Український математичний вісник
Том 12 **(2015)**, № 4, 431 – 436

УМВ

О кратности многозначных отображений областей на многообразиях

Юрий Б. Зелинский, Ольга В. Сафонова

(*Представлена В. Я. Гутлянским*)

Аннотация. В работе получена оценка размерности точек максимальной кратности при многозначном полунепрерывном сверху отображении областей на многообразиях.

2010 MSC. 54C60, 58C06, 26E25.

Ключевые слова и фразы. Многообразие, многозначное отображение, полунепрерывное сверху отображение, степень отображения, локальная степень отображения, группа когомологий.

В работах [1–3] установлено, что собственное непрерывное отображение f замкнутой области на n–мерном многообразии степени k будет или внутренним отображением, или существует точка в образе, имеющая не меньше чем $|k|+2$ прообраза. Если же ограничение f на внутренность области нульмерное отображение, то во втором случае множество точек образа, имеющих не менее чем $|k|+2$ прообраза, содержит подмножество полной размерности n. Цель нашей работы — установить аналог этого результата для многозначных отображений областей на многообразиях.

Опеределение 1. *Пусть X и Y — топологические пространства. Назовем многозначное отображение $F : X \to Y$ простым, если для произвольной пары точек $x, y \in X$ выполнено одно из условий: $F(x) = F(y)$, или $F(x) \cap F(y) = \varnothing$.*

Опеределение 2. *Назовем отображение $F : X \to Y$ открытым, если образом открытого множества будет открытое множество.*

Статья поступила в редакцию 13.01.2016

ISSN 1810 – 3200.

Опеределение 3. *Назовем отображение $F : X \to Y$ ацикличным, если образом каждой точки $x \in X$ будет ацикличное множество $F(x)$ (Множество ациклично, если все его приведенные группы когомологий равны нулю [4]).*

Опеределение 4. *Отображение $F : X \to Y$ назовем нульмерным, если размерность [5] прообраза $F^{-1}(y) = \{x \in X | y \in F(x)\}$ каждой точки $y \in Y$ равна нулю или пустое множество.*

Опеределение 5. *Отображение $F : X \to Y$ называется полунепрерывным сверху в точке $x \in X$, если для любого открытого множества $V \subset Y$, такого, что $F(x) \subset V$, существует окрестность $U(x)$ точки x, такая, что $F(U(x)) \subset V$. Отображение F называется полунепрерывным сверху, если оно полунепрерывно сверху в каждой точке $x \in X$.*

Предполагаем дальше, что все рассматриваемые ниже отображения — многозначные ацикличные полунепрерывные сверху отображения, M, N — n–мерные многообразия, $D \subset M$, $D_1 \subset N$ — открытые связные области, $\overline{D}$ — замыкание области D, $Int\, D$ — внутренние точки области D, ∂D — граница области D, $\Gamma(F)$ — график отображения F, p, q — проекции графика на X, Y, соответственно.

Опеределение 6. *Отображение $F : X \to Y$ называется собственным, если собственные проекции p, q (однозначное отображение собственно, если прообраз каждого компакта — компакт).*

В работах [7, 8] установлено, что для многозначных собственных ациклических отображений областей существует степень отображения, а в случае, если прообраз каждой точки состоит из конечного числа точек, то в каждой точке прообраза существует локальная степень отображения.

Теорема 1. *Пусть $F : \overline{D} \to \overline{D_1}$ — простое отображение, для которого выполнены следующие условия:*

1. $F(\partial D) \cap F(Int\, D) = \varnothing$;
2. *Существует степень отображения F равная k.*

Тогда или отображение $F|_{Int\, D}$ открытое или найдется точка $y \in F(Int\, D)$ такая, что $F^{-1}(y)$ имеет не меньше $|k| + 2$ прообразов. Если же отображение F нульмерно и не открыто, то множество точек $y \in F(Int\, D)$, которые имеют не меньше чем $|k|+2$ прообраза содержит открытое подмножество в $F(Int\, D)$.

Для доказательства теоремы установим сначала несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть $F : \overline{D} \to \overline{D_1}$ — простое отображение замкнутых областей, такое что $F(\partial D) \cap F(Int\, D) = \varnothing$, тогда или каждая точка из множества $y \in F(Int\, D)$ имеет один прообраз, или существует точка в образе имеющая не меньше двух прообразов, если же ограничение $F|_{Int\, D}$ — нульмерно, то во втором случае множество точек из $F(Int\, D)$, имеющих не меньше двух прообразов, содержит открытое в D_1 подмножество.*

Доказательство. Заметим, что условие $F(\partial D) \cap F(Int\, D) = \varnothing$ обеспечивает собственность отображения [3]. Естественно предположить, что ограничение $F|_{Int\, D}$ — нульмерно и существует точка в образе имеющая не меньше двух прообразов, иначе очевидно выполнено одно из утверждений леммы. В силу того, что нульмерное многозначное отображение не понижает размерности [9], существует такая точка $y \in Int\, D$, что F^{-1} y содержит не менее двух точек. Пусть точки x_1 и $x_2 \in F^{-1}(y)$. Рассмотрим непересекающиеся окрестности этих точек $U(x_1)$ и $U(x_2)$. Ясно, что образы $F\left(U(x_1)\right)$ и $F\left(U(x_2)\right)$ имеют общие точки (по крайней мере точку y). Если множество $F\left(U(x_1)\right) \cap F\left(U(x_2)\right)$ содержит открытое множество V, то оно и будет искомым. Ведь каждая его точка имеет как минимум два прообраза один в $U(x_1)$, другой — в $U(x_2)$. Если же внутренность пересечения $F\left(U(x_1)\right) \cap F\left(U(x_2)\right)$ пуста, то для произвольной окрестности $V(y)$ точки y ограничение F на множество $W_1 = U(x_1) \cap F^{-1}\left(V(y)\right)$ не может быть открытым в точке x_1 отображением и отображаться на всю окрестность $V(y)$, однако в силу собственности F ограничение его на множество W_1 замкнуто. Следовательно, образ $F(W_1)$ будет замкнутым подмножеством окрестности $V(y)$.

Отсюда следует, что отображение F индуцирует тривиальное отображение групп когомологий

$$F^* = (p^{-1})^* q^* : H^n\left(\overline{V(y)}, \partial V\right) \to H^n\left(\overline{W_1}, \partial W_1\right)$$

так как его можно представить как суперпозицию трех гомеоморфизмов

$$\begin{aligned} H^n\left(\overline{V(y)}, \partial V\right) \xrightarrow{i} H^n\left(F(\overline{W_1}), \partial V\right) \quad &\xrightarrow{q^*} \quad H^n\left(\Gamma\left(\overline{W_1}\right), \Gamma\left(\partial V\right)\right) \\ &\xrightarrow{p^{-1*}} \quad H^n\left(\overline{W_1}, \partial W_1\right), \end{aligned}$$

где первый гомеоморфизм тривиален, так как $F\left(W_1\right)$ не покрывает всю окрестность $V(y)$. Кроме этого образ множества W_1 содержит внутренние точки согласно критерию сохранения области [7]. Выберем одну из таких точек y_0 и некоторую окрестность $G(y_0)$ этой точки, лежащую внутри $V(y)$. Внутри этого множества не может быть плотного множества точек, имеющих по одному прообразу. Иначе согласно теореме 2 [11] ограничение проекции q на $q^{-1}\left(G(y_0)\right)$ было бы гомеоморфизмом. Но тогда ограничение ациклического отображения F на $F^{-1}\left(G(y_0)\right)$ индуцирует изоморфизм групп когомологий

$$F_2^*: H^n\left(\overline{G}(y_0), \partial\overline{G}(y_0)\right) \to H^n\left(F^{-1}\left(\overline{G}(y_0)\right), \partial F^{-1}\left(\overline{G}(y_0)\right)\right)$$

Это противоречит тому, что легко следует из коммутативной диаграммы групп когомологий

$$\begin{array}{ccccc} H^n\left(\overline{G}(y_0), \partial\overline{G}(y_0)\right) & \stackrel{\approx j^*}{\longleftarrow} & H^n\left(\overline{V}, \overline{V}\setminus G\right) & \stackrel{\approx i^*}{\longrightarrow} & H^n\left(\overline{V}, \partial V\right) \\ \approx\downarrow F_2^* & & \approx\downarrow F_1^* & & \approx\downarrow F^* \\ H^n\left(F^{-1}\left(\overline{G}(y_0)\right), \partial F^{-1}\left(\overline{G}(y_0)\right)\right) & \stackrel{\approx j_1^*}{\longleftarrow} & H^n\left(\overline{W}, \overline{W}\setminus F^{-1}(G)\right) & \stackrel{\approx i_1^*}{\longrightarrow} & H^n\left(\overline{W}, \partial W\right) \end{array}$$

в которой изоморфизмы i^*, i_1^*, j^*, j_1^* получаются как гомоморфизмы, соответствующие теоремам о вырезании [4]. С одной стороны F^* тривиальный гомоморфизм, а с другой $F^* = (i^*)^{-1} j^* F_2^* (j_1^*)^{-1} i_1^*$ — изоморфизм ненулевой группы. Следовательно, внутри $V(y)$ существует открытое всюду плотное множество точек, имеющих не меньше двух прообразов. Лемма доказана. $\square$

Следствие 1. *Если $F : \overline{D} \to \overline{D_1}$ нульмерное многозначное отображение нулевой степени, то в образе существует открытое множество, каждая точка которого имеет не менее двух прообразов.*

Лемма 2. *Пусть $F : \overline{D} \to \overline{D_1}$ — многозначное отображение областей степени k, такое, что $F(\partial D) \cap F(Int\, D) = \varnothing$, то множество точек образа, имеющих не менее k прообразов, содержит открытое всюду плотное в образе множество.*

Доказательство. Пусть существует открытое в образе подмножество V точек, каждая из которых имеет менее $|k|$ точек в прообразе. Тогда отображение F — конечнократное отображение, в каждой точке которого существует локальная степень отображения [8]. Пусть точка $y \in V$ — точка максимальной кратности отображения F на $F^{-1}(V)$. Тогда в каждой точке прообраза $x \in F^{-1}(y)$ локальная степень отображения не превышает единицы по модулю. Поэтому согласно “принципу аргумента” степень отображения не может равняться k, так как прообразов у точки y меньше k, и в каждой точке $x \in F^{-1}y$ локальная степень $|\gamma(x)| \leq 1$. Лемма доказана. $\square$

Докажем теперь результат из которого будет следовать теорема 1.

Теорема 2. *Пусть $F : \overline{D} \to \overline{D_1}$ — многозначное отображение областей степени k такое, что $F(\partial D) \cap F(Int\, D) = \varnothing$, то или F открытое отображение, или существует точка, имеющая не меньше чем $|k| + 2$ прообраза. Если же известно, что F нульмерное отображение, то во втором случае множество точек, имеющих не менее чем $|k| + 2$ прообраза, имеет полную размерность.*

Доказательство. Как и в лемме 1 не нарушая общности можно считать, что F — нульмерное отображение. Дальнейшее доказательство проведём по индукции. При $k = 0$ теорема доказана в лемме 1. Предположим, что теорема доказана для $|k| = m$ и докажем её для $|k| = m + 1$.

Пусть каждая точка некоторого открытого множества в образе имеет ровно $|k|$ прообразов. Тогда, аналогично лемме 2, в каждой точке прообраза локальная степень $|\gamma(x)| \leq 1$. Более того, во всех точках она должна иметь один знак, иначе, согласно “принципу аргумента” для локальной степени, получим противоречие. Но тогда $F\big|_{F^{-1}(V)}$ — открытое отображение. Если же $F\big|_{F^{-1}(V)}$ не является открытым на всех компонентах, то разобьем прообраз V на объединение двух множеств. Пусть W_1 — объединение компонент прообраза, где ограничение F — открытое отображение. Тогда $F|_{W_1}$ открытое $f : W_1 \to V$ отображение кратности $|k_1|$, $|k_1| \leq |k|$, имеющее в V плотное открытое множество точек, для каждой из которых существует ровно $|k_1|$ прообразов. Ограничение F на множество $W_2 = F^{-1}(V) \setminus W_1$, не будет открытым отображением и имеет степень $k_2 = k - k_1$. Тогда, согласно предположению индукции, существует открытое подмножество $U \subset V$, имеющее для каждой точки $y \in U$ не менее $|k_2| + 2$ прообраза. Следовательно, для некоторого открытого подмножества $U_0 \subset U$ каждая точка имеет $|k_1|$ прообраз в W_1 и не менее чем $|k_2| + 2$ прообраза в W_2 и всего не менее чем

$$|k_1| + |k_2| + 2 \geq |k_1 + k_2| + 2 = |k| + 2$$

прообраза. Теорема доказана. □

Покажем на примере, что условие простоты отображения является существенным.

Пример. Пусть $F : B^2 \to B^2$ — многозначное отображение замкнутого единичного круга $B^2 = \{(x, y)|x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$ на себя со следующими свойствами

$$F(x, y) = \begin{cases} (x, y), & (x, y) \neq (0, 0); \\ \{(x_1, y)|0 \leq x_1 \leq 1/2; y = 0\}, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Легко убедиться, что это отображение не удовлетворяет определению 1, образ начала координат — отрезок и прообраз каждой точки имеет не более двух прообразов, но ни одно из установленных выше утверждений не имеет места.

Литература

[1] Ю. Б. Зелинский, *О некоторых проблемах Косинского* // Укр. матем. журнал, **27** (1975), No. 4, 510–516.

[2] Ю. Б. Зелинский, *О кратности непрерывных отображений областей* // Укр. матем. журнал, **57** (2005), No. 4, 554–558.

[3] А. К. Бахтин, Г. П. Бахтина, Ю. Б. Зелинский, *Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе* // Праці Інституту математики НАНУ, **73** (2008), 308.

[4] Э. Спеньер, *Алгебраическая топология*, М.: Мир, 1971.

[5] П. С. Александров, Б. А. Пасынков, *Введение в теорию размерности*, М.: Мир, 1973.

[6] К. Куратовский, *Топология*, В 2-х т., М.: Мир, 1966.

[7] Ю. Б. Зелинский, *Теорема о продолжении и критерии сохранения области для многозначных отображений* // Укр. матем. журнал, **29** (1973), No. 3, 383–387.

[8] Ю. Б. Зелинский, *О локальной степени для многозначных отображений* // Доклады АН УССР .Сер. А, **10** (1975), 872–876.

[9] Ю. Б. Зелинский, И. Ю. Выговская, О. В. Сафонова, *О многозначных нульмерных отображениях* // Збірник праць Інституту математики НАНУ, **12** (2015), No. 3, 147–154.

[10] Ю. Б. Зелинский, *Применение теории пучков к исследованию непрерывных отображений* // Десятая матем. школа, К.: Институт математики АН УССР, (1974), 290–307.

[11] Ю. Ю. Трохимчук, А. В. Бондарь, *О локальной степени нульмерного отображения* // Метрические вопросы теории функций и отображений, **1** (1969), 221–241.

Сведения об авторах

Юрий Борисович Зелинский
Институт математики НАН Украины
E-Mail: `zel@imath.kiev.ua`

Ольга Владимировна Сафонова
Киевский Национальный университет имени Тараса Шевченка
E-Mail: `olechkadeadin@ukr.net`