УДК 517.54

©2016. **И. В. Денега, Я. В. Заболотный**

ОБОБЩЕНИЕ НЕКОТОРЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ О НЕНАЛЕГАЮЩИХ ОБЛАСТЯХ

В данной работе изучается одна из классических проблем геометрической теории функций об экстремальном разбиении комплексной плоскости.

Ключевые слова: *внутренний радиус области, непересекающиеся области, лучевые системы точек, разделяющее преобразование, квадратичный дифференциал, функция Грина.*

1. Обозначения и определения.

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ – множество натуральных и вещественных чисел соответственно, $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ – ее одноточечная компактификация, $\mathbb{R}^+ = (0,\infty)$, $\chi(t) = \frac{1}{2}(t + t^{-1})$. Пусть $r(B,a)$ – внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно точки $a \in B$. Внутренний радиус области B связан с обобщенной функцией Грина $g_B(z,a)$ области B (см. [1 – 4]) соотношениями

$$g_B(z,a) = -\ln|z-a| + \ln r(B,a) + o(1), z \to a,$$

$$g_B(z,\infty) = \ln|z| + \ln r(B,a) + o(1), \quad z \to \infty.$$

Определение. Системой непересекающихся областей называется конечный набор произвольных областей $\{B_k\}_{k=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ таких, что $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B_k \cap B_m = \emptyset$, $k \neq m$, $k,m = \overline{1,n}$.

Определение. Систему точек $A_n := \left\{a_k \in \mathbb{C} : \ k = \overline{1,n}\right\}$ назовем n-лучевой, если $|a_k| \in \mathbb{R}^+$ при $k = \overline{1,n}$, $0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_n < 2\pi$.

Обозначим при этом $P_k(A_n) := \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}$, $a_{n+1} := a_1$, $\alpha_k := \frac{1}{\pi}\arg\frac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1,n}$.

Данная работа базируется на применении кусочно-разделяющего преобразования, развитого в работах [1 – 3]. Пусть $\zeta = \pi_k(w)$, $k = \overline{1,n}$, обозначает ту однозначную ветвь многозначной аналитической функции $-i\left(e^{-i\theta_k}w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, которая осуществляет однолистное и конформное отображение P_k на правую полуплоскость $\operatorname{Re}\zeta > 0$.

Для произвольной n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ и $\gamma \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ полагаем

$$\mu^{(\gamma)}(A_n) := \prod_{k=1}^{n}\left[\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{\frac{1}{2\alpha_k}}\right)\right]^{1-\frac{1}{2}\gamma\alpha_k^2}\prod_{k=1}^{n}|a_k|^{1+\frac{1}{4}\gamma(\alpha_k+\alpha_{k-1})}.$$

Пусть D – открытое множество в $\overline{\mathbb{C}}$, содержащее лучевую систему точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$. Если $a \in D$, то будем говорить, что $D(a)$ есть связная компонента D, содержащая точку a; $D_k(a_p)$ – связная компонента множества $D(a_p) \cap \overline{P_k(A_n)}$, содержащая точку a_p, $p \in \{k, k-1\}$, $k = \overline{1,n}$; $D_k(0)$ – связная компонента множества $D(0) \cap \overline{P_k(A_n)}$, содержащая точку $w = 0$.

Определение. Внутренним радиусом $r\,(D, a_k)$ открытого множества D относительно точки a называется внутренний радиус связной компоненты множества D, содержащей точку a.

Пусть открытое множество D содержит точку $w = 0$ и произвольную n-лучевую систему точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, тогда будем говорить, что такое множество удовлетворяет условию неналегания относительно системы точек A_n, если множества $D_k(a_k)$, $D_k(a_{k+1})$, $D_k(0)$ попарно не пересекаются для каждого $k = \overline{1,n}$.

Пусть $\{B_k\}_{k=0}^{n}$ – произвольный набор областей таких, что $0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$. Пусть $\widetilde{D} = \bigcup\limits_{k=0}^{n} B_k$. Будем говорить, что система $\{B_k\}_{k=0}^{n}$ удовлетворяет условию частичного налегания относительно некоторой системы A_n, если открытое множество $\widetilde{D}$ удовлетворяет условию неналегания относительно этой же n-лучевой системы точек A_n.

2. Постановка задачи.

Задача, которую мы рассматриваем, была сформулирована в работе [1].

Задача. Доказать, что максимум функционала

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, a_0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k),$$

где B_0, B_1, B_2,...,B_n, $(n \geqslant 2)$ – попарно неналегающие области в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, $a_k \in B_k$, $k = \overline{0,n}$, и $0 < \gamma \leqslant n$, достигается для некоторой конфигурации областей, обладающей n-кратной симметрией.

На данный момент эта задача полностью не решена, известно только ее решения для некоторых частных случаев. Так, в работе [2] было получено ее решение при произвольном натуральном $n \geqslant 2$, но при условии $\gamma = 1$. В работе [5] задача 1 была впервые решена при произвольном $\gamma > 1$ и без дополнительных ограничений, но начиная с некоторого, заранее неизвестного номера n. При существенном ограничении на расположение точек a_k, а именно, что максимальный угол с вершинами $(\widehat{a_k; a_0; a_{k+1}})$, $k = \overline{1,n}$, $a_{n+1} = a_1$, не превосходит $2\pi/\sqrt{\gamma}$ и при произвольном $n \geqslant 5$ задача была решена в работе [6]. Случай $n \geqslant 2$ и $0 < \gamma < 1$ также был рассмотрен в работе [7].

В данной статье рассматривается аналогичная задача, но при условии что на области B_k и точки a_k накладываются менее жесткие условия, а именно рассматриваются частично налегающие области B_k и точки a_k, принадлежащие лучевым системам A_n.

3. Результаты и доказательства.

В данной работе получен следующий результат.

Теорема 1. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 8$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = n^{0{,}42}$ *при* $n = \overline{8, 540}$, *и* $\gamma_n = \sqrt{n}$ *при* $n \geqslant 541$. *Тогда для любой системы точек* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ *такой, что* $\mu^{(\gamma)}(A_n) \leqslant 1$, $\mu^{(0)}(A_n) \leqslant 1$ *и любого набора областей* B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0$, $(k = \overline{1, n})$, *удовлетворяющего условию частичного налегания относительно лучевой системы* A_n, *справедливо неравенство*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant r^{\gamma}(\Lambda_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(\Lambda_k, \lambda_k), \tag{1}$$

где Λ_k, λ_k, $k = \overline{0, n}$, $\lambda_0 = 0$, *– круговые области и полюсы квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2. \tag{2}$$

Доказательство. Рассмотрим открытое множество $\widetilde{D} = \bigcup\limits_{k=0}^{n} B_k$. Очевидно, что $r(B_k, a_k) \leqslant r\left(\widetilde{D}, a_k\right) = r\left(\widetilde{D}(a_k), a_k\right)$. Отсюда

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant r^{\gamma}\left(\widetilde{D}, 0\right) \prod_{k=1}^{n} r\left(\widetilde{D}, a_k\right).$$

Рассмотрим введенную ранее систему функций $\zeta = \pi_k(w) = -i\left(e^{-i\theta_k} w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $k = \overline{1, n}$. Семейство функций $\{\pi_k(w)\}_{k=1}^n$ называется допустимим для разделяющего преобразования областей B_k, $k = \overline{0, n}$, относительно углов $\{P_k\}_{k=1}^n$.

Пусть $\Omega_k^{(1)}$, $k = \overline{1, n}$, обозначает область плоскости ζ, полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_k \bigcap \overline{P}_k)$, содержащей точку $\pi_k(a_k)$, со своим симметричным отражением относительно мнимой оси. В свою очередь, через $\Omega_k^{(2)}$, $k = \overline{1, n}$, обозначаем область плоскости $\mathbb{C}_\zeta$, полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_{k+1} \bigcap \overline{P}_k)$, содержащей точку $\pi_k(a_{k+1})$, со своим симметричным отражением относительно мнимой оси, $B_{n+1} := B_1$, $\pi_n(a_{n+1}) := \pi_n(a_1)$. Кроме того, $\Omega_k^{(0)}$ будет обозначать область плоскости $\mathbb{C}_\zeta$, полученную в результате объединения связной компоненты множества $\pi_k(B_0 \bigcap \overline{P}_k)$, содержащей точку $\zeta = 0$, со своим симметричным отражением относительно мнимой оси. Обозначим

$$\pi_k(a_k) := \omega_k^{(1)}, \quad \pi_k(a_{k+1}) := \omega_k^{(2)}, \quad k = \overline{1, n}, \quad \pi_n(a_{n+1}) := \omega_n^{(2)}.$$

Из определения функций π_k вытекает, что

$$|\pi_k(w) - \omega_k^{(1)}| \sim \frac{1}{\alpha_k} |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k} - 1} \cdot |w - a_k|, \quad w \to a_k, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w) - \omega_k^{(2)}| \sim \frac{1}{\alpha_k} |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k} - 1} \cdot |w - a_{k+1}|, \quad w \to a_{k+1}, \quad w \in \overline{P_k},$$

$$|\pi_k(w)| \sim |w|^{\frac{1}{\alpha_k}}, \quad w \to 0, \quad w \in \overline{P_k}.$$

Тогда, используя соответствующие результаты работ [1, 2], имеем неравенства

$$r\left(\widetilde{D}, a_k\right) \leqslant \left[\frac{r\left(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) \cdot r\left(\Omega_{k-1}^{(2)}, \omega_{k-1}^{(2)}\right)}{\frac{1}{\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1} \cdot \frac{1}{\alpha_{k-1}}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}-1}}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad k = \overline{1,n}, \tag{3}$$

$$r\left(\widetilde{D}, 0\right) \leqslant \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

Условия реализации знака равенства в неравенствах (3), (4) полностью описаны в теореме 1.9 [1]. На основании этих соотношений получаем неравенство

$$I_n(\gamma) \leqslant \prod_{k=1}^{n}\left[r\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right)\right]^{\frac{\alpha_k^2}{2}\gamma} \cdot \prod_{k=1}^{n}\left[\frac{r\left(\Omega_{k-1}^{(2)}, \omega_{k-1}^{(2)}\right) r\left(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right)}{\frac{1}{\alpha_{k-1}\cdot\alpha_k}|a_k|^{\frac{1}{\alpha_{k-1}}-1} \cdot |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}-1}}\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n}\alpha_k \cdot \prod_{k=1}^{n}\frac{|a_k|}{|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}}\left[\prod_{k=1}^{n} r^{\gamma\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right) r\left(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) r\left(\Omega_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда, согласно работам [2, 4, 5], имеем

$$I_n(\gamma) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right) \cdot \prod_{k=1}^{n}\frac{|a_k|}{|a_k a_{k+1}|^{\frac{1}{2\alpha_k}}}\left[\prod_{k=1}^{n}|\omega_k^{(1)} \cdot \omega_k^{(2)}|^{\gamma\alpha_k^2}|\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}|^{2-\gamma\alpha_k^2}\right]^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left\{\prod_{k=1}^{n}\frac{r^{\gamma\alpha_k^2}\left(\Omega_k^{(0)}, 0\right) \cdot r\left(\Omega_k^{(1)}, \omega_k^{(1)}\right) \cdot r\left(\Omega_k^{(2)}, \omega_k^{(2)}\right)}{|\omega_k^{(1)} \cdot \omega_k^{(2)}|^{\gamma\alpha_k^2}|\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}|^{2-\gamma\alpha_k^2}}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $|\omega_k^{(1)}| = |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $|\omega_k^{(2)}| = |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $|\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}| = |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} + |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}$,$k = \overline{1,n}$. Далее используя методику, развитую в [5, с. 243–247], получаем оценку

$$I_n(\gamma) \leqslant 2^{n-\frac{\gamma}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k^2}\left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right) \cdot \mu^{(\gamma)}(A_n) \cdot 2^{-n+\frac{\gamma}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k^2} \times$$

$$\times \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2\gamma}\left(G_k^{(0)}, 0\right) r\left(G_k^{(1)}, -i\right) r\left(G_k^{(2)}, i\right)\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\mu^{(\gamma)}(A_n)\left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2\gamma}\left(G_k^{(0)}, 0\right) r\left(G_k^{(1)}, -i\right) r\left(G_k^{(2)}, i\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

где $G_k^{(0)}$, $G_k^{(1)}$,$G_k^{(2)}$ – круговые области квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = \frac{(4-\alpha_k^2\gamma)w^2 - \alpha_k^2\gamma}{w^2(w^2+1)^2}\, dw^2$$

$(0 \in G_k^{(0)}$, $-i \in G_k^{(1)}$, $i \in G_k^{(2)})$. Учитывая условия теоремы 1, имеем

$$I_n(\gamma) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \left[\prod_{k=1}^{n} r^{\alpha_k^2\gamma} \left(G_k^{(0)}, 0\right) r \left(G_k^{(1)}, -i\right) r \left(G_k^{(2)}, i\right)\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

При $\gamma \in (0, 1]$ из неравенства (5) согласно [2, 4, 5] можно получить оценку

$$I_n(\gamma) \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \left[\prod_{k=1}^{n} S\left(\alpha_k\sqrt{\gamma}\right)\right]^{1/2}, \tag{6}$$

$S(\sigma) = 2^{\sigma^2+6} \cdot \sigma^{\sigma^2} \cdot (2-\sigma)^{-\frac{1}{2}(2-\sigma)^2} \cdot (2+\sigma)^{-\frac{1}{2}(2+\sigma)^2}$, $\sigma \in [0, 2]$. Для произвольного $\gamma > 1$ неравенство (6) не справедливо. Для того, чтобы провести дальнейшие рассуждения, нам необходимо исследовать случай $\alpha_0\sqrt{\gamma} \geqslant 2$, $\alpha_0 = \max\limits_k \alpha_k$. Для этого, используем метод работы [5, с. 255–258]. Следуя ему

$$I_n(\gamma) = \prod_{k=1}^{n} \left[r(B_0, 0) r(B_k, a_k)\right]^{\frac{\gamma}{n}} \left[\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Из теоремы М. А. Лаврентьева [11] имеет место неравенство $r(B_0, 0) r(B_k, a_k) \leqslant |a_k|^2$. За теоремою 5.1.1 [5] справедлива оценка

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant 2^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \mu^{(0)}(A_n).$$

Из условия $\mu^{(0)}(A_n) \leqslant 1$ следует, что $\prod\limits_{k=1}^{n} |a_k| \leqslant 1$. Тогда имеем

$$I_n(\gamma) \leqslant \left[2^n \cdot \prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Поскольку $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 2$, то используя неравенство Коши между средним геометрическим и средним арифметическим приходим к соотношению

$$I_n(\gamma) \leqslant \left[2^n \alpha_0 (2-\alpha_0)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}.$$

Из результатов работ [1, 2, 5] и свойств разделяющего преобразования

$$I_n^0(\gamma) = r^{\gamma}(\Lambda_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(\Lambda_k, \lambda_k) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Рассмотрим величину

$$O_n(\gamma) = \frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)} = \frac{r^{\gamma}(B_0, 0) \prod\limits_{k=1}^{n} r(B_k, a_k)}{r^{\gamma}(\Lambda_0, 0) \prod\limits_{k=1}^{n} r(\Lambda_k, \lambda_k)}.$$

Справедливо следующее неравенство

$$O_n(\gamma) \leqslant \frac{\left[2 \cdot 2^{n-1} \cdot \alpha_0 (2-\alpha_0)^{n-1} (n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}}{\left(\frac{4}{n}\right)^{n-1-\gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)} \left(\frac{4}{n}\right)^{\gamma+1-\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}} \left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{-n-\frac{\gamma}{n}} \left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}},$$

где $\alpha_0 \geqslant \frac{2}{\sqrt{\gamma}} > \frac{2}{n}$. Таким образом,

$$O_n(\gamma) \leqslant \left[\frac{n}{4}\right]^{\gamma+1} \cdot \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right]^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}} \cdot \left(\frac{n}{\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}} \times$$

$$\times \left(\frac{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}} \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{\gamma}}\right)^{1-\frac{\gamma}{n}} \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\gamma\frac{n-1}{n}}.$$

При получении оценки числового значения $O_n(\gamma)$ решающую роль сыграл результат А. К. Бахтина [5, с.204]. Рассмотрим значение $O_n(\gamma)$ при $\gamma = n^{\frac{1}{2}}$ и $n \geqslant 541$. В этом случае

$$O_n(\sqrt{n}) \leqslant \prod_{k=1}^{6} y_k(n),$$

где $y_1(n) = \left[\frac{n}{4}\right]^{\sqrt{n}+1-\frac{1}{\sqrt{n}}} \cdot \left[1 - \frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right]^{n-1-\frac{n-1}{\sqrt{n}}}$, $y_2(n) = \left(\frac{n^{\frac{3}{2}}}{4}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$, $y_3(n) = \left(1 - \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)^{n+\frac{1}{\sqrt{n}}}$, $y_4(n) = \left(\frac{1+\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}}{1-\frac{1}{n^{\frac{3}{4}}}}\right)^{2n^{\frac{1}{4}}}$, $y_5(n) = \left(\frac{4}{n^{\frac{1}{4}}}\right)^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}$, $y_6(n) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1-\frac{n-1}{\sqrt{n}}}$. Далее, используя рассуждения, приведенные в [10], получим, что при $n \geqslant 541$ справедливо неравенство $O_n(\sqrt{n}) \leqslant 1$, а значит

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant r^{\gamma}(\Lambda_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(\Lambda_k, \lambda_k) = I_n^0(\gamma)$$

для произвольной конфигурации областей B_0, B_1, B_2, ..., B_n. Случай $\gamma = n^{0{,}42}$ при $n = \overline{8,\,540}$ рассматривается аналогично (см. работу [8]).

Пусть теперь $\gamma \in (1;\,\gamma_n]$, где $\gamma_n = n^{0{,}42}$ при $n = \overline{8,\,540}$ и $\gamma_n = n^{0{,}5}$ при $n \geqslant 541$. Учитывая, что функция

$$\left[2^n \cdot \frac{2}{\sqrt{\gamma}}\left(2 - \frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^{n-1}(n-1)^{-(n-1)}\right]^{1-\frac{\gamma}{n}}$$

при фиксированном n монотонно возрастает по γ на промежутке $(1;\,\gamma_n]$, получим, что $I_n(\gamma) \leqslant I_n(\gamma_n)$. Функция $I_n^0(\gamma)$ монотонно убывает по γ при фиксированном n на том же промежутке, а значит $I_n^0(\gamma) \geqslant I_n^0(\gamma_n)$, $\gamma \in (1, \gamma_n]$. Отсюда

$$O_n(\gamma) = \frac{I_n(\gamma)}{I_n^0(\gamma)} < \frac{I_n(\gamma_n)}{I_n^0(\gamma_n)} = O_n(\gamma_n) < 1.$$

Значит, при $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\alpha_0\sqrt{\gamma} \geqslant 2$, $n \geqslant 8$, справедливо неравенство $I_n(\gamma) < I_n^0(\gamma)$. Остается рассмотреть случай $\alpha_0\sqrt{\gamma} < 2$. При этом условии справедливость теоремы 1 следует из работы [9] (см. также [6]). Утверждение о знаке равенства проверяется непосредственно. □

Из теоремы 1 получаем следующие результаты.

Следствие 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $R \in \mathbb{R}^+$, $n \geqslant 8$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = n^{0{,}42}$ при $n = \overline{8,\,540}$, и $\gamma_n = \sqrt{n}$ при $n \geqslant 541$. Тогда для любой n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ такой, что $\mu^{(\gamma)}(A_n) \leqslant R^{n+\gamma}$, $\mu^{(0)}(A_n) \leqslant R^n$, и любого набора попарно неналегающих областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0$ $(k = \overline{1,n})$, справедливо неравенство (1), где Λ_k, λ_k, $k = \overline{0,n}$, $\lambda_0 = 0$, – круговые области и полюсы квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2-\gamma)w^n + R^n\gamma}{w^2(w^n - R^n)^2}\,dw^2.$$

Следствие 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 8$, $\gamma \in (0,\,\gamma_n]$, $\gamma_n = n^{0{,}42}$ при $n = \overline{8,\,540}$, и $\gamma_n = \sqrt{n}$ при $n \geqslant 541$. Тогда для любой системы точек a_k такой, что $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, $a_1 = 1$, и любого набора попарно неналегающих областей B_k таких, что $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0$, $(k = \overline{1,n})$, справедливо неравенство (1), где Λ_k, λ_k, $k = \overline{0,n}$, $\lambda_0 = 0$, – круговые области и полюсы квадратичного дифференциала (2).

При условии, что максимальный угол с вершинами $(a_k;\widehat{a_0;a}_{k+1})$, $k = \overline{1,n}$, не превосходит $2\pi/\sqrt{\gamma}$ получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 10$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = 0{,}1\,n^2$. Тогда для любой n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, $\mu(A_n) = 1$ такой, что $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1,n}$ и любого набора областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяющего условию частичного налегания относительно лучевой системы*

A_n, справедливо неравенство

$$r^{\gamma}\left(B_0,0\right)\prod_{k=1}^{n} r\left(B_k,a_k\right)\leqslant\left(\frac{4}{n}\right)^{n}\frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1-\frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}}\left(\frac{1-\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1+\frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \qquad (7)$$

Знак равенства в этом неравенстве достигается, когда a_k и B_k, $k=\overline{0,n}$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала (2).

Доказательство. Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 1, приходим к неравенству (6), из которого получаем следующую оценку

$$I_n(\gamma)\leqslant\gamma^{-\frac{n}{2}}\left[\prod_{k=1}^{n}P\left(\alpha_k\sqrt{\gamma}\right)\right]^{1/2},$$

где $P(x)=2^{x^2+6}\cdot x^{x^2+2}\cdot(2-x)^{-\frac{1}{2}(2-x)^2}\cdot(2+x)^{-\frac{1}{2}(2+x)^2}$, $x\in[0,2]$. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\prod_{k=1}^{n}P(x_k)\longrightarrow\max;\quad\sum_{k=1}^{n}x_k=2\sqrt{\gamma},\quad x_k=\alpha_k\sqrt{\gamma},\quad 0<x_k\leqslant 2.$$

Пусть $F(x)=\ln\left(P(x)\right)$ и $X^{(0)}=\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ – произвольная экстремальная точка выше указанной задачи. Согласно [6] имеет место утверждение: если $0<x_k^{(0)}<x_j^{(0)}<2$, $k\neq j$, тогда

$$F'(x_k^{(0)})=F'(x_j^{(0)}), \qquad (8)$$

и если некоторое $x_j^{(0)}=2$, тогда для произвольного $x_k^{(0)}<2$,

$$F'(x_k^{(0)})\leqslant F'(x_j^{(0)})=F'(2)=1, \qquad (9)$$

где $k,j=\overline{1,n}$, $k\neq j$, $F'(x)=2x\ln 2x+(2-x)\ln(2-x)-(2+x)\ln(2+x)+\frac{2}{x}$. Покажем, что на основании соотношений (8) и (9) при условиях теоремы 2 выполняется равенство $x_1^{(0)}=x_2^{(0)}=\ldots=x_n^{(0)}$. Пусть для простоты $x_1^{(0)}\leqslant x_2^{(0)}\leqslant\ldots\leqslant x_n^{(0)}$. Функция $F''(x)=\ln(4x^2/(4-x^2))-2x^{-2}$ строго возрастает на $(0,2)$ и существует x_0, $x_0\approx 1,324661$ такое, что $signF''(x)\equiv sign(x-x_0)$.

Далее, опираясь на методику, разработаную в [6], имеем, что для функции $F'(x)$ всегда выполняется соотношение $(x_1-0,63)\,n+(x_2-x_1)>0$ для $n\geqslant 10$. Отсюда $nx_1+(x_2-x_1)>0,63\,n$. И окончательно имеем

$$(n-1)x_1+x_2>2\sqrt{\gamma_n},\quad\gamma_n=0,1\,n^2,\quad n\geqslant 10.$$

Таким образом, согласно работе [6], получаем, что в случае $n \geqslant 10$ набор точек $\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ не может быть экстремальным при условии $x_n^{(0)} \in (x_0; 2]$. Следовательно, для экстремального набора $\left\{x_k^{(0)}\right\}_{k=1}^{n}$ возможен только случай, когда $x_k^{(0)} \in (0, x_0]$, $k = \overline{1, n}$, и $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}$. Для всех $\gamma < \gamma_n$, $n \geqslant 10$, все предыдущие рассуждения сохраняются. Окончательно, с учетом всего выше сказаного, имеем соотношение

$$I_n(\gamma) \leqslant \gamma^{-\frac{n}{2}} \left[P\left(\frac{2}{n}\sqrt{\gamma}\right)\right]^{n/2}.$$

Используя конкретное выражение для $P(x)$ и несложные преобразования, получаем неравенство (7). Реализация знака равенства проверяется непосредственно.$\square$

Из теоремы 2 имеем следующие утверждения.

Следствие 3. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 10$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = 0,1\,n^2$. Тогда для любой n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, $\mu(A_n) = R^{n+\gamma}$ такой, что $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1, n}$ и любого набора областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяющего условию частичного налегания относительно лучевой системы A_n, справедливо неравенство

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \mu(A_n) \left(\frac{4}{n}\right)^{n} \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

Знак равенства в котором достигается, когда a_k и B_k, $k = \overline{0, n}$, являются, соответственно, полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + R^n\gamma}{w^2(w^n - R^n)^2}\,dw^2.$$

Следствие 4. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 10$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = 0,1\,n^2$. Тогда для любой n-лучевой системы точек $A_n = \{a_k\}_{k=1}^{n}$, $|a_k| = 1$ такой, что $0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1, n}$ и любого набора взаимно непересекающихся областей B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, n}$, $a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, справедливо неравенство (7). Знак равенства достигается в том же случае что и в теореме 2.

Авторы выражают благодарность А.К. Бахтину за постановку задачи, ценные советы и замечания по написанию этой работы.

1. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – 49, № 1(295). – С. 3–76.
2. *Дубинин В. Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – 168. – С. 48–66.

3. *Dubinin V. N.* Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory // Springer Basel, 2014. – 344 p.
4. *Колбина Л. И.* Конформное отображение единичного круга на неналегающие области // Вестник Ленингр. ун-та. – 1955. – 5. – С. 37–43.
5. *Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Праці ін-ту мат-ки НАН Укр. – 2008. – 308 с.
6. *Ковалев Л. В.* К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности // Дальневосточный матем. сборник. – 1996. – 2. – С. 96–98.
7. *Кузьмина Г. В.* Метод экстремальной метрики в задачах о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей при наличии свободных параметров // Зап. научн. семин. ПОМИ. — 2003. — 302. — С. 52–67.
8. *Бахтин А. К., Вьюн В. Е., Таргонский А. Л.* Неравенства для внутренних радиусов взаимно непересекающихся областей // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – 2015. – Т. 12, № 3. – С. 38–46.
9. *Бахтина Г. П., Вьюн В. Е., Денега И. В.* Задачи об экстремальном разбиении для частично налегающих областей // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – 2015. – Т. 12, № 3. – С. 31–37.
10. *Заболотний Я. В.* Знаходження максимуму добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей // Доп. НАН України. – 2016. – № 3. – С. 7–13.
11. *Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – 5. – С. 159–245.
12. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
13. *Дженкинс Дж. А.* Однолистные функции и конформные отображения. – М.: Издательство иностр. лит., 1962. – 256 с.

I. V. Denega, Y. V. Zabolotnii

Generalization of the some results on non-overlapping domains.

In this paper one quite general problem of geometric function theory on extremal decomposition of complex plane is consider.

Keywords: *inner radius of domain, non-overlapping domains, radial system of points, separating transformation, quadratic differential, Green function.*

І. В. Денега, Я. В. Заболотний

Узагальнення деяких результатів про області, що не перетинаються.

В даній роботі вивчається одна із класичних проблем геометричної теорії функцій про екстремальне розбиття комплексної площини.

Ключові слова: *внутрішній радіус області, області, що не перетинаються, променеві системи точок, розділяюче перетворення, квадратичний диференціал, функція Гріна.*

Институт математики НАН Украины, Киев
`iradenega@yandex.ru`,
`yaroslavzabolotnii@mail.ru`

Получено 8.06.16