УДК 62-50,519.7

©2015. **Н. В. Жоголева, В. Ф. Щербак**

СИНТЕЗ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрена задача идентификации неизвестных компонент математической модели, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Использован метод синтеза инвариантных соотношений, разработанный для решения обратных задач теории управления. Метод позволяет находить конечные соотношения, определяющие искомые неизвестные как функции от известных величин. С помощью указанного подхода решены задачи получения асимптотических оценок инерционных параметров механически систем.

Ключевые слова: *идентификация нелинейных систем, инвариантные соотношения, твердое тело с неподвижной точкой.*

Современные объекты автоматического управления представляют собой сложные, нелинейные многомерные системы. Одной из основных проблем при построении математических моделей таких систем является недостаток «априорной» информации о состоянии объекта и его параметрах. Поэтому, важным этапом их анализа является проверка адекватности моделей, которая может быть осуществлена с помощью обратных задач управления, состоящих в определении состояния объекта, его параметров, входного воздействия. В работе предлагается способ получения асимптотических оценок неизвестных компонент математической модели по результатам измерения выходных сигналов в реальном масштабе времени. Используется разработанный в аналитической механике метод инвариантных соотношений [1], который в задачах управления позволяет синтезировать дополнительные связи между известными и неизвестными величинами [2].

1. Дополнительные соотношения в обратных задачах.

Рассмотрим динамическую систему, заданную системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, a), \quad x = x_0, \quad x \in R^n, \quad a \in R^l, \tag{1}$$

на траекториях которой известны значения неоторой функции времени (выход системы)

$$y(t) = h(x(t), \quad y \in R^k. \tag{2}$$

Предполагается что уравнения (1) описывают динамику некоторого объекта, x – вектор его состояния, постоянный вектор a – параметры системы. Выход системы – функция (2) – формализуют измерения, проводящиеся в процессе движения объекта. Под обраными задачами для систем такого вида будем понимать задачи определения значений компонент математической модели объекта: состояния x и(или) вектора параметров a по информации о выходе $y(t)$ [3].

Далее будем использовать следующее представление системы (1),(2). Предположим, что с помощью невырожденной замены переменных x система приведена к виду, при котором измеряются первые k координат фазового вектора, т.е. $y(t) = x_1(t) = (x^1, x^2, \dots, x^k)^T$. Остальные $m = n - k$ компонент вектора состояния обозначим $x_2 = (x^{k+1}, x^{k+2}, \dots, x^n)^T$ и, таким образом, $x = (x_1, x_2)^T$. Кроме того будем считать, что в результате этой замены правые части полученных уравнений линейны относительно неизвестных: переменных $x_2(t)$ и параметров a:

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 + h_1(x_1)a, \\ \dot{x_2} &= f_2(x_1) + g_2(x_1)x_2 + h_2(x_1)a, \\ y &= x_1, \end{aligned} \tag{3}$$

где $g_1(x_1), g_2(x_1), h_1(x_1), h_2(x_1)$ – матрицы размерностей $k \times m$, $m \times m$, $k \times l$ и $m \times l$ соответственно.

Нашей задачей является определение вектора $x_2(t)$ и параметров a как функций от известных величин. Представим эти неизвестные в виде

$$a = \alpha(t) + \Psi(x_1(t)), \quad x_2(t) = p(t) + \Phi(x_1(t)), \tag{4}$$

где переменные $\alpha(t), p(t)$ являются решениями дифференциальных уравнений

$$\dot{\alpha} = u_1(\alpha, p, x_1(t)), \quad \dot{p} = u_2(\alpha, p, x_1(t)). \tag{5}$$

На функции $\Psi(x_1(t)), \Phi(x_1(t), u_1(\alpha, p, x_1(t)), u_2(\alpha, p, x_1(t))$ пока не накладываем никаких ограничений, кроме требования непрерывной дифференцируемости по своим аргументам. Отметим, что если эти функции выбраны, то правые части соотношений (4), при решении задачи Коши для дифференциальных уравнений (5), становятся известными функциями времени.

Утверждение. Для любых дифференцируемых функций $\Psi(x_1)$, $\Phi(x_1)$ существуют управления $u_1(\alpha, p, x_1(t)), u_2(\alpha, p, x_1(t))$ такие, что равенства (4) выполняются тождественно на некоторых решениях система дифференциальных уравнений (5).

Доказательство. Введем переменные η, ε, которые характеризуют невязку в формулах (4) на решениях (3),(5).

$$a = \alpha(t) + \Psi(x_1(t)) + \eta, \quad x_2(t) = p(t) + \Phi(x_1(t)) + \varepsilon, \tag{6}$$

Сделаем в уравнениях (3) замену переменных. Перейдем по формулам (6) от переменных a, x_2 к переменным η, ε соответственно. Дифференцируя (6) в силу систем,(3)(5), получаем дифференциальные уравнения для отклонений

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= -u_1 - \Psi'_{x_1}[f_1 + g_1(p + \Phi + \varepsilon) + h_1(\alpha + \Psi + \eta)], \\ \dot{\varepsilon} &= -u_2 + f_2 - \Phi'_{x_1} f_1 + (g_2 - \Phi'_{x_1} g_1)(p + \Phi + \varepsilon) + (h_2 - \Phi'_{x_1} h_1)(\alpha + \Psi + \eta). \end{aligned} \tag{7}$$

Чтобы равенства (4) выполнялись тождественно на некоторых решениях (5), достаточно показать, что система дифференциальных уравнений (7) допускает тривиальное решение $\eta(t) \equiv \varepsilon(t) \equiv 0$. С этой целью выберем правые части (5) по формулам

$$\begin{aligned} u_1(\alpha, p, x_1(t)) &= -\Psi'_{x_1}[f_1 + g_1(p+\Phi) + h_1(\alpha+\Psi)], \\ u_2(\alpha, p, x_1(t)) &= f_2 - \Phi'_{x_1} f_1 + (g_2 - \Phi'_{x_1} g_1)(p+\Phi) + (h_2 - \Phi'_{x_1} h_1)(\alpha+\Psi). \end{aligned} \tag{8}$$

В результате система дифференциальных уравнений для отклонений η, ε становится однородной

$$\begin{aligned} \dot\eta &= -\Psi'_{x_1}(g_1\varepsilon + \eta), \\ \dot\varepsilon &= (g_2 - \Phi'_{x_1} g_1)\varepsilon + (h_2 - \Phi'_{x_1} h_1)\eta, \end{aligned} \tag{9}$$

а значит допускает тривиальное решение. Утверждение доказано. □

Пусть начальные значения $\alpha(0), p(0)$ в задаче Коши для дифференциальных уравнений (5) удовлетворяют (4). В частности, это означает, что начальные значения отклонений $\eta(0) = \varepsilon(0) = 0$. В этом случае равенства (4) образуют систему дополнительных соотношений, с помощью которых на траекториях (5), могут быть найдены неизвестные компоненты математической модели $a, x_2(t)$. Однако для выполнения такого условия необходимо знать значения $a, x_2(0)$, которые являются неизвестными.

Чтобы равенства (4) можно было использовать для оценки $a, x_2(t)$ на любом решении системы (5), требуется из множества остающихся пока свободными функций $\Psi(x_1), \Phi(x_1)$ выбрать такие, при которых тривиальное решение (9) обладало бы свойством глобальной асимптотической устойчивости в рассматриваемой области.

Существуют различные подходы к проблеме обеспечения глобальной асимптотической устойчивости тривиального решения неавтономной системы дифференциальных уравнений (9). В описанном способе построения инвариантных соотношений (4) предполагается, что она рассматривается для каждой конкретной динамической системы отдельно.

2. Идентификация моментов инерции твердого тела.

В качестве применение описанной схемы рассмотрим задачу идентификации инерционных параметров твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки. Определение моментов инерции механических систем тела является важной задачей в различных приложениях технической механики [4] и особую актуальность она приобретает в космической индустрии. Существуют как стендовые методы идентификации, так и расчетно-экспериментальные способы определения моментов инерции космического аппарата в полете [5, 6, 7]. Поскольку модель твердого тела с неподвижной точкой является базовой динамической моделью космических аппаратов, то ниже приводится метод получения экспоненциальных оценок моментов инерции тела по информации, поставляемой в процессе полета датчиками угловой скорости.

Осесимметричный случай. Запишем уравнения Эйлера для осесимметричного твердого тела, вращающегося вокруг своего центра масс. Обозначим через

A_1, A_2, A_3 – главные центральные моменты инерции тела, и пусть, например, $A_1 = A_2$. Тогда уравнения для угловой скорости $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ имеют вид

$$\dot{\omega}_1 = a\omega_2\omega_3, \quad \dot{\omega}_2 = -a\omega_1\omega_3, \quad \dot{\omega}_3 = 0, \tag{10}$$

где $a = (A_2 - A_3)/A_1$. Достаточные условия идентифицируемости системы (10) имеют вид [3]: для любых моментов времени

$$\omega_3(t) \neq 0,\ {\omega_1}^2(t) + {\omega_2}^2(t) \neq 0.$$

Задача 1. Найти асимптотически точную оенку параметра a системы (10) по известным значениям вектора $\omega(t)$.

Дополним систему (10) уравнением $\dot{a} = 0$ и введем уравнение для идентификатора $A(t)$ переменной a

$$\dot{A} = u(A, \omega). \tag{11}$$

Здесь $u(A, \omega) \in R$ – неопределенная пока функция. Функция $A(t)$ будет использована далее для оценки параметра a. Предлагаемый в работе подход заключается в оценивании искомых неизвестных (в данном случае параметра a) с помощью некоторых функций от известных величин. Введем в рассмотрение такую функцию $\Phi(\omega)$. В силу произвола $\Phi(\omega(t))$ на траекториях системы (10),(11) выполнено равенство

$$A(t) - a = \Phi(\omega(t)) + \eta(t), \tag{12}$$

где η – некоторая величина, характеризующая отклонение $A(t) - a = \Phi(\omega(t))$.

Наложим ограничения на функции $u(A, \omega)$ и $\Phi(\omega)$. Если удастся выберать конкретные функции $u(A, \omega), \Phi(\omega)$ такими, что $\dot{\eta} = -k\eta$, $k > 0$, то формула (12) может быть использована для получения оценки параметра a. Действительно, значения $\Phi(\omega(t))$ – известны, одно из неопределенных слагаемых – отклонение $\eta(t)$ – экспоненциально стремится к нулю с показателем затухания равным k, а значения другого – $A(t)$ находится в процессе решения дифференциального уравнения (11) с любым начальным условием $A(0) = A_0$.

Уравнение $\dot{\eta} = -k\eta$ с учетом (10)–(12) принимает вид

$$u(A, \omega) - \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_1}(A - \Phi - \eta)\omega_2\omega_3 + \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_2}(A - \Phi - \eta)\omega_1\omega_3 + k\eta = 0.$$

Последнее равенство будет выполнено, если потребуем выполнения следующих двух соотношений:

$$u(A, \omega) = (A - \Phi)(\frac{\partial \Phi}{\partial \omega_1}\omega_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_2}\omega_1)\omega_3, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_1}\omega_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_2}\omega_1 = -\frac{k}{\omega_3}.$$

Первое из них определяет вид управления $u(A, \omega)$, а второе – дифференциальное уравнение в частных производных для функции $\Phi(\omega_1, \omega_2)$. Его частным решением является функция

$$\Phi(\omega_1, \omega_2) = -\frac{k}{\omega_3}\mathrm{arctg}\frac{\omega_1}{\omega_2}. \tag{13}$$

Зная аналитический вид функции $\Phi(\omega_1, \omega_2)$, находим правую часть уравнения идентификатора (11)

$$\dot{A} = -k\left(A + \frac{k}{\omega_3}\operatorname{arctg}\frac{\omega_1(t)}{\omega_2(t)}\right). \tag{14}$$

С учетом (12) окончательно получаем

$$a = A(t) + \frac{k}{\omega_3}\operatorname{arctg}\frac{\omega_1(t)}{\omega_2(t)} - \eta_0 \exp(kt), \tag{15}$$

где $A(t)$ – решение задачи Коши для уравнения (14) с $A(0) = A_0$. Формула(15) задает экспоненциальную оценку параметра a.

Тело с произвольным распределением масс. Рассмотрим свободное твердое тело, вращающееся вокруг своего центра масс, не накладывая при этом каких-либо ограничений на распределение масс в теле. Задача идентификации массово-инерционных параметров в данном случае состоит в определении его главных центральных моментов инерции A_1, A_2, A_3 по результатам измерения вектора угловой скорости тела. Введем вместо моментов инерции безразмерные величины

$$a_1 = \frac{A_2 - A_3}{A_1}, \quad a_2 = \frac{A_3 - A_1}{A_2}, \quad a_3 = \frac{A_1 - A_2}{A_3}.$$

Тогда уравнения Эйлера принимают вид

$$\dot{\omega}_1 = a_1\omega_2\omega_3, \quad \dot{\omega}_2 = a_2\omega_1\omega_3, \quad \dot{\omega}_3 = a_3\omega_1\omega_2, \tag{16}$$

Задача 2. Найти асимптотически точные оценки параметров a_1, a_2, a_3 системы дифференциальных уравнений (16) по известным значениям вектора $\omega(t)$.

Достаточные условия идентифицируемости [3] рассматриваемой системы определяются неравенством нулю определителя матрицы

$$det\frac{\partial(\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2, \dot{\omega}_3)}{\partial(a_1, a_2, a_3)} = a_1 a_2 a_3 \omega_1^2 \omega_2^2 \omega_3^2$$

Таким образом, условием идентифицируемости параметров a_1, a_2, a_3 системы (16) является:

1) неравенство нулю всех компонент вектора угловой скорости;

2) параметры a_1, a_2, a_3 должны быть отличны от нуля, а значить среди центральных моментов инерции A_1, A_2, A_3 не должно быть совпадающих между собой.

Поскольку предлагаемый способ идентификации предназначен для получения асимптотических оценок неизвестных параметров, то условия идентифицируемости должны быть выполнены в течении всего процесса получения оценок, т.е. для всех моментов времени из некоторого полуинтервала $t \in T = [0, t_{fin}]$. Поэтому, далее будем предполагать выполненным более сильное требование. А именно, будем полагать, что в процессе идентификации произведение наблюдаемых значений компонент вектора угловой скорости отделено от нуля: т.е. существует достаточно малая постоянная w_{min} такая, что

$$\forall t \in T, \ | \omega_1(t)\omega_2(t)\omega_3(t) | \geq w_{min} > 0. \tag{17}$$

Замечание. При вращении твердого тела предложенное условие идентифицируемости в общем случае будет нарушаться. Но, если угловая скорость не равна тождественно нулю, то величина w_{min} всегда может быть подобрана так, что существует последовательность интервалов $T_i, \ i = 1, 2, \ldots$, на которых условие (17) выполняется. В этом случае предлагаемая ниже схема получения оценок должна быть модифицирована путем последовательного улучшения оценок на каждом из таких интервалов.

Дополним систему (16) системой дифференциальных уравнений идентфикатора

$$\dot{A}_i = u_i(A_1, A_2, A_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3), \ i = 1, 2, 3. \tag{18}$$

Отклонение фазового вектора идентификатора $A_1(t), A_2(t), A_3(t)$ от соответствующих значений неизвестных модели a_1, a_2, a_3 представим в виде некоторых дифференцируемых функций $\Phi_i(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ от известных величин и невязки η_i.

$$A_i - a_i = \Phi_i(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + \eta_i, \ i = 1, 2, 3. \tag{19}$$

Дифференцируя (19) получаем систему дифференциальных уравнений для невязки η_i

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_i = u_i - \Phi_{i1}(A_1 - \Phi_1 - \eta_1)\omega_2\omega_3 - \Phi_{i2}(A_2 - \Phi_2 - \eta_2)\omega_1\omega_3 - \\ -\Phi_{i3}(A_3 - \Phi_3 - \eta_3)\omega_1\omega_2, \qquad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \tag{20}$$

где $\Phi_{ij} = \frac{\partial \Phi_i(\omega_1, \omega_2, \omega_3)}{\partial \omega_j}, \ i, j = 1, 2, 3.$

Конкретизируем структуру уравнений идентификатора (18). Выберем управления $u_i(A_1, A_2, A_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3), \ i = 1, 2, 3$, таким образом, чтобы система (20) стала однородной и, следовательно, допускала тривиальное решение $\eta_1(t) = \eta_2(t) = \eta_3(t) \equiv 0$. Пусть

$$u_i = \Phi_{i1}(A_1 - \Phi_1)\omega_2\omega_3 + \Phi_{i2}(A_2 - \Phi_2)\omega_1\omega_3 + \Phi_{i3}(A_3 - \Phi_3)\omega_1\omega_2, \ i = 1, 2, 3. \tag{21}$$

Тогда уравнения для отклонений (20) принимают вид

$$\dot{\eta}_i = \Phi_{i1}\omega_2\omega_3\eta_1 + \Phi_{i2}\omega_1\omega_3\eta_2 + \Phi_{i3}\omega_1\omega_2\eta_3, \ i = 1, 2, 3. \tag{22}$$

Таким образом получаем, что для любых дифференцируемых по своим аргументам функций $\Phi_i(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ существуют решения систем (16),(18) на которых имеет место точная оценка неизвестных параметров a_1, a_2, a_3

$$a_i = A_i(t) - \Phi_i(\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t)), \ i = 1, 2, 3. \tag{23}$$

Перейдем теперь к вопросу оценивания параметров на любых решениях систем (16),(18). Пусть выбрана какая-либо дифференцируемая функция $\Phi_i(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Тогда правые части системы дифференциальных уравнений (18) будут определены полностью и решая для полученной системы задачу Коши с какими-либо начальными условиями $A_i(0)$, определяем значения $A_i(t), i = 1, 2, 3$. В результате два слагаемые в соотношениях (19) становятся известными. Неопределенными остаются только лишь компоненты решения системы (22) – функции $\eta_1(t), \eta_2(t), \eta_3(t)$, поскольку начальные условия $\eta_1(0), \eta_2(0), \eta_3(0)$ в общем случае не обязаны удовлетворять равенствам (19).

Чтобы соотношения (19) можно было использовать для оценки искомых параметров достаточно обеспечить выполнение следующего условия: тривиальное решение системы дифференциальных уравнений (22) должно обладать свойством глобальной асимптотической устойчивости, т.е.

$$\lim_{t\to\infty} \eta_i(t) = 0,\ i = 1, 2, 3.$$

Для выполнения этого требования в нашем распоряжении остался выбор функций $\Phi_i(\omega_1, \omega_2, \omega_3), i = 1, 2, 3$. Выберем эти функции в виде

$$\Phi_i(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = -\frac{1}{2}\mathrm{sign}(\omega_1\omega_2\omega_3)(\beta_{i1}\omega_1^2 + \beta_{i2}\omega_2^2 + \beta_{i3}\omega_3^2),\ i = 1, 2, 3. \tag{24}$$

Здесь коэффициенты $\beta_{ij},\ i, j = 1, 2, 3$, являются элементами некоторой квадратной матрицы B, у которой корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристического уравнения $\det(B - \lambda E) = 0, E$ – единичная матрица, имеют отрицательные действительные части. Отметим также, что в области, в которой выполнены сделанные ранее предположения об идентифициремости $\mid \omega_1(t)\omega_2(t)\omega_3(t) \mid \geq w_{\min} > 0$, функции $\Phi_i(\omega_1, \omega_2, \omega_3),\ i = 1, 2, 3$ являются непрерывно дифференцируемыми.

В результате система дифференциальных уравнений (22) для отклонений принимает вид

$$\dot{\eta}_i = \mid \omega_1(t)\omega_2(t)\omega_3(t) \mid (\beta_{i1}\eta_1 + \beta_{i2}\eta_2 + \beta_{i3}\eta_3),\ i = 1, 2, 3. \tag{25}$$

Поскольку величина $\mid \omega_1(t)\omega_2(t)\omega_3(t) \mid$ является скалярным множителем в правых частях системы дифференциальных уравнений (25), то траектории этой системы при $\omega_1(t)\omega_2(t)\omega_3(t) \neq 0$ совпадают с траекториями линейной системы с постоянными коэффициентами

$$\dot{\zeta}_i = \beta_{i1}\zeta_1 + \beta_{i2}\zeta_2 + \beta_{i3}\zeta_3,\ i = 1, 2, 3. \tag{26}$$

Пусть $\lambda_{\min}$ – корень характеристического уравнения $\det(B - \lambda E) = 0$ с минимальной по модулю действительной частью. Тогда решения (26) экспоненциально стремятся к нулю с показателем затухания $\lambda_{\min}$, т.е.

$$\sqrt{\zeta_1^2(t)+\zeta_2^2(t)+\zeta_3^2(t)} = O(\exp\{\lambda_{\min}\cdot t\}).$$

С учетом сделанного предположения об условиях (17), при которых осуществляется процесс идентификации, такой же характер имеют и траектории системы (25). Так как множитель $\mid \omega_1(t)\omega_2(t)\omega_3(t) \mid$ ограничен снизу величиной $w_{\min}$, то имеет место оценка

$$\sqrt{\eta_1^2(t)+\eta_2^2(t)+\eta_3^2(t)} = O(\exp\{\lambda_{\min}\cdot w_{\min}\cdot t\}).$$

В итоге получили, что невязка $\eta_1(t), \eta_2(t), \eta_3(t)$ в соотношениях (19) экспоненциально убывает к нулю, следовательно, равенства (23)

$$a_i = A_i(t) - \Phi_i(\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t)),\ i = 1,2,3. \tag{27}$$

определяют экспоненциальную оценку параметров a_1, a_2, a_3.

1. *Харламов П.В.* Об инвариантных соотношениях системы дифференциальных уравнений // Механика твердого тела. — 1974. – Вып. 6.
2. *Щербак В.Ф.* Задача отслеживания состояния нелинейной системы при неполной информации о движении // Механика твердого тела. – 2003. – Вып. 33.
3. *Ковалев А.М., Щербак В.Ф.* Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость динамических систем. – Киев: Наук. думка, 1993.
4. *Гернет М. М., Ротобыльский В. Ф.* Определение моментов инерции. – М.: "Машиностроение". – 1969.
5. *Ashley S.* Testing vehicle inertia // Mechanical Engineering. – 1995.– №117.
6. *Orne D., Schmitz T.* Analysis of a Platform for Measuring Moments and Products of Inertia of Large Vehicles // Journal of dynamic systems, measurement and control. – 1978. – № 2.
7. *Александров Е.А., Алексеев К.Б., Шадян А.В.* К вопросу идентификации тензора моментов инерции космического аппарата в полете // Машиностроение и инженерное образование. – 2010. – вып. 4.

N. V. Zhogoleva, V. F. Shcherbak

Synthesis of additional relations in inverse control problems .

The problem of a mathematical model unknown components identification for system of ordinary differential equations is considered. The method of synthesis of invariant relationships developed for the solution of inverse control problems is used. The method allows to find the final ratio, determines the desired unknown as a function of known quantities. With this approach the asymptotic estimates for inertial parameters of mechanical systems are obtained.

Keywords: *nonlinear systems identification, invariant relations, rigid body with a fixed point.*

Н. В. Жоголева, В. Ф. Щербак

Синтез додаткових співідношень в обернених задачах керування.

Розглянуто задачу ідентифікації невідомих компонент математичної моделі, яка сформована системою звичайних диференціальних рівнянь. В задачі використано метод синтезу інваріантних співвідношень, який розроблено для розв'язку обернених задач теорії управління. Метод дозволяє знаходити кінцеві співвідношення, які визначають шукані невідомі як функції від відомих величин. За допомогою зазначеного підходу вирішено задачу отримання асимптотичних оцінок інерційних параметрів механічних систем.

Ключові слова: *ідентифікація нелінійних систем, інваріантні співвідношення, тверде тіло з нерухомою точкою.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Славянск
scherbakvf@ukr.net

Получено 21.05.15