8) Δt к нулю, и учитывая монотонное возрастание функции $\Phi(t)$ по $t\in(0,1)$, для п.в. t имеем существование производной $\Phi'(t)$ и

$$\frac{n^{\frac{p}{n-1}}\,\Omega_n^{\frac{p}{n(n-1)}}}{\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(t)}\leqslant\frac{\Phi'(t)}{\Phi^{\frac{p}{n}}(t)}. \qquad (6.9)$$

Рассмотрим неравенство (6.9) при $p>n$. Интегрируя обе части неравенства по $t\in[r,1]$ и учитывая, что

$$\int\limits_r^1\frac{\Phi'(t)}{\Phi^{\frac{p}{n}}(t)}\,dt\leqslant\frac{n}{n-p}\left(\Phi^{\frac{n-p}{n}}(1)-\Phi^{\frac{n-p}{n}}(r)\right),$$

см., напр., [19, теорема IV. 7.4], получим

$$n^{\frac{p}{n-1}}\,\Omega_n^{\frac{p}{n(n-1)}}\int\limits_r^1\frac{dt}{\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(t)}\leqslant\frac{n}{p-n}\left(\Phi^{\frac{n-p}{n}}(r)-\Phi^{\frac{n-p}{n}}(1)\right). \qquad (6.10)$$

Из неравенства (6.10) получаем, что

$$\Phi(r)\leqslant\left(\Phi^{\frac{n-p}{n}}(1)+n^{\frac{p-n+1}{n-1}}\,\Omega_n^{\frac{p}{n(n-1)}}\,(p-n)\int\limits_r^1\frac{dt}{\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(t)}\right)^{-\frac{n}{p-n}}.$$

Наконец, учитывая, что $m(f\mathbb{B}^n) \leqslant \Omega_n$ и $\omega_{n-1} = n\Omega_n$, приходим к (6.2).

Осталось рассмотреть случай $p = n$. В этом случае неравенство (6.9) примет вид:

$$\frac{n^{\frac{n}{n-1}}\Omega_n^{\frac{1}{n-1}}}{\|\,Q\|_{n-1}(t)} \leqslant \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}. \tag{6.11}$$

Интегрируя обе части неравенства (6.11) по $t \in [r, 1]$, учитывая, что

$$\int\limits_r^1 \frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}dt \leqslant \ln\frac{\Phi(1)}{\Phi(r)},$$

см., напр., [19, теорема IV. 7.4], получим

$$n^{\frac{n}{n-1}}\Omega_n^{\frac{1}{n-1}}\int\limits_r^1 \frac{dt}{\|\,Q\|_{n-1}(t)} \leqslant \ln\frac{\Phi(1)}{\Phi(r)}.$$

И, следовательно, имеем

$$\exp\left\{n\,\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}\int\limits_r^1 \frac{dt}{\|\,Q\|_{n-1}(t)}\right\} \leqslant \frac{\Phi(1)}{\Phi(r)},$$

а потому

$$\Phi(r) \leqslant \Phi(1)\,\exp\left\{-n\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}\int\limits_r^1 \frac{dt}{\|\,Q\|_{n-1}(t)}\right\},$$

что и приводит нас к неравенству (6.1) поскольку $\Phi(1) \leqslant \Omega_n$. $\square$

7. Оценки для нижних пределов

Из теоремы 6.1, приведенной в предыдущем параграфе, следует аналог известной леммы Икома–Шварца, см. [48, предложение 1].

Теорема 7.1. *Пусть $Q : \mathbb{B}^n \to (0, \infty)$ — измеримая по Лебегу функция и $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ — нижний Q-гомеоморфизм в нуле относительно p-модуля с нормировкой $f(0) = 0$. Тогда при $p > n$ имеет место оценка*

$$\liminf_{x\to 0}\,|f(x)|\left(1 + \omega_{n-1}^{\frac{p-n+1}{n-1}}(p-n)\int\limits_{|x|}^1 \frac{d\tau}{\|\,Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(\tau)}\right)^{\frac{1}{p-n}} \leqslant 1, \tag{7.1}$$

а при $p = n$

$$\liminf_{x\to 0} |f(x)| \exp\left(\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}} \int\limits_{|x|}^{1} \frac{d\tau}{\|\,Q\|_{\,n-1}(\tau)}\right) \leqslant 1\,, \tag{7.2}$$

где ω_{n-1} *— площадь единичной сферы* $\mathbb{S}^{n-1}$ *в* $\mathbb{R}^n$ *и*

$$\|\,Q\|_{\,\frac{n-1}{p-n+1}}(\tau) = \left(\int\limits_{S_\tau} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x)\, d\mathcal{A}\right)^{\frac{p-n+1}{n-1}}, \qquad S_\tau = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = \tau\}. \tag{7.3}$$

Доказательство. Учитывая, что $f(0) = 0$, получаем

$$\Omega_n \left(\min_{|x|=r} |f(x)|\right)^n \leqslant m(fB_r) \tag{7.4}$$

и, следовательно,

$$\min_{|x|=r} |f(x)| \leqslant \sqrt[n]{\frac{m(fB_r)}{\Omega_n}}\,. \tag{7.5}$$

Таким образом, учитывая неравенства (6.1) и (6.2), имеем

$$\liminf_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{\mathcal{R}_p(|x|)} = \liminf_{r\to 0} \frac{\min\limits_{|x|=r} |f(x)|}{\mathcal{R}_p(r)} \leqslant \liminf_{r\to 0} \sqrt[n]{\frac{m(fB_r)}{\Omega_n}} \cdot \frac{1}{\mathcal{R}_p(r)} \leqslant 1\,,$$

где

$$\mathcal{R}_p(r) = \left(1 + \omega_{n-1}^{\frac{p-n+1}{n-1}} (p-n) \int\limits_{r}^{1} \frac{d\tau}{\|\,Q\|_{\,\frac{n-1}{p-n+1}}(\tau)}\right)^{-\frac{1}{p-n}}$$

при $p > n$ и

$$\mathcal{R}_p(r) = \exp\left(-\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}} \int\limits_{r}^{1} \frac{d\tau}{\|\,Q\|_{\,n-1}(\tau)}\right)$$

при $p = n$. Теорема доказана. □

Литература

[1] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Moduli in Modern Mapping Theory, Springer Monographs in Mathematics*, Springer, New York etc., 2009, 367 p.

[2] Д. А. Ковтонюк, Р. Р. Салимов, Е. А. Севостьянов, *К теории отображений классов Соболева и Орлича–Соболева*, К.: Наук. думка, 2013, 303 с.

[3] B. Bojarski, V. Gutlyanskii, O. Martio, V. Ryazanov, *Infinitesimal Geometry of Quasiconformal and Bi-Lipschitz Mappings in the Plane* // EMS Tracts in Mathematics, **19**, EMS Publishing House, Zürich, 2013, 205 p.

[4] V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *The Beltrami Equation: A Geometric Approach*, Developments of Mathematics, **26**, Springer, New York etc., 2012, 301 p.

[5] В. Н. Дубинин, *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*, Владивосток: Дальнаука, 2009, 390 с.

[6] A. Vasil'ev, *Moduli of families of curves for conformal and quasiconformal mappings*, Lecture Notes in Math., **1788**, Springer–Verlag, Berlin–New York, 2002.

[7] В. В. Асеев, *Модули семейств локально квазисимметрических поверхностей* // Сиб. матем. журнал, **30** (1989), No. 3, 9–15.

[8] С. К. Водопьянов, А. Д. Ухлов, *Операторы суперпозиции в пространствах Соболева* // Изв. вузов. Матем., **10** (2002), 11–33.

[9] S. K. Vodop'yanov, *Description of composition operators of Sobolev spaces* // Doklady Mathematics, **71** (2005), No. 1, 5–9.

[10] S. K. Vodop'yanov, *Composition operators on Sobolev spaces* // Complex Analysis and Dynamical Systems II, Contemporary Mathematics Series, **382** (2005), 401–415.

[11] С. К. Водопьянов, А. Д. Ухлов, *Операторы суперпозиции в пространствах Лебега и дифференцируемость квазиаддитивных функций множества* // Владикавк. матем. журнал, **4** (2002), No. 1, 11–33.

[12] В. М. Гольдштейн, Ю. Г. Решетняк, *Введение в теорию функций с обобщёнными производными и квазиконформные отображения*, Наука, Новосибирск, 1983.

[13] В. И. Кругликов, *Ёмкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем* // Матем. сборник, **130** (1986), No. 2, 185–206.

[14] С. Л. Крушкаль, Р. Кюнау, *Квазиконформные отображения – новые методы и приложения*, Новосибирск: Наука, 1984.

[15] В. С. Кудьявин, *Оценки искажения расстояния при отображениях, квазиконформных в среднем* // Динамика сплош. ср., **52** (1981), 168–171.

[16] В. С. Кудьявин, *Локальные и граничные свойства отображений, квазиконформных в среднем* // Сб. науч. тр. ИМ СО АН СССР, Новосибирск, (1981), 168–171.

[17] В. С. Кудьявин, *Поведение класса отображений, квазиконформных в среднем, в изолированной особой точке* // Докл. АН СССР, **277** (1984), No. 5, 1056–1058.

[18] Д. Ковтонюк, В. Рязанов, *К теории нижних Q-гомеоморфизмов* // Укр. мат. вісник, **5** (2008), No. 2, 157–181.

[19] L. V. Kovalev, *Monotonicity of generalized reduced modulus* // Zapiski Nauch. Sem. POMI, **276** (2001), 219–236.

[20] Г. В. Кузьмина, *Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы* // Тр. МИАН СССР, **139** (1980), 3–241.

[21] В. М. Миклюков, *Конформное отображение нерегулярной поверхности и его применения*, Изд-во ВолГУ, Волгоград, 2005.

[22] Ю. Г. Решетняк, *Пространственные отображения с ограниченным искажением*, Наука: Новосибирск, 1982.

[23] В. И. Рязанов, Е. А. Севостьянов, *Равностепенно непрерывные классы кольцевых Q-гомеоморфизмов* // Сиб. матем. журнал, **48** (2007), No. 6, 1361–1376.

[24] А. Ю. Солынин, *Модули и экстремально-метрические проблемы* // Алгебра и анализ, **11** (1999), No. 1, 3–86.

[25] А. В. Сычев, *Модули и пространственные квазиконформные отображения*, Новосибирск: Наука, 1983.

[26] Б. В. Шабат, *Метод модулей в пространстве* // Докл. АН СССР, **130** (1960), 1210–1213.

[27] Б. В. Шабат, *К теории квазиконформных отображений в пространстве* // Докл. АН СССР, **132** (1960), 1045–1048.

[28] В. А. Шлык, О равенстве p-емкости и p-модуля // Сиб. матем. журнал, **34** (1993, No. 6, 216–221.

[29] Cazacu C. Andreian, *Foundations of quasiconformal mappings. Handbook of complex analysis: geometric function theory*, Vol. 2, Elsevier, Amsterdam, 2005, 687–753.

[30] Cazacu C. Andreian, *On the length-area dilatation* // Complex Var. Theory Appl., **50** (2005), No. 7–11, 765–776.

[31] Cazacu C. Andreian, *Moduli inequalities for quasiregular mappings* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **2** (1976), 17–28.

[32] Cazacu C. Andreian, *Modules and quasiconformality*, Symposia Mathematica 18, Academic Press, London, 1976, 519–534.

[33] Cazacu C. Andreian, *A generalization of the quasiconformality, in Topics in Analysis*, Colloquium on Mathematical Analysis, Jyvaskyla, 1970, Lecture Notes in Mathematics, **419** (1974), 4–17.

[34] P. Caraman, *n-dimensional quasiconformal mappings*, Haessner Publishing, Newfoundland, NJ, 1974.

[35] M. Cristea, *Dilatations of homeomorphisms satisfying some modular inequalities* // Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **56** (2011), No. 4, 275–282.

[36] M. Cristea, *Open discrete mapping having local ACL^n inverses* // Complex Var. Elliptic Equ., **55** (2010), No. 1–3, 61–90.

[37] M. Cristea, *Local homeomorphisms having local* ACL^n *inverses* // Complex Var. Elliptic Equ., **53** (2008), No. 1, 77–99.

[38] M. Cristea, *Mappings of finite distortion: Zoric's theorem, and equicontinuity results* // Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **52** (2007), No. 5, 539–554.

[39] M. Cristea, *Mappings of finite distortion: boundary extension* // Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **51** (2006), No. 5–6, 607–631.

[40] A. Golberg, *Homeomorphisms with integrally restricted moduli. Complex analysis and dynamical systems IV. Part 1* // Contemp. Math., **553** (2011), 83–98.

[41] A. Golberg, *Directional dilatations in space* // Complex Var. Elliptic Equ., **55** (2010), No. 1–3, 13–29.

[42] A. Golberg, *Homeomorphisms with finite mean dilatations* // Contemporary Math., **382** (2005), 177–186.

[43] A. Golberg, V. Gutlyanskii, *On Lipschitz continuity of quasiconformal mappings in space* // J. Anal. Math., **109** (2009), 233–251.

[44] F. W. Gehring, *Rings and quasiconformal mappings in space* // Trans. Amer. Math. Soc., **103** (1962), 353–393.

[45] F. W. Gehring, *Quasiconformal mappings in Complex Analysis and its Applications*, V. 2, International Atomic Energy Agency, Vienna, 1976.

[46] F. W. Gehring, *Lipschitz mappings and the p-capacity of ring in n-space* // Advances in the theory of Riemann surfaces (Proc. Conf. Stonybrook, N.Y., (1969), Ann. of Math. Studies, **66** (1971), 175–193.

[47] J. Hesse, *A p-extremal length and p-capacity equality* // Arc. Mat., **13** (1975), 131–144.

[48] K. Ikoma, *On the distortion and correspondence under quasiconformal mappings in space* // Nagoya Math. J., **25** (1965), 175–203.

[49] O. Lehto, K. Virtanen, *Quasiconformal Mappings in the Plane*, Springer–Verlag, New York, 1973.

[50] V. Maz'ya, *Lectures on isoperimetric and isocapacitary inequalities in the theory of Sobolev spaces* // Contemp. Math., **338** (2003), 307—340.

[51] O. Martio, S. Rickman, J. Väisälä, *Definitions for quasiregular mappings* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math., **448** (1969), 1–40.

[52] J. Väisälä, *Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings*, Lecture Notes in Math., **229**, Springer–Verlag, Berlin, 1971.

[53] J. Väisälä, *Two new characterizations for quasiconformality* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math., **362** (1965), 1–12.

[54] M. Vuorinen, *Conformal Geometry and Quasiregular Mappings*, Lecture Notes in Math., **1319**, Springer-Verlag, Berlin, 1988, 209 p.

[55] W. P. Ziemer, *Extremal length and p-capacity* // The Michigan Mathematical Journal, **16** (1969), No. 1, 43–51.

[56] В. Г. Мазья, *Пространства С.Л. Соболева*, ЛГУ, Ленинград, 1985, 416 с.

[57] Е. С. Афанасьева, В. И. Рязанов, Р. Р. Салимов, *Об отображениях в классах Орлича-–Соболева на римановых многообразиях* // Укр. матем. вiсник, **8** (2011), No. 3, 319—342.

[58] T. Iwaniec, P. Koskela, J. Onninen, *Mappings of finite distortion: Compactness* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math., **27** (2002), No. 2, 391–417.

[59] D. A. Kovtonyuk, V. I. Ryazanov, R. R. Salimov, E. A. Sevost'yanov, *On mappings in the Orlicz-Sobolev classes* // Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math., **3(LXI)** (2012), No. 1, 67–78.

[60] Д. А. Ковтонюк, В. И. Рязанов, Р. Р. Салимов, Е. А. Севостьянов, *Граничное поведение классов Орлича–Соболева* // Матем. заметки, **95** (2014), No. 4, 564–576.

[61] Д. А. Ковтонюк, В. И. Рязанов, Р. Р. Салимов, Е. А. Севостьянов, *К теории классов Орлича–Соболева* // Алгебра и анализ, **25** (2013), No. 6, 50–102.

[62] Р. Р. Салимов, *Нижние оценки р-модуля и отображения класса Соболева* // Алгебра и анализ, **26** (2014), No. 6, 143–171.

[63] T. Lomako, R. Salimov, E. Sevost'yanov, *On equicontinuity of solutions to the Beltrami equations* // Ann. Univ. Bucharest, Math. Ser., **LIX** (2010), No. 2, 263–274.

[64] V. Ryazanov, R. Salimov, U. Srebro, E. Yakubov, *On Boundary Value Problems for the Beltrami Equations* // Contemp. Math., **591** (2013), 211–242.

[65] Д. А. Ковтонюк, И. В. Петков, В. И. Рязанов , Р. Р. Салимов, *Граничное поведение и задача Дирихле для уравнений Бельтрами* // Алгебра и анализ, **25** (2013), No. 4, 101–124.

[66] Р. Р. Салимов, *Абсолютная непрерывность на линиях и дифференцируемость одного обобщения квазиконформных отображений* // Изв. РАН. Сер. матем., **72** (2008), No. 5, 141–148.

[67] Р. Р. Салимов, *Об оценке меры образа шара* // Сиб. матем. журн., **53** (2012), No. 4, 920–930.

[68] Р. Р. Салимов, *On finitely Lipschitz space mappings* // Сиб. электрон. матем. изв., **8** (2011).

[69] Р. Р. Салимов, *О липшицевости одного класса отображений* // Матем. заметки, **94**(2013), No. 4, 591–599.

[70] Р. Р. Салимов, *О кольцевых Q-отображениях относительно неконформного модуля* // Дальневост. матем. журн., **14** (2014), No. 2, 257–269.

[71] Р. Р. Салимов, Е.А. Севостьянов, *Теория кольцевых Q-отображений в геометрической теории функций* // Матем. сб., **201** (2010), No. 6, 131–158.

[72] Е. А. Севостьянов, *О пространственных отображениях с интегральными ограничениями на характеристику* // Алгебра и анализ, **24** (2012), No. 1, 131–156.

[73] С. Сакс, *Теория интеграла*, М.: Издательство иностранной литературы, 1949, 495 с.

[74] T. Ransford, *Potential Theory in the Complex Plane*, Cambridge University Press, 1995, 244 p.

[75] М. А. Лаврентьев, *Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа*, М., 1962, 136 с.

Сведения об авторах

Руслан Радикович Салимов

Институт математики НАН Украины

E-Mail: `ruslan623@yandex.ru`