УДК 517.9

©2015. **С. М. Чуйко, А. С. Чуйко, О. В. Несмелова**

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛЬЕНАРА, НЕ РАЗРЕШЕННОГО ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Исследована задача о нахождении необходимых и достаточных условий существования и построения решений автономной периодической задачи для уравнения типа Льенара, неразрешенного относительно производной. В качестве примера применения полученных условий существования и построенных итерационных схем, исследована задача о нахождении периодических решений уравнения Лотка-Вольтерра.

Ключевые слова: *автономная периодическая краевая задача, уравнение типа Льенара, метод наименьших квадратов, уравнение Лотка–Вольтерра.*

1. Постановка задачи.

Исследована задача о нахождении условий существования и построении $T_1(\varepsilon)$ – периодических решений [4, 11, 12]

$$y(t,\varepsilon): \; y(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^2[0,T_1(\varepsilon)], \; T_1(0)=2\pi, \; y(t,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$$

уравнения типа Льенара, не разрешенного относительно производной [3, c. 174]

$$y''(t,\varepsilon) + y(t,\varepsilon) = \varepsilon \cdot Y(y(t,\varepsilon), y'(t,\varepsilon), y''(t,\varepsilon), \varepsilon). \tag{1}$$

Периодические решения уравнения типа Льенара (1) ищем в малой окрестности нетривиального решения порождающего уравнения $y_0''(t) + y_0(t) = 0$. Здесь $Y(y,y',y'',\varepsilon)$ — нелинейная скалярная функция, непрерывно дифференцируемая по неизвестной y и ее производным y' и y'' в малой окрестности решения порождающей задачи и его производных y_0' и y_0'', а также непрерывно дифференцируемая по малому параметру ε на отрезке $[0,\varepsilon_0]$. Поставленная задача является продолжением исследования автономных краевых задач [4, 7, 11, 12, 15, 17, 19], а также краевых задач, не разрешенных относительно производной [5, 8]

Существенным отличием автономной периодической задачи для уравнения (1) от аналогичной неавтономной периодической задачи является тот факт, что любое периодическое решение $z(t,\varepsilon)$ уравнения (1) существует наряду с серией периодических решений вида $z(t+h,\varepsilon)$. Этот факт позволяет зафиксировать начало отсчета независимой переменной $h \in \mathbb{R}^1$ таким образом, чтобы решение порождающей задачи стало однопараметрическим [4, c. 148]. Поставленная задача является критической [2, 4, 12]. Для произвольной функции $f(t)$ задача о нахождении 2π –

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного Фонда фундаментальных исследований Украины (номер государственной регистрации 0115U003182)

периодических решений уравнения

$$y_0''(t,c) + y_0(t,c) = f(t), \ f(t) \in \mathbb{C}[0,2\pi] \tag{2}$$

разрешима тогда и только тогда, когда

$$\int_0^{2\pi} H(s) f(s) \, ds = 0, \ H(t) := \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix};$$

в этом случае общее решение периодической задачи для уравнения (2) имеет вид

$$y_0(t,c) = c \cdot \cos t + g\Big[f(s)\Big](t), \ g\Big[f(s)](t) := \int_0^t \sin(t-s) f(s) \, ds, \ c \in \mathbb{R}^1.$$

Совершая в уравнении (1) замену независимой переменной [4]

$$t = \tau(1+\varepsilon\beta(\varepsilon)), \ T_1(\varepsilon) = 2\pi(1+\varepsilon\beta(\varepsilon)), \ \beta(\varepsilon) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0], \ \beta(0) := \beta_0,$$

приходим к задаче об отыскании 2π – периодических решений

$$y(\tau,\varepsilon): \ y(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^2[0,2\pi], \ y(\tau,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$$

уравнения

$$y''(\tau,\varepsilon) + y(\tau,\varepsilon) = \varepsilon\, \mathcal{Y}(y(\tau,\varepsilon), y'(\tau,\varepsilon), y''(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon). \tag{3}$$

При условии $1+\varepsilon\beta(\varepsilon) \neq 0$ функция

$$\mathcal{Y}(y(\tau,\varepsilon), y'(\tau,\varepsilon), y''(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon) := -(2+\varepsilon\beta(\varepsilon))\beta(\varepsilon)\, y(\tau,\varepsilon) + \\ + (1+\varepsilon\beta(\varepsilon))^2\, Y\left(y(\tau,\varepsilon), \frac{y'(\tau,\varepsilon)}{(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))}, \frac{y''(\tau,\varepsilon)}{(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))^2}, \varepsilon\right)$$

непрерывно дифференцируема по неизвестной $y(\tau,\varepsilon)$ и ее производным $y'(\tau,\varepsilon)$ и $y''(\tau,\varepsilon)$ в малой окрестности решения порождающей задачи и его производных $y_0'(\tau,c_0)$ и $y_0'(\tau,c_0)$, непрерывно дифференцируема по функции $\beta(\varepsilon)$ в малой окрестности точки β_0, а также непрерывно дифференцируема по малому параметру ε на отрезке $[0,\varepsilon_0]$.

2. Необходимое условие существования решения.

Необходимое и достаточное условие существования 2π – периодических решений уравнения (3):

$$\int_0^{2\pi} H(s)\, \mathcal{Y}(y(s,\varepsilon), y'(s,\varepsilon), y''(s,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon) \, ds = 0 \tag{4}$$

приводит к уравнению для порождающих амплитуд

$$F(\check{c}_0) := \int_0^{2\pi} H(s)\, \mathcal{Y}(y_0(s,c_0), y_0'(s,c_0), y_0''(s,c_0), \beta_0, 0) \, ds = 0. \tag{5}$$

Лемма. *Если периодическая задача для уравнения типа Льенара* (1) *имеет решение*

$$y(t,\varepsilon): \ y(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^2[0, T_1(\varepsilon)], \ T_1(0) = 2\pi, \ y(t,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0], \ 1 + \varepsilon\beta(\varepsilon) \neq 0,$$

при $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $y_0(t, c_0) = c_0 \cdot \cos t$, *то вектор* $\check{c}_0$ *удовлетворяет уравнению*

$$F(\check{c}_0) = 0, \ \check{c}_0 := \mathrm{col}\ (c_0, \ \beta_0) \in \mathbb{R}^2.$$

Предположим, что уравнение для порождающих амплитуд (5) имеет действительные корни. Фиксируя одно из решений $\check{c}_0 \in \mathbb{R}^2$ уравнения (5), приходим к задаче об отыскании периодических решений уравнения типа Льенара (1)

$$y(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau, c_0) + x(\tau,\varepsilon)$$

в окрестности порождающего решения $y_0(\tau, c_0) = c_0 \cdot \cos\tau$. Обозначим матрицу

$$B_0 := \frac{\partial F(\check{c})}{\partial \check{c}}\Bigg|_{\substack{c \ = c_0, \\ \beta \ = \beta_0}} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

В случае $\det B_0 \neq 0$ уравнение (1) имеет единственное периодическое решение [4, 11, 17], при $\varepsilon = 0$ обращающееся в порождающее $y_0(t, c_0) = c_0 \cdot \cos t$. Данный критический случай назван критическим случаем первого порядка [4, 11, 12, 17]. Менее изученным является случай [13, 18] кратных корней ($\det B_0 = 0$) уравнения (5); при этом согласно традиционной классификации периодических краевых задач поставленная задача для уравнения (1) не может быть отнесена к критическому случаю второго или более высокого порядка [12], а также к особому критическому случаю, поскольку уравнение для порождающих амплитуд не обращается в тождество [6, 16]

При наличии кратных корней уравнения для порождающих амплитуд, оставляя одну линейно-независимую строку уравнения (5), получаем эквивалентное условие разрешимости периодической задачи для уравнения типа Льенара (1)

$$F_\rho(\check{c}_0) := \int_0^{2\pi} H_\rho(s)\, \mathcal{Y}(y_0(s,c_0), y_0'(s,c_0), y_0''(s,c_0), \beta_0, 0)\ ds = 0; \tag{6}$$

здесь $H_\rho(t) = \cos t$, либо $H_\rho(t) = \sin t$, в зависимости от нелинейности $Y(y, y', y'', \varepsilon)$ уравнения (1). Предметом исследования данной статьи является случай кратных ($\det B_0 = 0$) корней уравнения для порождающих амплитуд (5) при условии, что матрица B_0 имеет ненулевые элементы: $B_0 \neq 0$; назовем этот случай частным критическим случаем [9, 13, 18].

Пример. Частный критический случай имеет место в задаче о нахождении периодического решения

$$z(t,\varepsilon) := (\ z^{(a)}(t,\varepsilon)\ z^{(b)}(t,\varepsilon)\ )^*,\ z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1[0,T_1(\varepsilon)],\ z(t,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$$

уравнения Лотка-Вольтерра

$$z'(t,\varepsilon) = Az(t,\varepsilon) + Z(z(t,\varepsilon)), A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, Z(z(t,\varepsilon)) := \begin{pmatrix} -z^{(a)}(t,\varepsilon)z^{(b)}(t,\varepsilon) \\ z^{(a)}(t,\varepsilon)z^{(b)}(t,\varepsilon) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Уравнение (7) в окрестности положения равновесия $z^{(a)}(t,\varepsilon) \equiv 1,\ z^{(b)}(t,\varepsilon) \equiv 1$ посредством замены $z^{(a)}(t,\varepsilon) := 1 + \varepsilon\, u(t,\varepsilon),\ z^{(b)}(t,\varepsilon) := 1 + \varepsilon\, y(t,\varepsilon)$ приводится к виду

$$(1 + \varepsilon y(t,\varepsilon))y''(t,\varepsilon) = \varepsilon(y'(t,\varepsilon))^2 - y(t,\varepsilon)(1 + \varepsilon y(t,\varepsilon))(1 + \varepsilon y(t,\varepsilon) + \varepsilon y'(t,\varepsilon)). \tag{8}$$

В свою очередь, уравнение (8) приводится к виду (1) посредством функции

$$\mathcal{Y}(y(\tau,\varepsilon), y'(\tau,\varepsilon), y''(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon) := (y'(\tau,\varepsilon))^2 - \varepsilon\,(1 + \varepsilon\beta(\varepsilon))^2\, y^3(\tau,\varepsilon) + \varepsilon y'(\tau,\varepsilon)) -$$
$$-(1+\varepsilon\beta(\varepsilon))\, y^2(\tau,\varepsilon)(2+2\,\varepsilon\beta(\varepsilon) - y(\tau,\varepsilon)(\beta(\varepsilon)(2+\varepsilon\beta(\varepsilon)) + (1+\varepsilon\beta(\varepsilon))y'(\tau,\varepsilon) + y''(\tau,\varepsilon)).$$

Уравнение для порождающих амплитуд (6) в случае задачи о нахождении периодического решения уравнения (8) принимает вид $F_\rho(c_0,\beta_0) = -2\pi c_0\beta_0 = 0$. Корень $c_0 = 0$ соответствует тривиальному порождающему решению $y_0(\tau,c_0) \equiv 0$. Положим $\beta_0 = 0,\ c_0 = 0,1$; матрица B_0 при этом имеет ненулевые элементы

$$B_0 = -\frac{\pi}{5}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq 0;$$

таким образом, задача о нахождении периодического решения уравнения (7) представляет частный критический случай, при этом $1 + \varepsilon\beta_0 \equiv 1 \neq 0$.

3. Достаточные условия существования решения.

Фиксируя один из корней $\check{c}_0 \in \mathbb{R}^2$ уравнения (6), приходим к задаче об отыскании периодических решений $y(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,c_0) + x(\tau,\varepsilon)$ уравнения (1) в окрестности порождающего решения. Для нахождения возмущения $x(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^2[0,2\pi],\ x(\tau,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$ получаем уравнение

$$x''(\tau,\varepsilon) + x(\tau,\varepsilon) = \varepsilon\,\mathcal{Y}(y(\tau,\varepsilon), y'(\tau,\varepsilon), y''(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon). \tag{9}$$

Решение $x(\tau,\varepsilon) = \nu \cdot \cos\tau + x^{(1)}(\tau,\varepsilon),\ \beta(\varepsilon) := \beta_0 + \gamma(\varepsilon)$ периодической задачи для уравнения (9) зависит от выбора корня $\check{c}_0$; здесь

$$x^{(1)}(\tau,\varepsilon) := \varepsilon\, g[\mathcal{Y}(y_0(s,c_0) + x(s,\varepsilon), y_0'(s,c_0) + x'(s,\varepsilon), y_0''(s,c_0) + x''(s,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)](\tau).$$

Предположим, что порождающее решение $y_0(\tau, c_0)$ не является искомым периодическим решением уравнения (1). Обозначим производные

$$\mathcal{A}_1(y_0(\tau, c_0), \beta_0) := \frac{\partial \mathcal{Y}(y(\tau,\varepsilon), y'(\tau,\varepsilon), y''(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial y}\Bigg|_{\begin{array}{rcl} y(\tau,\varepsilon) &=& y_0(\tau,c_0), \\ y'(\tau,\varepsilon) &=& y_0'(\tau,c_0), \\ y''(\tau,\varepsilon) &=& y_0''(\tau,c_0), \\ \beta(\varepsilon) &=& \beta_0, \\ \varepsilon &=& 0, \end{array}}$$

$$\mathcal{A}_2(y_0(\tau, c_0), \beta_0) := \frac{\partial \mathcal{Y}(y(\tau,\varepsilon), y'(\tau,\varepsilon), y''(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial y'}\Bigg|_{\begin{array}{rcl} y(\tau,\varepsilon) &=& y_0(\tau,c_0), \\ y'(\tau,\varepsilon) &=& y_0'(\tau,c_0), \\ y''(\tau,\varepsilon) &=& y_0''(\tau,c_0), \\ \beta(\varepsilon) &=& \beta_0, \\ \varepsilon &=& 0, \end{array}}$$

$$\mathcal{A}_3(y_0(\tau, c_0), \beta_0) := \frac{\partial \mathcal{Y}(y(\tau,\varepsilon), y'(\tau,\varepsilon), y''(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial y''}\Bigg|_{\begin{array}{rcl} y(\tau,\varepsilon) &=& y_0(\tau,c_0), \\ y'(\tau,\varepsilon) &=& y_0'(\tau,c_0), \\ y''(\tau,\varepsilon) &=& y_0''(\tau,c_0), \\ \beta(\varepsilon) &=& \beta_0, \\ \varepsilon &=& 0, \end{array}}$$

$$\mathcal{A}_\beta(y_0(\tau, c_0), \beta_0) := \frac{\partial \mathcal{Y}(y(\tau,\varepsilon), y'(\tau,\varepsilon), y''(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial \beta}\Bigg|_{\begin{array}{rcl} y(\tau,\varepsilon) &=& y_0(\tau,c_0), \\ y'(\tau,\varepsilon) &=& y_0'(\tau,c_0), \\ y''(\tau,\varepsilon) &=& y_0''(\tau,c_0), \\ \beta(\varepsilon) &=& \beta_0, \\ \varepsilon &=& 0, \end{array}}$$

$$\mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau, c_0), \beta_0) := \frac{\partial \mathcal{Y}(y(\tau,\varepsilon), y'(\tau,\varepsilon), y''(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\Bigg|_{\begin{array}{rcl} y(\tau,\varepsilon) &=& y_0(\tau,c_0), \\ y'(\tau,\varepsilon) &=& y_0'(\tau,c_0), \\ y''(\tau,\varepsilon) &=& y_0''(\tau,c_0), \\ \beta(\varepsilon) &=& \beta_0, \\ \varepsilon &=& 0. \end{array}}$$

Используя непрерывную дифференцируемость по неизвестной $y(\tau, \varepsilon)$ и ее производным $y'(\tau, \varepsilon)$ и $y''(\tau, \varepsilon)$ в малой окрестности решения порождающей задачи и его производных $y_0'(\tau, c_0)$ и $y_0''(\tau, c_0)$, а также непрерывную дифференцируемость по $\beta(\varepsilon)$ в окрестности точки β_0 и по ε в малой положительной окрестности нуля, разлагаем эту функцию в окрестности точек $y_0(\tau, c_0)$, $y_0'(\tau, c_0)$, $y_0''(\tau, c_0)$, β_0 и $\varepsilon = 0$:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{Y}(y_0(\tau,c_0)+x(\tau,\varepsilon), y_0'(\tau,c_0)+x'(\tau,\varepsilon), y_0''(\tau,c_0)+x''(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon) = \\
&\quad = \mathcal{Y}(y_0(\tau,c_0), y_0'(\tau,c_0), y_0''(\tau,c_0), \beta_0, 0) + \mathcal{A}_1(y_0(\tau,c_0),\beta_0)x(\tau,\varepsilon) + \\
&\quad + \mathcal{A}_2(y_0(\tau,c_0),\beta_0)x'(\tau,\varepsilon) + \mathcal{A}_3(y_0(\tau,c_0),\beta_0)x''(\tau,\varepsilon) + \mathcal{A}_\beta(y_0(\tau,c_0),\beta_0)\gamma(\varepsilon) + \\
&+\varepsilon\,\mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau,c_0),\beta_0) + \mathcal{R}(y_0(\tau,c_0)+x(\tau,\varepsilon), y_0'(\tau,c_0)+x'(\tau,\varepsilon), y_0''(\tau,c_0)+x''(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon).
\end{aligned}$$

Здесь $\mathcal{R}(y_0(\tau,c_0)+x(\tau,\varepsilon), y_0'(\tau,c_0)+x'(\tau,\varepsilon), y_0''(\tau,c_0)+x''(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)$ — остаток последнего разложения, более высокого порядка малости по $x(\tau,\varepsilon)$, $x'(\tau,\varepsilon)$, $x''(\tau,\varepsilon)$, $\gamma(\varepsilon)$ и ε в окрестности точек $y_0(\tau,c_0)$, $y_0'(\tau,c_0)$, $y_0''(\tau,c_0)$, β_0 и $\varepsilon = 0$, чем предыдущие слагаемые. Оставляя только одну линейно-независимую строку в условии (4) разрешимости задачи об отыскании периодических решений уравнения (9), с учетом равенства (6), получаем эквивалентное условие разрешимости исходной задачи об отыскании периодических решений уравнения (1):

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{B}_0(y_0(\cdot,c_0),\beta_0)\cdot\begin{pmatrix}\nu(\varepsilon)\\ \gamma(\varepsilon)\end{pmatrix} = -\int_0^{2\pi} H_\rho(\tau)\{\mathcal{A}_1(y_0(\tau,c_0),\beta_0)x^{(1)}(\tau,\varepsilon) + \\
&\qquad + \mathcal{A}_2(y_0(\tau,c_0),\beta_0)[x^{(1)}(\tau,\varepsilon)]'_\tau + \mathcal{A}_3(y_0(\tau,c_0),\beta_0)[x^{(1)}(\tau,\varepsilon)]''_{\tau^2} + \\
&\qquad\qquad + \varepsilon\,\mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau,c_0),\beta_0) + \mathcal{R}(y(\tau,\varepsilon), y'(\tau,\varepsilon), y''(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)\}\,d\tau, \quad (10)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{B}_0(y_0(\cdot,c_0),\beta_0) := \Big\{\int_0^{2\pi} H_\rho(\tau)[\mathcal{A}_1(y_0(\cdot,c_0),\beta_0)\cos\tau - \\
&- \mathcal{A}_2(y_0(\cdot,c_0),\beta_0)\sin\tau - \mathcal{A}_3(y_0(\cdot,c_0),\beta_0)\cos\tau]d\tau;\ \int_0^{2\pi} H_\rho(\tau)\mathcal{A}_\beta(y_0(\cdot,c_0),\beta_0)d\tau\Big\}
\end{aligned}$$

— постоянная (1×2) – матрица. При условии $\mathfrak{B}_0(y_0(\cdot,c_0),\beta_0) \neq 0$ уравнение (10) имеет по меньшей мере одно решение. Действительно, обозначим

$$P_{\mathfrak{B}_0(y_0(\cdot,c_0),\beta_0)}:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{N}(\mathfrak{B}_0(y_0(\cdot,c_0),\beta_0)),\ P_{\mathfrak{B}_0^*(y_0(\cdot,c_0),\beta_0)}:\ \mathbb{R}^1 \to \mathbb{N}(\mathfrak{B}_0^*(y_0(\cdot,c_0),\beta_0))$$

— отопроекторы матриц $\mathfrak{B}_0(y_0(\cdot,c_0),\beta_0)$ и $\mathfrak{B}_0^*(y_0(\cdot,c_0),\beta_0)$. При условии $\mathfrak{B}_0(y_0(\cdot,c_0),\beta_0) \neq 0$ имеет место равенство $\mathrm{rank}\ \mathfrak{B}_0(y_0(\cdot,c_0),\beta_0) = 1$, следовательно $P_{\mathfrak{B}_0^*(y_0(\cdot,c_0),\beta_0)} = 0$, при этом уравнение (10) разрешимо. Таким образом, для любого из кратных корней уравнения для порождающих амплитуд (5), при условии $\mathfrak{B}_0(y_0(\cdot,c_0),\beta_0) \neq 0$, по меньшей мере одно периодическое решение уравнения (1) определяет операторная система

$$y(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,c_0) + x(\tau,\varepsilon),\ x(\tau,\varepsilon) = \nu(\varepsilon)\cos\tau + x^{(1)}(\tau,\varepsilon),\ \beta(\varepsilon) = \beta_0 + \gamma(\varepsilon), \quad (11)$$

$$x^{(1)}(\tau,\varepsilon) := \varepsilon\, g[\mathcal{Y}(y_0(s,c_0)+x(s,\varepsilon), y_0'(s,c_0)+x'(s,\varepsilon), y_0''(s,c_0)+x''(s,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)](\tau),$$

$$\begin{pmatrix} \nu(\varepsilon) \\ \gamma(\varepsilon) \end{pmatrix} = -\mathfrak{B}_0^+(y_0(\cdot,c_0),\beta_0) \int_0^{2\pi} H_\rho(\tau)\{\mathcal{A}_1(y_0(\tau,c_0),\beta_0)x^{(1)}(\tau,\varepsilon)+$$
$$+\mathcal{A}_2(y_0(\tau,c_0),\beta_0)[x^{(1)}(\tau,\varepsilon)]'_\tau + \mathcal{A}_3(y_0(\tau,c_0),\beta_0)[x^{(1)}(\tau,\varepsilon)]''_{\tau^2}+$$
$$+\varepsilon\,\mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau,c_0),\beta_0) + \mathcal{R}(y(\tau,\varepsilon), y'(\tau,\varepsilon), y''(\tau,\varepsilon), \beta(\varepsilon), \varepsilon)\}\, d\tau.$$

В силу равенства $\operatorname{rank} P_{\mathfrak{B}_0(y_0(\cdot,c_0),\beta_0)} = 1$ система (11) разрешима не однозначно.

Теорема. *При наличии кратных корней уравнения для порождающих амплитуд* (5)*, при условии* $\mathfrak{B}_0(y_0(\cdot,c_0),\beta_0) \neq 0$ *задача об отыскании периодических решений уравнения* (1) *имеет по меньшей мере одно решение, при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $y(\tau,0) = y_0(\tau,c_0)$*, при условии* $1+\varepsilon\beta(\varepsilon)\neq 0$ *представимое операторной системой* (11)*. Для построения периодических решений уравнения* (1) *применима итерационная схема*

$$y_{k+1}(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,c_0) + x_{k+1}(\tau,\varepsilon),\ x_{k+1}(\tau,\varepsilon) = \nu_{k+1}(\varepsilon)\cos\tau + x_{k+1}^{(1)}(\tau,\varepsilon),$$

$$x_{k+1}^{(1)}(\tau,\varepsilon) = \varepsilon\, g[\mathcal{Y}(y_k(s,\varepsilon), y_k'(s,\varepsilon), y_k''(s,\varepsilon), \beta_k(\varepsilon), \varepsilon)](\tau), \tag{12}$$

$$\begin{pmatrix} \nu_{k+1}(\varepsilon) \\ \gamma_{k+1}(\varepsilon) \end{pmatrix} = -\mathfrak{B}_0^+(y_0(\cdot,c_0),\beta_0) \int_0^{2\pi} H_\rho(\tau)\{\mathcal{A}_1(y_0(\tau,c_0),\beta_0)x_{k+1}^{(1)}(\tau,\varepsilon)+$$
$$+\mathcal{A}_2(y_0(\tau,c_0),\beta_0)[x_{k+1}^{(1)}(\tau,\varepsilon)]'_\tau + \mathcal{A}_3(y_0(\tau,c_0),\beta_0)[x_{k+1}^{(1)}(\tau,\varepsilon)]''_{\tau^2}+$$
$$+\varepsilon\,\mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau,c_0),\beta_0) + \mathcal{R}(y_k(\tau,\varepsilon), y_k'(\tau,\varepsilon), y_k''(s,\varepsilon), \beta_k(\varepsilon), \varepsilon)\}\, d\tau,$$

$$\beta_{k+1}(\varepsilon) = \beta_0 + \gamma_{k+1}(\varepsilon),\ \dots,\ k = 0,1,2,\ \dots .$$

Пример. Построим приближение к периодическому решению уравнения Лотка–Вольтерра. Выше было установлено, что задача о построении периодического решения уравнения Лотка-Вольтерра (7) имеет решение. На первом шаге итерационной схемы (12)

$$x_1^{(1)}(\tau,\varepsilon) = \varepsilon\, g[\mathcal{Y}(y_0(s,c_0), y_0'(s,c_0), y_0''(s,c_0), \beta_0, 0)](\tau) =$$
$$= \frac{\varepsilon}{600}[-\cos\tau + 2\cos 2\tau + 2\sin\tau - \sin 2\tau\ ].$$

Далее вычисляем производные

$$\mathcal{A}_1(y_0(\tau,c_0),\beta_0) = \frac{1}{10}(\sin\tau - 3\cos\tau),\ \mathcal{A}_2(y_0(\tau,c_0),\beta_0) = -\frac{1}{10}(\ 2\sin\tau + \cos\tau),$$
$$\mathcal{A}_3(y_0(\tau,c_0),\beta_0) = -\frac{\cos\tau}{10},\ \mathcal{A}_\beta(y_0(\tau,c_0),\beta_0) = -\frac{\cos\tau}{5},$$
$$\mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau,c_0),\beta_0) = \frac{1}{4000}(\sin\tau + \sin 3\tau - 3\cos\tau - \cos 3\tau)$$

и матрицу

$$\mathfrak{B}_0(y_0(\cdot, c_0), \beta_0) = \frac{\pi}{5} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, первом шаге итерационной схемы (12) находим функции

$$\nu_1(\varepsilon) \approx 0,\ \gamma_1(\varepsilon) \approx \frac{\varepsilon}{1200} + \frac{\varepsilon^2}{7200} - \frac{7\,\varepsilon^3}{988\ 000} + \frac{\varepsilon^4}{2\ 400\ 000} + \ \dots\ ,$$

а также первое приближение к решению уравнения (7):

$$z_1^{(a)}(t,\varepsilon) := 1 + \varepsilon\, u_1(t,\varepsilon),\ z_1^{(b)}(t,\varepsilon) := 1 + \varepsilon\, y_1(t,\varepsilon),\ u_1(t,\varepsilon) := \frac{y_1'(t,\varepsilon)}{1 + \varepsilon\, y_1(t,\varepsilon)}.$$

Заметим, что для первого приближения к решению уравнения (7) имеет место неравенство $1+\varepsilon\beta_1 \geq 0$. Для оценки точности найденных приближений определим невязки

$$\Delta_k(\varepsilon) := \Big|\Big|\ \Big|\Big|\Big(\ \delta_k^{(a)}(\varepsilon)\ \delta_k^{(b)}(\varepsilon)\ \Big)^*\Big|\Big|_{\mathbb{R}^2}\ \Big|\Big|_{C[0;2\pi]}$$

нулевого и первого приближений к решению уравнения (7); здесь

$$\delta_k^{(a)}(\varepsilon) := (z_k^{(a)}(\tau,\varepsilon))'' - (1 + \varepsilon\beta_k(\varepsilon)) z_k^{(a)}(\tau,\varepsilon)(1 - z_k^{(b)}(\tau,\varepsilon)),$$
$$\delta_k^{(b)}(\varepsilon) := (z_k^{(b)}(\tau,\varepsilon))'' + (1 + \varepsilon\beta_k(\varepsilon)) z_k^{(b)}(\tau,\varepsilon)(1 - z_k^{(a)}(\tau,\varepsilon)),\ k = 0,\ 1.$$

Положив $\varepsilon = 0,1$, имеем $\Delta_0(0,1) \approx 0,000\ 111\ 335,\ \Delta_1(0,1) \approx 2,13\ 834 \cdot 10^{-6}$. При $\varepsilon = 0,01$ невязки имеют вид $\Delta_0(0,01) \approx 1,11\ 756 \cdot 10^{-6},\ \Delta_1(0,01) \approx 2,12\ 820 \cdot 10^{-9}$.

Для построения решений операторной системы (11) применим также метод наименьших квадратов [1, 9, 14, 19]. Введем систему линейно-независимых дважды непрерывно-дифференцируемых 2π – периодических скалярных функций $\varphi_1(\tau),\ \varphi_2(\tau),\ \dots\ ,\ \varphi_\mu(\tau),\ \dots$. Первое приближение $y_1(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,c_0) + x_1(\tau,\varepsilon)$ к периодическому решению уравнения (3) определим из уравнения

$$x_1''(\tau,\varepsilon) + x_1(\tau,\varepsilon) = \varepsilon \{\mathcal{Y}(y_0(\tau,c_0), y_0'(\tau,c_0), y_0''(\tau,c_0), \beta_0, 0) + \mathcal{A}_1(y_0(\tau,c_0),\beta_0) x_1(\tau,\varepsilon) +$$
$$+ \mathcal{A}_2(y_0(\tau,c_0),\beta_0) x_1'(\tau,\varepsilon) + \mathcal{A}_3(y_0(\tau,c_0),\beta_0) x_1''(\tau,\varepsilon) + \varepsilon\, \mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau,c_0),\beta_0)\}. \quad (13)$$

Первое приближение ищем в виде $x_1(\tau,\varepsilon) \approx \xi_1(\tau,\varepsilon) := \varphi_1(\tau) c_1(\varepsilon),\ c_1(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mu_1}$. Потребуем

$$\Theta(c_1(\varepsilon)) := ||[1 - \varepsilon\, \mathcal{A}_1(y_0(\tau,c_0),\beta_0)]\xi_1(\tau,\varepsilon) - \varepsilon\, \mathcal{A}_2(y_0(\tau,c_0),\beta_0)\xi_1'(\tau,\varepsilon) +$$
$$+ [1 - \varepsilon\, \mathcal{A}_3(y_0(\tau,c_0),\beta_0)]\xi_1''(\tau,\varepsilon) - \varepsilon\, \mathcal{Y}(y_0(\tau,c_0), y_0'(\tau,c_0), y_0''(\tau,c_0), \beta_0, 0) -$$
$$- \varepsilon^2\, \mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau,c_0),\beta_0)||^2_{L^2[0,2\pi]} \to \min.$$

Обозначим $(1 \times \mu_1)-$ матрицы

$$\mathcal{F}_1(\tau,\varepsilon) := [1 - \varepsilon\, \mathcal{A}_1(y_0(\tau,c_0),\beta_0)]\varphi_1(\tau,\varepsilon) - \varepsilon\, \mathcal{A}_2(y_0(\tau,c_0),\beta_0)\varphi_1'(\tau,\varepsilon) +$$
$$+ [1 - \varepsilon\, \mathcal{A}_3(y_0(\tau,c_0),\beta_0)]\varphi_1''(\tau),\ \varphi_1(\tau) := [\varphi_2(\tau)\ \varphi_2(\tau)\ \dots\ \varphi_{\mu_1}(\tau)].$$

Необходимое условие минимизации функции $\Theta(c_1(\varepsilon))$ приводит к уравнению

$$\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon))c_1(\varepsilon) = \varepsilon \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_1^*(\tau,\varepsilon)\,[\mathcal{Y}(y_0(\tau,c_0), y_0'(\tau,c_0), y_0''(\tau,c_0), \beta_0, 0)+ \\ +\varepsilon\,\mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau,c_0),\beta_0)]\,d\tau,$$

однозначно разрешимому при условии невырожденности матрицы Грама [1]

$$\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon)) := \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_1^*(\tau,\varepsilon)\,\mathcal{F}_1(\tau,\varepsilon)\;d\tau.$$

Таким образом находим вектор

$$c_1(\varepsilon) = \varepsilon\,\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon))^{-1} \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_1^*(\tau,\varepsilon)\,[\mathcal{Y}(y_0(\tau,c_0), y_0'(\tau,c_0), y_0''(\tau,c_0), \beta_0, 0)+ \\ +\varepsilon\,\mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau,c_0),\beta_0)]\,d\tau,$$

Первое приближение $\beta_1(\varepsilon) := \beta_0 + \gamma_1(\varepsilon)$ определим из условия существования $2\pi-$ периодического решения $x_1(\tau,\varepsilon) := \nu_1(\varepsilon)\cos\tau + \xi_1(\tau,\varepsilon)$ уравнения

$$x_1''(\tau,\varepsilon) = \varepsilon\,\{\mathcal{Y}(y_0(\tau,c_0), y_0'(\tau,c_0), y_0''(\tau,c_0), \beta_0, 0) + \mathcal{A}_1(y_0(\tau,c_0),\beta_0)x_1(\tau,\varepsilon)+ \\ +\mathcal{A}_2(y_0(\tau,c_0))x_1'(\tau,\varepsilon) + \mathcal{A}_3(y_0(\tau,c_0))x_1''(\tau,\varepsilon) + \mathcal{A}_\beta(y_0(\tau,c_0))\gamma_1(\varepsilon) + \varepsilon\,\mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau,c_0))+ \\ +\mathcal{R}(y_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon), y_0'(\tau,c_0)+\xi_1'(\tau,\varepsilon), y_0''(\tau,c_0)+\xi_1''(\tau,\varepsilon), \beta_0, \varepsilon)\}. \quad (14)$$

При условии

$$\mathfrak{B}_0(y_0(\cdot,c_0),\beta_0) \neq 0 \quad (15)$$

находим функции

$$(\ \nu_1(\varepsilon)\ \gamma_1(\varepsilon)\ )^* = -\mathfrak{B}_0^+(y_0(\cdot,c_0),\beta_0) \int_0^{2\pi} H_\rho(\tau)\{\mathcal{A}_1(y_0(\tau,c_0),\beta_0)\xi_1(\tau,\varepsilon)+ \\ +\mathcal{A}_2(y_0(\tau,c_0),\beta_0)\xi_1'(\tau,\varepsilon) + \mathcal{A}_3(y_0(\tau,c_0),\beta_0)\xi_1''(\tau,\varepsilon) + \varepsilon\,\mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau,c_0),\beta_0)+ \\ +\mathcal{R}(y_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon), y_0'(\tau,c_0)+\xi_1'(\tau,\varepsilon), \beta_0)\}\;d\tau.$$

Второе приближение к решению периодической задачи для уравнения (1)

$$y_2(\tau,\varepsilon) = y_0(\tau,c_0) + x_2(\tau,\varepsilon),\ \ x_2(\tau,\varepsilon) = \nu_1(\varepsilon)\cos\tau + \xi_1(\tau,\varepsilon) + \xi_2(\tau,\varepsilon), \\ \xi_2(\tau,\varepsilon) := \varphi_2(\tau)\,c_2(\varepsilon)$$

ищем, как $2\pi-$ периодическое решение уравнения

$$y_2''(\tau,\varepsilon) + y_2(\tau,\varepsilon) = \varepsilon\,\{\mathcal{Y}(y_0(\tau,c_0), y_0'(\tau,c_0), y_0''(\tau,c_0), \beta_0, 0) + \mathcal{A}_1(y_0(\tau,c_0),\beta_0)x_2(\tau,\varepsilon)+ \\ +\mathcal{A}_2(y_0(\tau,c_0))x_2'(\tau,\varepsilon) + \mathcal{A}_3(y_0(\tau,c_0))x_2''(\tau,\varepsilon) + \mathcal{A}_\beta(y_0(\tau,c_0))\gamma_1(\varepsilon) + \varepsilon\,\mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau,c_0))+ \\ +\mathcal{R}(y_0(\tau,c_0)+x_1(\tau,\varepsilon), y_0'(\tau,c_0)+x_1'(\tau,\varepsilon), y_0''(\tau,c_0)+x_1''(\tau,\varepsilon), \beta_1, \varepsilon)\}. \quad (16)$$

Обозначим $(1 \times \mu_2)-$ матрицы

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_2(\tau,\varepsilon) := [1-\varepsilon\,\mathcal{A}_1(y_0(\tau,c_0),\beta_0)]\varphi_2(\tau,\varepsilon) - \varepsilon\,\mathcal{A}_2(y_0(\tau,c_0),\beta_0)\varphi_2'(\tau,\varepsilon) + \\ + [1-\varepsilon\,\mathcal{A}_3(y_0(\tau,c_0),\beta_0)]\varphi_2''(\tau),\ \ \varphi_2(\tau) = [\varphi_1(\tau)\ \varphi_2(\tau)\ \dots\ \varphi_{\mu_2}(\tau)].\end{aligned}$$

Необходимое условие минимизации невязки

$$\begin{aligned}\Theta(c_2(\varepsilon)) := ||\xi_1''(\tau,\varepsilon) + \xi_1(\tau,\varepsilon) + [1-\varepsilon\,\mathcal{A}_1(y_0(\tau,c_0),\beta_0)]\xi_2(\tau,\varepsilon) - \\ - \varepsilon\,\mathcal{A}_2(y_0(\tau,c_0),\beta_0)\xi_2'(\tau,\varepsilon) + [1-\varepsilon\,\mathcal{A}_3(y_0(\tau,c_0),\beta_0)]\xi_2''(\tau,\varepsilon) - \\ - \varepsilon\,\mathcal{Y}(y_0(\tau,c_0),y_0'(\tau,c_0),y_0''(\tau,c_0),\beta_0,0) - \varepsilon\,\mathcal{A}_1(y_0(\tau,c_0))x_1(\tau,\varepsilon) - \varepsilon^2\,\mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau,c_0)) - \\ - \varepsilon\,\mathcal{A}_2(y_0(\tau,c_0))x_1'(\tau,\varepsilon) - \varepsilon\,\mathcal{A}_3(y_0(\tau,c_0))x_1''(\tau,\varepsilon) - \varepsilon\,\mathcal{A}_\beta(y_0(\tau,c_0))\gamma_1(\varepsilon) - \\ - \varepsilon\,\mathcal{R}(y_0(\tau,c_0)+x_1(\tau,\varepsilon),y_0'(\tau,c_0)+x_1'(\tau,\varepsilon),y_0''(\tau,c_0)+x_1''(\tau,\varepsilon),\beta_1,\varepsilon)||^2_{L^2[0,2\pi]} \to \min\end{aligned}$$

в решении задачи второго приближения приводит к уравнению, однозначно разрешимому относительно вектора $c_2(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{\mu_2}$ при условии невырожденности матрицы

$$\Gamma(\mathcal{F}_2(\cdot,\varepsilon)) = \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_2^*(\tau,\varepsilon)\,\mathcal{F}_2(\tau,\varepsilon)\,d\tau.$$

В этом случае находим вектор

$$\begin{aligned}c_2(\varepsilon) = -[\Gamma(\mathcal{F}_2(\cdot,\varepsilon))]^{-1}\cdot\int_0^{2\pi}\mathcal{F}_2^*(\tau,\varepsilon)\,\{\varepsilon\,\mathcal{Y}(y_0(\tau,c_0),y_0'(\tau,c_0),y_0''(\tau,c_0),\beta_0,0) + \\ + \varepsilon\,\mathcal{A}_1(y_0(\tau,c_0),\beta_0)x_1(\tau,\varepsilon) + \varepsilon\,\mathcal{A}_2(y_0(\tau,c_0),\beta_0)x_1'(\tau,\varepsilon) - \xi_1''(\tau,\varepsilon) - \xi_1(\tau,\varepsilon) + \\ + \varepsilon\,\mathcal{A}_3(y_0(\tau,c_0),\beta_0)x_1''(\tau,\varepsilon) + \varepsilon\,\mathcal{A}_\beta(y_0(\tau,c_0),\beta_0)\gamma_1(\varepsilon) + \varepsilon^2\,\mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau,c_0),\beta_0) + \\ + \varepsilon\,\mathcal{R}(y_0(\tau,c_0)+x_1(\tau,\varepsilon),y_0'(\tau,c_0)+x_1'(\tau,\varepsilon),y_0''(\tau,c_0)+x_1''(\tau,\varepsilon),\beta_1,\varepsilon)\}\,d\tau.\end{aligned}$$

Второе приближение $\beta_2(\varepsilon) := \beta_1(\varepsilon) + \gamma_2(\varepsilon)$ определим из условия существования периодического решения $x_2(\tau,\varepsilon) = \nu_1(\varepsilon)\cos\tau + \nu_2(\varepsilon)\cos\tau + \xi_1(\tau,\varepsilon) + \xi_2(\tau,\varepsilon)$ уравнения

$$\begin{aligned}x_2''(\tau,\varepsilon) + x_2(\tau,\varepsilon) = \varepsilon\,\{\mathcal{Y}(y_0(\tau,c_0),y_0'(\tau,c_0),y_0''(\tau,c_0),\beta_0,0) + \\ + \mathcal{A}_1(y_0(\tau,c_0),\beta_0)x_2(\tau,\varepsilon) + \mathcal{A}_2(y_0(\tau,c_0),\beta_0)x_2'(\tau,\varepsilon) + \\ + \mathcal{A}_3(y_0(\tau,c_0),\beta_0)x_2''(\tau,\varepsilon) + \mathcal{A}_\beta(y_0(\tau,c_0),\beta_0)(\gamma_1(\varepsilon)+\gamma_2(\varepsilon)) + \varepsilon\,\mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau,c_0),\beta_0) + \\ + \mathcal{R}(y_0(\tau,c_0)+x_1(\tau,\varepsilon),y_0'(\tau,c_0)+x_1'(\tau,\varepsilon),y_0''(\tau,c_0)+x_1''(\tau,\varepsilon),\beta_1,\varepsilon)\}. \quad (17)\end{aligned}$$

При условии (15) находим по меньшей мере один вектор

$$\begin{aligned}(\ \nu_2(\varepsilon)\ \gamma_2(\varepsilon)\ )^* = -\mathfrak{B}_0^+(y_0(\cdot,c_0),\beta_0)\int_0^{2\pi} H_\rho(\tau)\times \\ \times\{\mathcal{A}_1(y_0(\tau,c_0),\beta_0)(\nu_1(\varepsilon)\cos\tau + \xi_1(\tau,\varepsilon) + \xi_2(\tau,\varepsilon)) \\ + \mathcal{A}_2(y_0(\tau,c_0),\beta_0)(\xi_1'(\tau,\varepsilon) + \xi_2'(\tau,\varepsilon) - \nu_1(\varepsilon)\sin\tau) + \\ + \mathcal{A}_3(y_0(\tau,c_0),\beta_0)(\xi_1''(\tau,\varepsilon) + \xi_2''(\tau,\varepsilon) - \nu_1(\varepsilon)\cos\tau) + \varepsilon\,\mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau,c_0),\beta_0) + \\ + \mathcal{A}_\beta(y_0(\tau,c_0),\beta_0)\gamma_1(\varepsilon) + \mathcal{R}(y_0(\tau,c_0)+\xi_1(\tau,\varepsilon),y_0'(\tau,c_0)+\xi_1'(\tau,\varepsilon),\beta_0)\}\,d\tau.\end{aligned}$$

Продолжая рассуждения, предположим, что найдено приближение

$$y_k(\tau,\varepsilon)=y_0(\tau,c_0)+x_k(\tau,\varepsilon),\ x_k(\tau,\varepsilon)\approx\nu_1(\varepsilon)\cos\tau+\ ...\ +\nu_k(\varepsilon)\cos\tau+\xi_1(\tau,\varepsilon)+\ ...\ +$$
$$+\,\xi_k(\tau,\varepsilon),\ \xi_k(\tau,\varepsilon):=\varphi_k(\tau)c_k(\varepsilon),\ c_k(\varepsilon)\in\mathbb{R}^{\mu_k},\ \varphi_k(\tau):=[\varphi_1(\tau)\ \varphi_2(\tau)\ ...\ \varphi_{\mu_k}(\tau)]$$

к решению периодической задачи для уравнения типа Льенара (1) и приближение $\beta_k(\varepsilon)$ к функции $\beta(\varepsilon)$. Следующее наилучшее (в смысле наименьших квадратов) приближение к решению периодической задачи для уравнения типа Льенара (1)

$$y_{k+1}(\tau,\varepsilon)=y_0(\tau,c_0)+x_{k+1}(\tau,\varepsilon),\ x_{k+1}(\tau,\varepsilon)\approx\nu_1(\varepsilon)\cos\tau+\ ...\ +\nu_k(\varepsilon)\cos\tau+$$
$$+\,\xi_1(\tau,\varepsilon)+\ ...\ +\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon),\ \xi_{k+1}(\tau,\varepsilon)=\varphi_{k+1}(\tau)c_{k+1}(\varepsilon),\ c_{k+1}(\varepsilon)\in\mathbb{R}^{\mu_{k+1}}$$

ищем, как 2π-периодическое решение уравнения

$$\begin{aligned}y''_{k+1}(\tau,\varepsilon)=\varepsilon\,\{&\mathcal{Y}(y_0(\tau,c_0),y'_0(\tau,c_0),y''_0(\tau,c_0),\beta_0,0)+\\&+\mathcal{A}_1(y_0(\tau,c_0),\beta_0)x_k(\tau,\varepsilon)+\mathcal{A}_2(y_0(\tau,c_0),\beta_0)x'_k(\tau,\varepsilon)+\\&+\mathcal{A}_3(y_0(\tau,c_0),\beta_0)x''_k(\tau,\varepsilon)+\mathcal{A}_\beta(y_0(\tau,c_0),\beta_0)(\gamma_1(\varepsilon)+\ ...\ +\gamma_k(\varepsilon))+\\&+\varepsilon\,\mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau,c_0),\beta_0)+\mathcal{R}(y_k(\tau,\varepsilon),y'_k(\tau,\varepsilon),y''_k(\tau,\varepsilon),\beta_k,\varepsilon)\}.\end{aligned}\quad(18)$$

Обозначим $(1\times\mu_{k+1})-$ матрицы

$$\mathcal{F}_{k+1}(\tau,\varepsilon):=[1-\varepsilon\,\mathcal{A}_1(y_0(\tau,c_0),\beta_0)]\varphi_{k+1}(\tau,\varepsilon)-\varepsilon\,\mathcal{A}_2(y_0(\tau,c_0),\beta_0)\varphi'_{k+1}(\tau,\varepsilon)+$$
$$+\,[1-\varepsilon\,\mathcal{A}_3(y_0(\tau,c_0),\beta_0)]\varphi''_{k+1}(\tau),\ \varphi_{k+1}(\tau):=[\varphi_1(\tau)\ \varphi_2(\tau)\ ...\ \varphi_{\mu_1}(\tau)].$$

При условии

$$\det[\Gamma(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon))]\neq0,\ \Gamma(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon)):=\int_0^{2\pi}\mathcal{F}^*_{k+1}(\tau,\varepsilon)\cdot\mathcal{F}_{k+1}(\tau,\varepsilon)\,d\tau$$

находим вектор

$$\begin{aligned}c_{k+1}(\varepsilon)=-[\Gamma(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot,\varepsilon))]^{-1}\int_0^{2\pi}\mathcal{F}^*_2(\tau,\varepsilon)\,\{&\varepsilon\,\mathcal{Y}(y_0(\tau,c_0),y'_0(\tau,c_0),y''_0(\tau,c_0),\beta_0,0)+\\+\varepsilon\,\mathcal{A}_1(y_0(\tau,c_0),\beta_0)x_k(\tau,\varepsilon)+\varepsilon\,\mathcal{A}_2(y_0(\tau,c_0),\beta_0)&x'_k(\tau,\varepsilon)-x''_k(\tau,\varepsilon)-x_k(\tau,\varepsilon)+\\+\varepsilon\,\mathcal{A}_3(y_0(\tau,c_0))x''_k(\tau,\varepsilon)+\varepsilon\,\mathcal{A}_\beta(y_0(\tau,c_0))&(\gamma_1(\varepsilon)+\ ...\ +\gamma_k(\varepsilon))+\varepsilon^2\,\mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau,c_0))+\\+\mathcal{R}(y_0(\tau,c_0)+x_k(\tau,\varepsilon),y'_0(\tau,c_0)+x'_k(\tau,\varepsilon),&y''_0(\tau,c_0)+x''_k(\tau,\varepsilon),\beta_k,\varepsilon)\}\,d\tau,\end{aligned}$$

Следующее приближение $\beta_{k+1}(\varepsilon):=\beta_k(\varepsilon)+\gamma_1(\varepsilon)+\ ...\ +\gamma_{k+1}(\varepsilon)\in\mathbb{C}[0,\varepsilon_*]$ определим определим из условия существования периодического решения уравнения

$$\begin{aligned}x''_{k+1}(\tau,\varepsilon)+x_{k+1}(\tau,\varepsilon)=\varepsilon\,\{&\mathcal{Y}(y_0(\tau,c_0),y'_0(\tau,c_0),y''_0(\tau,c_0),\beta_0,0)+\\+\mathcal{A}_1(y_0(\tau,c_0),\beta_0)x_k(\tau,\varepsilon)+&\mathcal{A}_2(y_0(\tau,c_0),\beta_0)x'_k(\tau,\varepsilon)+\mathcal{A}_3(y_0(\tau,c_0),\beta_0)x''_k(\tau,\varepsilon)+\\&+\mathcal{A}_\beta(y_0(\tau,c_0),\beta_0)(\gamma_1(\varepsilon)+\ ...\ +\gamma_k(\varepsilon))+\varepsilon\,\mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau,c_0),\beta_0)+\\&+\mathcal{R}(y_0(\tau,c_0)+x_k(\tau,\varepsilon),y'_0(\tau,c_0)+x'_k(\tau,\varepsilon),y''_0(\tau,c_0)+x''_k(\tau,\varepsilon),\beta_k,\varepsilon)\}.\end{aligned}\quad(19)$$

При условии (15) в малой окрестности порождающего решения $y_0(\tau, c_0)$ и в окрестности точки β_0 находим по меньшей мере один вектор

$$\begin{aligned}
&(\ \nu_{k+1}(\varepsilon) \ \gamma_{k+1}(\varepsilon) \ )^* = -\mathfrak{B}_0^{-1}(y_0(\cdot, c_0), \beta_0)\times \\
&\times \{\mathcal{A}_1(y_0(\tau, c_0), \beta_0)(x_k(\tau, \varepsilon) + \xi_{k+1}(\tau, \varepsilon)) + \mathcal{A}_2(y_0(\tau, c_0), \beta_0)(x_k'(\tau, \varepsilon) + \xi_{k+1}'(\tau, \varepsilon)) + \\
&+ \mathcal{A}_3(y_0(\tau, c_0), \beta_0)(x_k''(\tau, \varepsilon) + \xi_{k+1}''(\tau, \varepsilon)) + \varepsilon\, \mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau, c_0), \beta_0) + \mathcal{A}_\beta(y_0(\tau, c_0), \beta_0)\times \\
&\qquad\qquad \times (\gamma_1(\varepsilon) + \ \dots \ + \gamma_k(\varepsilon)) + \mathcal{R}(y_k(\tau, \varepsilon), y_k'(\tau, \varepsilon), y_k''(\tau, \varepsilon), \beta_k, \varepsilon) \ d\tau.
\end{aligned}$$

Продолжая рассуждения, приходим к следующему утверждению.

Следствие. *При наличии кратных корней уравнения для порождающих амплитуд* (5), *при условии* (15) *задача об отыскании периодических решений уравнения* (1) *имеет по меньшей мере одно решение, при* $\varepsilon = 0$ *обращающееся в порождающее* $y(\tau, 0) = y_0(\tau, c_0)$, *при условии* $1 + \varepsilon\beta(\varepsilon) \neq 0$ *представимое операторной системой* (11). *Для построения периодических решений уравнения* (1) *в случае*

$$\det[\Gamma(\mathcal{F}_k(\cdot, \varepsilon))] \neq 0, \ k \in \mathbb{N}, \ \varepsilon \in [0, \varepsilon_*] \in [0, \varepsilon_0]$$

применима итерационная схема

$$\begin{gathered}
y_1(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau, c_0) + x_1(\tau, \varepsilon), \ x_1(\tau, \varepsilon) = \nu_1(\varepsilon)\cos\tau + \xi_1(\tau, \varepsilon), \ \xi_1(\tau, \varepsilon) = \varphi_1(\tau) c_1(\varepsilon), \\
c_1(\varepsilon) = \varepsilon\, \Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot, \varepsilon))^{-1} \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_1^*(\tau, \varepsilon)\, [\mathcal{Y}(y_0(\tau, c_0), y_0'(\tau, c_0), y_0''(\tau, c_0), \beta_0, 0) + \\
+\varepsilon\, \mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau, c_0), \beta_0)]\, d\tau, \ \beta_1(\varepsilon) = \beta_0 + \gamma_1(\varepsilon), \\
(\ \nu_1(\varepsilon) \ \gamma_1(\varepsilon) \ )^* = -\mathfrak{B}_0^+(y_0(\cdot, c_0), \beta_0) \int_0^{2\pi} H_\rho(\tau)\{\mathcal{A}_1(y_0(\tau, c_0), \beta_0)\xi_1(\tau, \varepsilon) + \\
+\mathcal{A}_2(y_0(\tau, c_0), \beta_0)\xi_1'(\tau, \varepsilon) + \mathcal{A}_3(y_0(\tau, c_0), \beta_0)\xi_1''(\tau, \varepsilon) + \varepsilon\, \mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau, c_0), \beta_0) + \\
+\mathcal{R}(y_0(\tau, c_0) + \xi_1(\tau, \varepsilon), y_0'(\tau, c_0) + \xi_1'(\tau, \varepsilon), \beta_0)\} \ d\tau, \ \dots \ , \\
y_{k+1}(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau, c_0) + x_{k+1}(\tau, \varepsilon), \ \beta_{k+1}(\varepsilon) = \beta_0 + \gamma_{k+1}(\varepsilon), \qquad (20) \\
x_{k+1}(\tau, \varepsilon) = \sum_{j=1}^{k+1} \nu_j(\varepsilon)\cos\tau + \sum_{j=1}^{k+1} \xi_j(\tau, \varepsilon), \ \xi_{k+1}(\tau, \varepsilon) = \varphi_{k+1}(\tau) c_{k+1}(\varepsilon), \\
c_{k+1}(\varepsilon) = -[\Gamma(\mathcal{F}_{k+1}(\cdot, \varepsilon))]^{-1} \int_0^{2\pi} \mathcal{F}_2^*(\tau, \varepsilon)\, \{\varepsilon\, \mathcal{Y}(y_0(\tau, c_0), y_0'(\tau, c_0), y_0''(\tau, c_0), \beta_0, 0) + \\
+\varepsilon\, \mathcal{A}_1(y_0(\tau, c_0), \beta_0) x_k(\tau, \varepsilon) + \varepsilon\, \mathcal{A}_2(y_0(\tau, c_0), \beta_0) x_k'(\tau, \varepsilon) + \varepsilon^2\, \mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau, c_0), \beta_0) + \\
+\varepsilon\, \mathcal{A}_3(y_0(\tau, c_0), \beta_0) x_k''(\tau, \varepsilon) + \varepsilon\, \mathcal{A}_\beta(y_0(\tau, c_0), \beta_0)(\gamma_1(\varepsilon) + \ \dots \ + \gamma_k(\varepsilon)) + \\
+\mathcal{R}(y_0(\tau, c_0) + x_k(\tau, \varepsilon), y_0'(\tau, c_0) + x_k'(\tau, \varepsilon), y_0''(\tau, c_0) + x_k''(\tau, \varepsilon), \beta_k, \varepsilon) - \\
-x_k''(\tau, \varepsilon) - x_k(\tau, \varepsilon)\}\, d\tau, \ (\ \nu_{k+1}(\varepsilon) \ \gamma_{k+1}(\varepsilon) \ )^* = -\mathfrak{B}_0^{-1}(y_0(\cdot, c_0), \beta_0)\times
\end{gathered}$$

$$\times\{\mathcal{A}_1(y_0(\tau,c_0),\beta_0)(x_k(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+1}(\tau,\varepsilon))+\mathcal{A}_2(y_0(\tau,c_0),\beta_0)(x_k'(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+1}'(\tau,\varepsilon))+$$
$$+\mathcal{A}_3(y_0(\tau,c_0),\beta_0)(x_k''(\tau,\varepsilon)+\xi_{k+1}''(\tau,\varepsilon))+\varepsilon\,\mathcal{A}_\varepsilon(y_0(\tau,c_0),\beta_0)+\mathcal{A}_\beta(y_0(\tau,c_0),\beta_0)\times$$
$$\times(\gamma_1(\varepsilon)+\ \dots\ +\gamma_k(\varepsilon))+\mathcal{R}(y_k(\tau,\varepsilon),y_k'(\tau,\varepsilon),y_k''(\tau,\varepsilon),\beta_k,\varepsilon)\ d\tau,\ \dots\ ,\ k\in\mathbb{N}.$$

Длина отрезка $[0,\varepsilon^*]$, на котором применима итерационная схема (20), может быть оценена посредством мажорирующих уравнений Ляпунова [2, 12], или из условия сжимаемости оператора, определяемого системой система аналогично [15].

Пример. Найдем приближения к периодическому решению уравнения Лотка–Вольтерра (7). Положим

$$\varphi_1(\tau)=[\ \cos 2\tau\ \ \cos 3\tau\ \ \cos 4\tau\ \ \cos 5\tau\ \ \cos 6\tau\ \ \sin\tau\ \ \sin 2\tau\ \ \sin 3\tau\ \ \sin 4\tau\ \ \sin 5\tau\ \ \sin 6\tau\ ].$$

Матрица Грама, соответствующая порождающему решению $y_0(\tau,c_0)$

$$\det[\Gamma(\mathcal{F}_1(\cdot,\varepsilon))]\approx\ 8\ 362\ 327\ 021\ 977\ 600\ 000\ 000\,\pi^{10}+\ \dots\ \neq 0$$

невырождена, при этом $\xi_1(\tau,\varepsilon)\approx\varphi_1(\tau)c_1(\varepsilon)$, где

$$c_1(\varepsilon)\approx\begin{pmatrix}
\frac{\varepsilon}{300}-\frac{61\,\varepsilon^3}{1728000}-\frac{356143\,\varepsilon^5}{1244160000000}-\frac{127690979\,\varepsilon^7}{447897600000000000}\\
-\frac{\varepsilon^2}{48000}+\frac{22147\,\varepsilon^4}{6912000000}+\frac{5083973\,\varepsilon^6}{248832000000000}+\frac{15918508987\,\varepsilon^8}{358318080000000000000}\\
-\frac{7\,\varepsilon^3}{14400000}-\frac{252263\,\varepsilon^5}{1036800000000}-\frac{565458323\,\varepsilon^7}{1741824000000000000}\\
\frac{347\,\varepsilon^4}{6912000000}+\frac{17976863\,\varepsilon^6}{870912000000000}+\frac{8608838448359\,\varepsilon^8}{204838502400000000000000}\\
-\frac{17669\,\varepsilon^5}{4838400000000}-\frac{37705522657\,\varepsilon^7}{2133734400000000000000}\\
-\frac{\varepsilon}{600}+\frac{221\,\varepsilon^3}{4320000}-\frac{541381\,\varepsilon^5}{1244160000000}-\frac{56045599\,\varepsilon^7}{223948800000000000}\\
-\frac{\varepsilon^2}{12000}-\frac{10547\,\varepsilon^4}{6912000000}+\frac{27161\,\varepsilon^6}{15552000000000}+\frac{42620255851\,\varepsilon^8}{250822656000000000000}\\
\frac{\varepsilon^3}{360000}+\frac{14989\,\varepsilon^5}{129600000000}-\frac{1905251\,\varepsilon^7}{870912000000000000}\\
-\frac{161\,\varepsilon^4}{1382400000}-\frac{2356021\,\varepsilon^6}{217728000000000}-\frac{1734086406113\,\varepsilon^8}{204838502400000000000000}\\
\frac{27703\,\varepsilon^5}{4838400000000}+\frac{10464097717\,\varepsilon^7}{1066867200000000000000}
\end{pmatrix}.$$

Таким образом, находим $T_1(\varepsilon)=2\pi(1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon))-$ периодическое приближение $y_1(\tau,\varepsilon)$ к решению уравнения (8); здесь

$$\beta_1(\varepsilon)=\beta_0+\gamma_1(\varepsilon),\ \gamma_1(\varepsilon)\approx\frac{\varepsilon}{1\ 200}+\frac{\varepsilon^2}{7\ 200}-\frac{7\,\varepsilon^3}{288\ 000}+\frac{\varepsilon^4}{2\ 400\ 000}+\ \dots\ .$$

Заметим, что условие $1+\varepsilon\beta_1(\varepsilon)>1\neq 0$ выполнено. Для оценки точности определим невязки: $\Delta_1(0,1)\approx 8,02\ 356\cdot 10^{-7}$, $\Delta_1(0,01)\approx 7,97\ 290\cdot 10^{-10}$. Невязки приближения, найденного на первом шаге итерационной схемы (20) значительно меньше невязок первого приближения, найденного при помощи схемы (12).

1. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации.– М. Наука., 1965. – 408 с.
2. *Гребеников Е.А., Рябов Ю.А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. – М.: Наука, 1979. – 432 с.

3. *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Факториал. – 1997. – 512 с.
4. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. – М.: Гостехиздат, 1956. – 491 с.
5. *Матвеев Н.М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высшая школа. – 1963. – 546 с.
6. *Чуйко С.М.* Нетерова краевая задача в особом критическом случае // Доп. НАН України. – 2007. – №. 2. – С. 26-30.
7. *Чуйко С.М., Старкова О.В.* Автономные краевые задачи в частном критическом случае // Динамические системы. – 2009. – Т. 27. – С. 127-142.
8. *Чуйко С.М., Старкова О.В., Пирус О.Е.* Нелинейные нетеровы краевые задачи, не разрешенные относительно производной // Динамические системы. – Т. 2(30), №1-2. – 2012. – С. 169-186.
9. *Чуйко С.М., Старкова О.В., Чуйко А.С.* Автономная нетерова краевая задача в частном критическом случае // Компьютерные исследования и моделирование. – 2011. – Т. 3, № 4. – С. 337-357.
10. *Чуйко С.М., Чуйко А.С.* О приближенном решении автономных нетеровых краевых задач методом наименьших квадратов // Динамические системы. – 2011. – Т. 29. – С. 103-111.
11. *Boichuk A.A., Chuiko S.M.* Autonomous weakly nonlinear boundary value problems // Differential Equations. – 1992. – V. 28, Is. 10. – P. 1668-1674.
12. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – XIV + 317 pp.
13. *Boichuk I.A., Starkova O.V., Chuiko S.M.* Weakly perturbed nonlinear boundary-value problem in critical case // Studies of the University of Žilina. Math. series. – 2009. – V. 23, Is. 1. – P. 1-8.
14. *Chuiko S.M.* On approximate solution of boundary-value problems by the least squares method // Nonlinear Oscillations. – 2008. – V. 11, Is. 4. – P. 585-604.
15. *Chuiko S.M.* Domain of convergence of an iterative procedure for an autonomous boundary-value problem // Nonlinear Oscillations. – 2006. – V. 9, Is. 3. – P. 405-422.
16. *Chuiko S.M.* Weakly nonlinear boundary-value problem in a special critical case // Ukrainian Mathematical Journal. – 2009. – V. 61, Is. 4. – P. 657-673.
17. *Chuiko S.M., Boichuk I.A.* Autonomous noetherian boundary-value problem in the critical case // Nonlinear Oscillations. – 2009. – V. 12, Is. 3. – P. 417-428.
18. *Chuiko S.M., Boichuk I.A.* Nonlinear Noetherian boundary-value problems in the critical case // Nonlinear Oscillations. – 2010. – V. 13, Is. 1. – P. 128–146.
19. *Chuiko S.M., Starkova O.V.* On the approximate solution of autonomous boundary-value problems by the least-squares method // Nonlinear Oscillations. – 2009. – V. 12, Is. 4. – P. 574-591.

S. M. Chuiko, A. S. Chuiko, O. V. Nesmelova

Periodic boundary value problem of Lyenar type unresolved with respect to derivative in critical case.

Investigated the problem of finding necessary and sufficient conditions for the existence and construction of solutions of the autonomous periodic problem for equation of the type Lyenara, unsolved with respect to derivative. As an example of application of the obtained conditions for the existence and iterative schemes are constructed, investigated the problem of finding periodic solutions of the equation of the Lotka–Volterra.

Keywords: *autonomous periodic boundary-value problem, equation type lyenara, least squares method, the equation of the Lotka–Volterra.*

С. М. Чуйко, О. С. Чуйко, О. В. Нєсмєлова

Періодична задача для рівняння типу Льєнара, не розв'язного відносно похідної в критичному випадку.

Досліджено задачу про знаходження необхідних і достатніх умов існування та побудову розв'язків автономної періодичної задачі для рівняння типу Л'єнара, нерозв'язного відносно похідної. Як приклад застосування одержаних умов існування та побудованих ітераційних схем, досліджено задачу про знаходження періодичних розв'язків рівняння Лотка–Вольтерра.

Ключові слова: *автономна періодична крайова задача, рівняння типу Л'енара, метод найменших квадратів рівняння Лотка–Вольтерра.*

Донбасский государственный педагогический университет, Славянск
`chujko-slav@inbox.ru`

Получено 24.10.15