УДК 517.5

©2015. **С. В. Волков, В. И. Рязанов**

О ГРАНИЧНОМ ПОВЕДЕНИИ ОТОБРАЖЕНИЙ КЛАССА $W^{1,1}_{\rm loc}$ НА РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

В терминах дилатаций сформулирован ряд критериев для непрерывного и гомеоморфного продолжения на границу отображений класса $W^{1,1}_{\rm loc}$ между областями на римановых поверхностях

Ключевые слова: *римановы поверхности, граничное поведение, непрерывное и гомеоморфное продолжение, классы Соболева, сильно достижимые и слабо плоские границы*

1. Введение.

Напомним, что n**-мерное топологическое многообразие** $\mathbb{M}^n$ – это хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, в котором каждая точка имеет открытую окрестность гомеоморфную $\mathbb{R}^n$ или, что то же самое, открытому шару в $\mathbb{R}^n$, см., например, [1]. **Картой на многообразии** $\mathbb{M}^n$ называется пара $(U,\ g)$, где U – открытое подмножество пространства $\mathbb{M}^n$, а g – гомеоморфное отображение U на открытое подмножество координатного пространства $\mathbb{R}^n$. Заметим, что $\mathbb{R}^2$ гомеоморфно $\mathbb{C}$ через соответствие $(x,y)\Rightarrow z:=x+iy$.

Комплексная карта на двумерном многообразии $\mathbb{S}$ есть гомеоморфизм g открытого множества $U\subseteq\ \mathbb{S}$ на открытое множество $V\subseteq\ \mathbb{C}$, с помощью которого каждой точке $p\in U$ ставится в соответствие число z, ее **локальная координата**. Иногда картой называют множество U. Две комплексные карты $g_1: U_1\to V_1$ и $g_2: U_2\to V_2$ называются **конформно согласованными**, если отображение

$$g_2\circ g_1^{-1}: \quad g_1(U_1\cap U_2)\ \to\ g_2(U_1\cap U_2) \tag{1}$$

конформно. **Комплексным атласом** на $\mathbb{S}$ называется система попарно конформно согласованных карт, покрывающих $\mathbb{S}$. Комплексные атласы на $\mathbb{S}$ называются конфорфмно согласованными, если их карты конформно согласованы.

Комплексной структурой на двумерном многообразии $\mathbb{S}$ называется класс эквивалентности конформно согласованных атласов на $\mathbb{S}$. Понятно, что комплексную структуру на $\mathbb{S}$ можно определять, задавая лишь один ее комплексный атлас. Кроме того, объединяя все атласы комплексной структуры, получаем ее максимальный по включению атлас Σ. **Сопряженная комплексная структура** $\overline{\Sigma}$ на $\mathbb{S}$ состоит из карт $\bar{g}$ комплексного сопряжения $g\in\ \Sigma$, которые связаны между собой антиконформным отображением $\mathbb{C}$ зеркального отражения относительно вещественной оси, меняющим ориентацию. Таким образом, на любом двумерном многообразии не наблюдается единственности комплексной структуры.

Риманова поверхность есть пара $(\mathbb{S},\Sigma)$, состоящая из связного двумерного многообразия $\mathbb{S}$ и комплексной структуры Σ на $\mathbb{S}$. Обычно пишут только $\mathbb{S}$ вместо $(\mathbb{S},\Sigma)$, когда ясно, какая комплексная структура имеется ввиду. Если $\mathbb{S}$ – риманова поверхность, то под **картой** на $\mathbb{S}$ понимается любая комплексная карта из максимального атласа комплексной структуры на $\mathbb{S}$.

Пусть $\mathbb{S}$ и $\mathbb{S}^*$ – римановы поверхности. Будем говорить, что отображение $f : \mathbb{S} \to \mathbb{S}^*$ принадлежит классу Соболева $W^{1,1}_{\text{loc}}$, если f принадлежит $W^{1,1}_{\text{loc}}$ в локальных координатах, т.е., если для любой точки $p \in \mathbb{S}$ найдутся карты $g : U \to V$ и $g_* : U_* \to V_*$ на $\mathbb{S}$ и $\mathbb{S}^*$, соответственно, такие, что $p \in U$, $f(U) \subseteq U_*$ и отображение

$$F \ := \ g_* \circ f \circ g^{-1} : \quad V \to V_* \tag{2}$$

принадлежит классу $W^{1,1}_{\text{loc}}$. Заметим, что последнее свойство инвариантно при замене карт, поскольку класс $W^{1,1}_{\text{loc}}$ инвариантен относительно замен переменных в $\mathbb{C}$, которые являются локальными квазиизометриями, см., например, теорему 1.1.7 в [2], а конформные отображения являются таковыми ввиду ограниченности их производных на компактах. Заметим также, что области D и D^*, т.е. открытые связные множества, на римановых поверхностях $\mathbb{S}$ и $\mathbb{S}^*$ сами являются римановыми поверхностями с комплексными структурами, индуцированными комплексными структурами на $\mathbb{S}$ и $\mathbb{S}^*$, соответственно. Поэтому определение, приведенное выше, распространяется на отображения $f : D \to D_*$.

Напомним также, что функции класса $W^{1,1}_{\text{loc}}$ в $\mathbb{C}$ абсолютно непрерывны на линиях, см., например, теорему 1.1.3 в [2], и, следовательно, почти всюду имеют частные производные. Таким образом, по теореме Геринга–Лехто такие комплекснозначные функции почти всюду имеют также полный дифференциал, если они являются открытыми отображениями, т.е. переводят открытые множества в открытые множества, см. [3], см. также теорему III.3.1 в монографии [4]. Заметим, что этот результат был ранее получен Меньшовым для гомеоморфизмов и, при этом, его доказательство без изменений может быть перенесено на открытые отображения, см. [5]. Мы будем использовать этот факт именно для гомеоморфизмов. Понятно, что свойство дифференцируемости отображений в точке инвариантно относительно замены локальных координат на римановых поверхностях. При исследовании граничного поведения гомеоморфизмов f между областями на римановых поверхностях достаточно ограничиться сохраняющими ориентацию гомеоморфизмами, поскольку при необходимости всегда можно перейти к сопряженной комплексной структуре в образе.

2. Определения и предварительные замечания.

Прежде всего заметим, что по теореме Урысона любые топологические многообразия метризуемы, поскольку они являются хаусдорфовыми регулярными топологическими пространствами со счетной базой, см. [6], или теорему 22.II.1 в [7].

Как хорошо известно, см., например, секцию III.III.2 в [8], римановы поверхности являются ориентируемыми двумерными многообразиями и, наоборот, на всех ориентируемых двумерных многообразиях существуют комплексные структуры, превращающие их в римановы поверхности, см., например, секцию III.III.3 в [8], см. также теорему 6.1.9 в [9]. Кроме того, все двумерные топологические многообразия являются триангулируемыми, см., например, секцию III.II.4 в [8], см. также теорему 6.1.8 в [9].

Любое ориентируемое двумерное многообразие $\mathbb{S}$ имеет **каноническое представление Керекьярто–Стоилова** в виде гомеоморфной ему части расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, которая получается после удаления из $\mathbb{C}$ компактного полностью разрывного множества B точек вещественной оси и конечного или счетного числа пар попарно непересекающихся открытых кругов, расположенных симметрично относительно вещественной оси, граничные окружности которых могут накапливаться только к множеству B и точки которых попарно отождествляются, см., например, III.III в [8]. Число g пар отождествляемых окружностей называется **родом поверхности** $\mathbb{S}$.

Ясно, что топологическая модель Керекьярто–Стоилова гомеоморфна сфере $\mathbb{S}^2 \simeq \overline{\mathbb{C}}$ в $\mathbb{R}^3$ с g ручками и компактным полностью разрывным множеством проколов $\mathbb{S}^2$. Заклеивая проколы в модели Керекьярто–Стоилова точками множества B, получаем компактное топологическое пространство, которое заведомо не является двумерным многообразием, если $g = \infty$. Аналогично, присоединяя граничные элементы к исходной поверхности $\mathbb{S}$, получаем ее **компактификацию Керекьярто-Стоилова** $\overline{\mathbb{S}}$.

Далее, пусть x_k, $k = 1, 2, \ldots$ – последовательность точек в топологическом пространстве X. Будем говорить, что точка $x \in X$ – **предельная точка** последовательности x_k, писать $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$, или просто $x_k \to x$, если любая окрестность U точки x содержит все точки последовательности за исключением их конечного числа. Пусть Ω и Ω_* - открытые множества в топологических пространствах X и X_*, соответственно. В дальнейшем $C(x, f)$ обозначает **предельное множество** отображения $f : \Omega \to \Omega_*$ в точке $x \in \overline{\Omega}$, т.е.

$$C(x, f) \ := \ \left\{ x_* \in X_* : \ x_* \ = \ \lim_{k\to\infty} f(x_k), \ x_k \to x, \ x_k \in \Omega \right\} \tag{3}$$

Известно, что в метрических пространствах включение $C(x, f) \subseteq \partial\Omega_*$, $x \in \partial\Omega$, имеет место для любого гомеоморфизма $f : \Omega \to \Omega_*$, см., например, предложение 2.5 в [10], или предложение 13.5 в [11]. Поэтому имеем следующее заключение.

Предложение 1. *Пусть Ω и Ω_* – открытые множества на многообразиях $\mathbb{M}^n$ и $\mathbb{M}^n_*$, соответственно, и пусть $f : \Omega \to \Omega_*$ – гомеоморфизм. Тогда*

$$C(x, f) \ \subseteq \ \partial\Omega_* \qquad\qquad \forall\ x \in \partial\Omega \tag{4}$$

В частности, отсюда приходим к следующему утверждению.

Следствие 1. *Пусть D и D_* – области на римановых поверхностях $\mathbb{S}$ и $\mathbb{S}_*$, соответственно, и пусть $f : D \to D_*$ – гомеоморфизм. Тогда*

$$C(\partial D, f) := \bigcup_{p\in\partial D} C(p, f) \ \subseteq \ \partial D_* \tag{5}$$

Далее, борелевскую функцию $\rho : \Omega \to [0, \infty]$ называют **допустимой функцией** для семейства Γ кривых γ в открытом множестве $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, пишут $\varrho \in \operatorname{adm}\Gamma$, если

$$\int\limits_{\gamma} \varrho\, ds \ \geqslant \ 1 \qquad \forall\, \gamma \in \Gamma. \tag{6}$$

Конформным модулем семейства Γ называется величина

$$M(\Gamma) \ = \ \inf_{\varrho \,\in\, \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\Omega} \varrho^2(z)\, dm(z) \tag{7}$$

где $dm(z)$ соответствует мере Лебега в $\mathbb{C}$.

Ниже $\Delta(E, F; \Omega)$ обозначает семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, которые соединяют множества E и F в Ω, т.е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in \Omega$ при $a < t < b$.

Говорят, что граница области D в $\mathbb{C}$ – **слабо плоская в точке** $z_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки z_0 и любого числа $N > 0$, существует окрестность $V \subset U$ точки z_0 такие, что

$$M\left(\Delta\left(E, F; D\right)\right) \ \geqslant \ N \tag{8}$$

для всех континуумов E и F в D, пересекающих ∂U и ∂V. Границу D называют **слабо плоской**, если она слабо плоская в каждой точке из ∂D.

Говорят также, что точка $z_0 \in \partial D$ является **сильно достижимой**, если для любой окрестности U точки z_0 существует континуум E в D, окрестность $V \subset U$ точки z_0 и число $\delta > 0$ такие, что

$$M\left(\Delta\left(E, F; D\right)\right) \ \geqslant \ \delta \tag{9}$$

для любого континуума F в D, пересекающего ∂U и ∂V. Границу D называют **сильно достижимой**, если любая точка $z_0 \in \partial D$ является сильно достижимой.

Поскольку конформный модуль инвариантен относительно конформных отображений, перечисленные понятия переносятся на римановы поверхности в терминах локальных координат.

Легко видеть, что если область D из $\mathbb{C}$ является слабо плоской в точке $z_0 \in \partial D$, то точка z_0 сильно достижима из D. Кроме того, было доказано, что если область D из $\mathbb{C}$ является слабо плоской в точке $z_0 \in \partial D$, то D локально связна в z_0, см., например, лемму 5.1 в [12] или лемму 3.15 в [11]. Напомним, что область D на многообразии называется **локально связной в точке** ∂D, если для любой окрестности U этой точки, существует ее окрестность $V \subseteq U$ такая, что $V \cap D$ – область. Очевидно, что локальная связность в граничной точке является инвариантом при гомеоморфных отображениях ее окрестности. Таким образом, имеем следующее заключение.

Предложение 2. *Если область D на римановой поверхности $\mathbb{S}$ является слабо плоской в точке ∂D, то она локально связна в этой точке.*

Модуль семейства Γ кривых $\gamma:\ (a,b)\to\mathbb{S}$ на римановой поверхности $\mathbb{S}$ через карты можно ввести следующим образом. Прежде всего, по теореме Линделефа из карт $g:U\to V$ ее комплексной структуры можно выделить счетный набор $g_l:U_l\to V_l$, $l=1,2,\ldots$, накрывающий Γ, см., например, 5.XI в [7]. Заметим, что $\Delta_l:=\gamma^{-1}(U_l)$ является открытым подмножеством вещественной оси, поскольку $\gamma:(a,b)\to\mathbb{S}$ – непрерывное отображение, т.е. каждое Δ_l состоит из счетного числа интервалов. Таким образом, $\gamma_l^*:=g_l\circ\gamma_l|_{\Delta_l}:\Delta_l\to\mathbb{C}$ – **штриховые линии** в $\mathbb{C}$, см., например, [11] или [12]. Модули семейств Γ_l штриховых линий γ_l^* определяются аналогично (6)-(7). Наконец, полагаем

$$M(\Gamma)\ =\ \inf\ \sum_{l=1}^{\infty}\ M(\Gamma_l)\ , \tag{10}$$

где инфимум берется по всем покрытиям Γ счетными наборами карт римановой поверхности $\mathbb{S}$.

Замечание 1. Если семейство Γ кривых $\gamma:\ (a,b)\to\mathbb{S}$ на римановой поверхности $\mathbb{S}$ целиком принадлежит какой-либо одной ее карте $g:U\to V$, то модуль такого семейства равен модулю семейства Γ^* кривых $\gamma^*:=\ g\circ\gamma:\ (a,b)\to\mathbb{C}$.

Действительно, пусть $g_l:U_l\to V_l$, $l=1,2,\ldots$, счетный набор карт $\mathbb{S}$, накрывающий Γ. Без ограничения общности, можем считать, что $U_l\subseteq U$, $l=1,2,\ldots$, так как мы всегда можем перейти к сужениям $\widetilde{g}_l:=g_l|_{U_l^*}$, где $U_l^*:=U_l\cap U$. Более того, ввиду конформной инвариантности модуля, можем считать, что $\widetilde{g}_l=g|_{U_l^*}$. Заметим, что семейство штриховых линий $\bigcup\limits_{l=1}^{\infty}\Gamma_l$ минорирует семейство кривых Γ^* и, следовательно,

$$M(\Gamma^*)\leqslant\ M\left(\bigcup_{l=1}^{\infty}\Gamma_l\right)\ ,$$

см., например, [13], с. 178. Наконец, в силу счетной полуаддитивности модуля,

$$M(\Gamma^*)\leqslant\ \sum_{l=1}^{\infty}\ M(\Gamma_l)\ ,$$

см., например, теорема 1 в [13], т.е. $M(\Gamma)=M(\Gamma^*)$.

Аналогично можно показать, что если семейство Γ есть объединение семейств кривых Γ_l, расположенных в попарно непересекающихся картах, то

$$M(\Gamma)\ =\ \sum_{l=1}^{\infty}\ M(\Gamma_l)\ ,$$

см. снова [13], с. 178.

Приведем теперь основной результат теории униформизации римановых поверхностей, который нами будет существенно использоваться в дальнейшем, см., например, [14], с. 47. **Теорема униформизации Пуанкаре** (1908) утверждает, что любая риманова поверхность $\mathbb{S}$ представима (с точностью до конформной эквивалентности) в виде фактора $\widetilde{\mathbb{S}}\,/\,G$, где $\widetilde{\mathbb{S}}$ – одна из канонических областей: $\overline{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ или единичный круг $\mathbb{D}$ в $\mathbb{C}$, а G – дискретная группа конформных (= дробно–линейных) отображений $\widetilde{\mathbb{S}}$ на себя. Соответствующие римановы поверхности называются **эллиптического, параболического и гиперболического типа**.

При этом, $\widetilde{\mathbb{S}}=\overline{\mathbb{C}}$ только в случае, когда сама $\mathbb{S}$ конформно эквивалентна сфере $\overline{\mathbb{C}}$ и группа G тривиальна, т.е. состоит только из тождественного отображения; $\widetilde{\mathbb{S}}=\mathbb{C}$, когда $\mathbb{S}$ конформно эквивалентна $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ или тору и, соответственно, группа G либо тривиальна, либо - группа сдвигов с одной образующей $z\to z+\omega$, $\omega\in\ \mathbb{C}\setminus\{0\}$, либо – группа сдвигов с двумя обраэующими $z\to z+\omega_1$ и $z\to z+\omega_2$, где ω_1 и $\omega_2\in\ \mathbb{C}\setminus\{0\}$ и $\mathrm{Im}\,\omega_1/\omega_2\ >\ 0$. За исключением этих простейших случаев, любая риманова поверхность $\mathbb{S}$ конформно эквивалентна единичному кругу $\mathbb{D}$, профакторизованному по дискретной группе G без неподвижных точек, см. также теорему 7.4.2 в [9]. И наоборот, $\mathbb{D}/G$ – риманова поверхность, см. теорему 6.2.1 [15].

Напомним в связи с этим, что в факторе $\widetilde{\mathbb{S}}\,/\,G$ отождествляются все элементы **орбиты** $G_{z_0}\ :=\{\ z\in\ \widetilde{\mathbb{S}}:\ \ z=g(z_0),\ g\in G\ \}$ каждой точки $z_0\in\ \widetilde{\mathbb{S}}$. Группа G дробно–линейных отображений $\mathbb{D}$ на себя называется **дискретной**, если единица G (тождественное отображение I) является изолированным элементом G. Как легко видеть, это ведет к тому, что и все элементы группы G изолированы друг от друга. Если элементы группы G не имеют неподвижных точек, как в теореме об униформизации, то это эквивалентно тому, что группа G **действует разрывно** на $\mathbb{D}$, т.е. для каждой точки $z\in\mathbb{D}$ найдется окрестность U такая, что $g(U)\cap U=\varnothing$ для всех $g\in G$, $g\neq I$, см., например, теорему 8.4.1 в [15].

В связи с этим опишем также вкратце **модель Пуанкаре** неевклидовой плоскости, иначе называемой геометрией Бояи–Лобачевского–Гаусса, или гиперболической геометрией. Точками гиперболической плоскости как раз являются точки единичного круга $\mathbb{D}$, а **гиперболическими прямыми** – дуги в $\mathbb{D}$ окружностей, перпендикулярных к единичной окружности $\mathbb{S}^1\ :=\ \partial\mathbb{D}$, и диаметры $\mathbb{D}$. Любые две точки в $\mathbb{D}$ определяют в точности одну гиперболическую прямую, см., например, предложение 7.2.2 в [9]. **Гиперболическое расстояние в единичном круге** $\mathbb{D}$ задается формулой

$$h(z_1,z_2)\ =\ \log\ \frac{1+t}{1-t}\ ,\qquad \text{где}\qquad t\ =\ \frac{|z_1-z_2|}{|1-z_1\bar{z}_2|}\ ,\tag{11}$$

а **гиперболическая длина** кривой γ и **гиперболическая площадь** множества S в $\mathbb{D}$ вычисляются как интегралы, см., напр., [15], с. 123, предложение 7.2.9 в [14],

$$s_h(\gamma)\ =\ \int\limits_{\gamma}\frac{2\,|dz|}{1-|z|^2}\ ,\qquad h(S)\ =\ \int\limits_{S}\frac{4\,dx\,dy}{(1-|z|^2)^2}\ ,\qquad \text{где}\qquad z=x+iy\,.\tag{12}$$

Все конформные (= дробно-линейные) отображения $\mathbb{D}$ на себя являются **гиперболическими изометриями**, т.е. сохраняют гиперболическое расстояние, см., например, теорему 7.4.1 в [15], а потому как гиперболическая длина так и гиперболическая площадь инвариантны при таких отображениях.

Гиперболическая полуплоскость H, т.е. одна из двух связных компонент дополнения гиперболической прямой L в $\mathbb{D}$, является **гиперболически выпуклым множеством**, т.е. любые две точки в ней можно связать отрезком гиперболической прямой в H, см., например, [15], с. 128. **Гиперболическим многоугольником** называется область в $\mathbb{D}$, которая ограничена жордановой кривой, состоящей из отрезков гиперболических прямых. Если G – дискретная группа дробно-линейных отображений $\mathbb{D}$ на себя без неподвижных точек, то **многоугольник Дирихле** для G с центром $\zeta \in \mathbb{D}$ есть выпуклое множество

$$D_\zeta \;=\; \bigcap_{g\in G,\ g\neq I} H_g(\zeta), \qquad \text{где} \quad H_g(\zeta) = \{z\in\mathbb{D}:\ h(z,\zeta) < h(z,g(\zeta))\ \} \tag{13}$$

– гиперболические полуплоскости, содержащие точку ζ и ограниченные гиперболическими прямыми $L_g(\zeta) = \{z \in \mathbb{D}:\ h(z,\zeta) = h(z,\, g(\zeta))\ \}$. D_ζ также называют **многоугольником Пуанкаре**. Дирихле использовал эту конструкцию в 1850 г. для евклидовых пространств, а позже Пуанкаре применил ее к гиперболическим пространствам.

Геометрический подход к исследованию факторов $\mathbb{D}/G$ опирается на понятие фундаментальной области. **Фундаментальным множеством** для группы G называется множество F в $\mathbb{D}$, содержащая точно по одной точке z из каждой орбиты $G_{z_0},\ z_0 \in \mathbb{D}$. Таким образом, $\bigcup\limits_{g\in G} g(F) = \mathbb{D}$. Существование фундаментального множества гарантируется аксиомой выбора, см., например, [16], с. 246. Область $D \subset \mathbb{D}$ называется **фундаментальной областью** для G, если существует фундаментальное множество F для G такое, что $D \subset F \subset \overline{D}$ и $h(\partial D) = 0$. Если D – фундаментальная область для дискретной группы G дробно-линейных отображений $\mathbb{D}$ на себя без неподвижных точек, то D и ее образы замощают $\mathbb{D}$, т.е.

$$\bigcup_{g\in G} g(\overline{D}) = \mathbb{D}\ , \qquad g(D)\cap D = \varnothing \qquad \forall\ g\in G,\ g\neq I\ . \tag{14}$$

Многоугольник Пуанкаре является примером фундаментальной области, которая всегда существует для любой такой группы, см., например, теорему 9.4.2 в [15].

Гиперболическое расстояние на римановой поверхности $\mathbb{D}/G$ для дискретной группы G без неподвижных точек можно задать следующим образом. Пусть p_1 и $p_2 \in \mathbb{D}/G$. Тогда по определению p_1 и p_2 являются орбитами G_{z_1} и G_{z_2} некоторых точек z_1 и $z_2 \in \mathbb{D}$. Положим

$$h(p_1,\, p_2) \;=\; \inf_{g_1,g_2\in G}\ h(\,g_1(z_1),\, g_2(z_2)\,)\ . \tag{15}$$

Ввиду разрывного действия группы G, орбита не имеет предельных точек внутри $\mathbb{D}$ и, по инвариантности гиперболической метрики в $\mathbb{D}$ относительно группы преобразований G, имеем

$$h\,(p_1\,,\ p_2\,)\ =\ \min_{g_1,g_2\in G}\ h\,(\,g_1(z_1)\,,\ g_2(z_2)\,)\ = \tag{16}$$

$$=\ \min_{g\in G}\ h\,(\,z_1\ ,\ g(z_2)\,)\ =\ \min_{g\in G}\ h\,(\,g(z_1)\,,\ z_2\,)\ .$$

Отсюда видим, что $h(p_1,p_2)=h(p_2,p_1)$ и что $h(p_1,p_2)\neq 0$ при $p_1\neq p_2$. Остается показать неравенство треугольника. Действительно, пусть $p_0=G_{z_0}$, $p_1=G_{z_1}$ и $p_2=G_{z_2}$ и пусть $h(p_0,p_1)=h(z_0,g_1(z_1))$ и $h(p_0,p_2)=h(z_0,g_2(z_2))$. Тогда из (16) заключаем, что

$$h(p_1,p_2)\ \le\ h(g_1(z_1),g_2(z_2))\ \le\ h(z_0,g_1(z_1))+h(z_0,g_2(z_2))\ =\ h(p_0,p_1)+h(p_0,p_2)\,.$$

Теперь, пусть $\pi:\ \mathbb{D}\to\mathbb{D}/G$ – естественная проекция и F – некоторое фундаментальное множество в $\mathbb{D}$ для группы G. Рассмотрим в F метрику $d(z_1,z_2)=h(\pi(z_1),\pi(z_2))$. Заметим, что по построению $d(z_1,z_2)\le h(z_1,z_2)$ и, более того, когда z_2 достаточно близко к z_1 по гиперболической метрике в $\mathbb{D}$, то $d(z_1,z_2)=h(z_1,z_2)$. В результате получаем метрическое пространство $(F,\,d)$ гомеоморфное $\mathbb{D}/G$, в котором длина и площадь вычисляются по тем же формулам (12). Заметим, что элементы длины и площади в интегралах (12)

$$ds_h\ =\ \frac{2\,|dz|}{1-|z|^2}\ ,\qquad dh(z)\ =\ \frac{4\,dx\,dy}{(1-|z|^2)^2}\ ,\qquad \text{где}\qquad z=x+iy\,, \tag{17}$$

инвариантны относительно дробно-линейных отображений $\mathbb{D}$ на себя, т.е. являются функциями точки $p\in\mathbb{D}/G$, и поэтому позволяют вычислять длину и площадь на римановых поверхностях $\mathbb{D}/G$ безотносительно к выбору фундаментального множества F и соответствующих локальных координат.

Для наглядности же, в дальнейшем мы иногда будем отождествлять $\mathbb{D}/G$ с фундаментальным множеством F в $\mathbb{D}$ для группы G, включающем в себя некоторую фундаментальную область (Дирихле-Пуанкаре) для G. Фактор $\mathbb{D}/G$ снабжен естественной комплексной структурой, в которой проекция $\pi:\ \mathbb{D}\to\mathbb{D}/G$ является голоморфной (однозначной аналитической) функцией, сужение которой в любой фундаментальной области является конформным отображением и, следовательно, ее обращение там является комплексной картой на римановой поверхности $\mathbb{D}/G$. Случай тора аналогичен, более прост и потому не будет обсуждаться отдельно.

3. Об отображениях с конечным искажением.

Напомним, что гомеоморфизм f между областями D и D^* в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, называется **конечного искажения**, если $f\in W^{1,1}_{\rm loc}$ и

$$\|f'(x)\|^n\leqslant K(x)\cdot J_f(x) \tag{18}$$

с некоторой п.в. конечной функцией K, где $f'(x)$ обозначает якобиеву матрицу f в $x\in D$, где она определена, $J_f(x)=\det f'(x)$ – якобиан f в x, и $\|f'(x)\|$ - операторная норма $f'(x)$, т.е.

$$\|f'(x)\|=\max\{|f'(x)h|:h\in\mathbb{R}^n,|h|=1\}. \tag{19}$$

Впервые это понятие было введено на плоскости для $f \in W^{1,2}_{\rm loc}$ в работе [17]. Впоследствии это условие было заменено на $f \in W^{1,1}_{\rm loc}$, однако, с дополнительным требованием $J_f \in L^1_{\rm loc}$, см. [18]. Это требование может быть опущено для гомеоморфизмов. Действительно, для любого гомеоморфизма f между областями D и D^* в $\mathbb{R}^n$ с первыми частным производными п.в. в D, существует множество E нулевой меры Лебега такое, что f удовлетворяет (N)-свойству Лузина на $D\setminus E$ и

$$\int\limits_A J_f(x)\,dm(x) = |f(A)| \tag{20}$$

для любого борелевского множества $A\subset D\setminus E$, см., напр., 3.1.4, 3.1.8 и 3.2.5 в [19].

В комплексной плоскости, $\|f'\| = |f_z| + |f_{\overline{z}}|$ и $J_f = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2$, где

$$f_{\overline{z}} = (f_x + if_y)/2\ , \quad f_z = (f_x - if_y)/2, \quad z = x+iy\ ,$$

и f_x и f_y – частные производные f по x и y, соответственно. Таким образом, в случае сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов $f\in W^{1,1}_{\rm loc}$, (18) эквивалентно условию, что $K_f(z)<\infty$ п.в., где

$$K_f(z) = \frac{|f_z| + |f_{\overline{z}}|}{|f_z| - |f_{\overline{z}}|}\ , \tag{21}$$

если $|f_z| \neq |f_{\overline{z}}|$, 1, если $f_z = 0 = f_{\overline{z}}$, и ∞ в противном случае. Как обычно, величина $K_f(z)$ называется **дилатацией** отображения f в z.

Если $f: D\to D^*$ – гомеоморфизм класса $W^{1,1}_{\rm loc}$ между областями D и D^* на римановых поверхностях $\mathbb{S}$ и $\mathbb{S}^*$, то $K_f(z)$ обозначает дилатацию отображения f в локальных координатах, т.е. дилатацию отображения F из (2). Геометрически величина (21) в точке z дифференцируемости отображения f означает отношение полуосей эллипса, в который переходят инфинитезимальные окружности с центром в этой точке при отображении f. Указанная величина инвариантна при замене локальных координат, поскольку конформные отображения переводят инфинитезимальные окружности в инфинитезимальные окружности, а инфинитезимальные эллипсы - в инфинитезимальные эллипсы с тем же отношением полуосей, т.е. K_f на самом деле является функцией $K_f(p)$ точки $p\in\mathbb{S}$, а не локальных координат.

Гомеоморфизм $f: D\to D^*$ между областями D и D^* на римановых поверхностях $\mathbb{S}$ и $\mathbb{S}^*$ будем называть **отображением с конечным искажением**, если он является таковым в локальных координатах. Ясно, что это свойство достаточно проверить для одного атласа, поскольку конформные отображения обладают $(N)-$свойством Лузина. Говорим также, что гомеоморфизм $f: D\to D^*$ между областями D и D^* в компактификациях Керекьярто–Стоилова $\overline{\mathbb{S}}$ и $\overline{\mathbb{S}^*}$ является отображением с конечным искажением, если это свойство имеет место для его сужения в $\mathbb{S}$. Заметим, что гомеоморфизм между областями в $\mathbb{S}$ и $\mathbb{S}^*$ всегда продолжим до гомеоморфизма между соответствующими областями в $\overline{\mathbb{S}}$ и $\overline{\mathbb{S}^*}$. В дальнейшем подразумеваем, что K_f продолжена нулем вне D и вне $\mathbb{S}$, и пишем $K_f\in L^1_{\rm loc}$, если K_f локально интегрируема в картах $\mathbb{S}$.

Лемма 1. *Пусть G и G^* – дискретные группы дробно-линейных отображений $\mathbb{D}$ на себя без неподвижных точек. Если $f : D \to D^*$ – гомеоморфизм конечного искажения между областями D и D^* на римановых поверхностях $\mathbb{D}/G$ и $\mathbb{D}/G^*$ с $K_f \in L^1_{\rm loc}$, то*

$$M\left(\Delta\left(fC_1, fC_2; fA\right)\right) \leqslant \int\limits_A K_f(p) \cdot \xi^2(h(p,p_0))\, dh(p) \qquad \forall\, p_0 \in \overline{D} \tag{22}$$

для любых колец $A = A(p_0, R_1, R_2) = \{p \in \mathbb{D} : R_1 < h(p,p_0) < R_2\}$, окружностей $C_1 = \{z \in \mathbb{D} : h(p,p_0) = r_1\}$, $C_2 = \{p \in \mathbb{D} : h(p,p_0) = r_2\}$, $0 < R_1 < R_2 < \varepsilon = \varepsilon(p_0)$, и для любых измеримых функций $\xi : (R_1, R_2) \to [0,\infty]$ таких, что

$$\int\limits_{R_1}^{R_2} \xi(R)\, dR \geqslant 1 . \tag{23}$$

Доказательство. Как это обсуждалось в секции 2, здесь мы отождествляем поверхность $\mathbb{D}/G$ с фундаментальным множеством F в $\mathbb{D}$ для G с метрикой d, которое содержит фундаментальный многоугольник Пуанкаре D_{z_0} для G с центром в точке $z_0 \in \mathbb{D}$, чья орбита G_{z_0} и есть p_0. Без ограничения общности можно считать $z_0 = 0$. Это достигается за счет дробно-линейного отображения $\mathbb{D}$ на себя $g_0(z) = (z - z_0)/(1 - z\overline{z_0})$, переводящего точку z_0 в начало координат. Переходя к новой группе G_0, получаем риманову поверхность $\mathbb{D}/G_0$, которая будет конформно эквивалентна $\mathbb{D}/G$, а все величины и условия в лемме 1 конформно инвариантны. Пусть

$$\delta_0 = \min\left[\inf_{\zeta \in \partial D_0} d(0,\zeta),\ \sup_{z \in D} d(0,z)\right] .$$

Выберем $\delta \in (0, \delta_0)$ столь малым, чтобы при $d(0,z) \leqslant \delta$ выполнялось равенство $d(0,z) = h(0,z)$. Заметим, что в соответствии с (11)

$$R := h(0,z) = \log \frac{1+r}{1-r}, \qquad \text{где} \qquad r := |z| ,$$

и, соответственно,

$$dR = \frac{2dr}{1-r^2}, \qquad r = \frac{e^R - 1}{e^R + 1} .$$

Следовательно,

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr \geqslant 1 ,$$

где

$$\eta(r) = \frac{2}{1-r^2} \cdot \xi\left(\log \frac{1+r}{1-r}\right)$$

и, кроме того,

$$\int\limits_A K_f(z)\cdot\ \xi^2(d(z,z_0))\ dh(z)\ =\ \int\limits_A K_f(z)\cdot\ \eta^2(|z|)\ dm(z)\ , \tag{24}$$

где элемент площади $dm(z) := dx\,dy$ отвечает мере Лебега на плоскости $\mathbb{C}$. Заметим, что при этом $A = \{z \in \mathbb{D} : r_1 < |z| < r_2\}$, $C_1 = \{z \in \mathbb{D} : |z| = r_1\}$ и $C_2 = \{z \in \mathbb{D} : |z| = r_2\}$.

Ясно, что подмножество комплексной плоскости $D(\delta) := \{z \in D : |z| < \delta\}$ распадается на не более чем счетное число областей. Тогда компоненты множества $f(D(\delta))$ гомеоморфны этим плоским областям и, следовательно, по общему принципу Кебе, см., например, [14], с. 48, конформно эквивалентны плоским областям, т.е. семейство кривых $\Delta(fC_1, fC_2; fA)$ разбиваются на счетное число подсемейств, лежащих в соответствующих комплексных картах римановой поверхности $\mathbb{D}/G^*$. Таким образом, заключение нашей леммы следует из теоремы 3 в [20]. $\Box$

4. О продолжении на границу обратных отображений.

В отличие от прямых отображений, см. следующую секцию, имеет место следующий простой критерий для обратных отображений.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbb{S}$ *и* $\mathbb{S}^*$ *– римановы поверхности,* D *и* D^* *– области в* $\overline{\mathbb{S}}$ *и* $\overline{\mathbb{S}^*}$*, соответственно,* $\partial D \subset \mathbb{S}$ *и* $\partial D^* \subset \mathbb{S}^*$*,* D *локально связна на границе и* ∂D^* *– слабо плоская. Если* $f : D \to D^*$ *– гомеоморфизм с конечным искажением и* $K_f \in L^1_{\rm loc}$*, то* f^{-1} *продолжается по непрерывности в* $\overline{D^*}$*.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что по теореме Урысона $\overline{\mathbb{S}}$ является метризуемым пространством, см., например, теорему 22.II.1 в [7]. Поэтому компактность $\overline{\mathbb{S}}$ эквивалентна секвенциальной компактности, см., например, замечание 41.I.3 в [21]. Следовательно, предельное множество $C(p_*, f^{-1})$ не пусто для любой точки $p_* \in \partial D^*$ ввиду секвенциальной компактности $\overline{\mathbb{S}}$, и по следствию 1 $C(p_*, f^{-1}) \subseteq \partial D \subset \mathbb{S}$. Достаточно убедиться, что $C(p_*, f^{-1})$ состоит из единственной точки, см., например, теоремы 20.V.1 и 21.II.1 в [7], поскольку $\overline{\mathbb{S}}$ метризуемо. Предположим, что найдется по крайней мере две точки p_1 и $p_2 \in \partial D$ в $C(p_*, f^{-1})$. Тогда $p_* \in\ C(p_1, f) \cap C(p_2, f)$ и, таким образом, доказательство теоремы теперь редуцируется к следующей лемме. $\Box$

Лемма 2. *Пусть* $\mathbb{S}$ *и* $\mathbb{S}^*$ *– римановы поверхности,* D *и* D^* *– области в* $\overline{\mathbb{S}}$ *и* $\overline{\mathbb{S}^*}$*, соответственно,* $\partial D \subset \mathbb{S}$ *и* $\partial D^* \subset \mathbb{S}^*$*, и* ∂D^* *– слабо плоская. Если* $f : D \to D^*$ *– гомеоморфизм с конечным искажением и* $K_f \in L^1_{\rm loc}$*, то в точках* p_1 *и* $p_2 \in\ \partial D$*,* $p_1 \neq p_2$*, локальной связности области* D

$$C(p_1, f) \cap C(p_2, f) = \varnothing\ .$$

Доказательство. Здесь мы ограничимся случаем римановых поверхностей гиперболического типа, поскольку в эллиптическом и параболическом случае все поверхности являются плоскими, за исключением торов. Граничное поведение гомеоморфизмов с конечным искажением на плоскости было изучено в работе [22], см. также [20]. Случай же торов аналогичен и более прост по сравнению с этим.

Для начала заметим, что ∂D и ∂D^* имеют окрестности, которые не содержит никаких граничных элементов поверхностей $\mathbb{S} = \mathbb{D}/G$ и $\mathbb{S}^* = \mathbb{D}/G^*$ из модели Керекьярто–Стоилова, поскольку $\partial D \subset \mathbb{S}$ и $\partial D^* \subset \mathbb{S}^*$.

Пусть $E_i = C(p_i, f)$, $i = 1, 2$. Тогда по следствию 1 $E_i \subseteq \partial D^*$, $i = 1, 2$. Давайте предположим, что $E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$ и пусть $p_* \in E_1 \cap E_2$.

Обозначим через $\delta = \delta(p_1)$ число из леммы 1. Так как область D локально связна в точках p_1 и p_2, существуют их открытые окрестности U_1 и U_2 в $\mathbb{S}$, соответственно, такие, что $W_1 = D \cap U_1$ и $W_2 = D \cap U_2$ являются областями, а также $U_1 \subset B(p_1, \delta/3)$ и $U_2 \subset \mathbb{S} \setminus B(p_1, 2\delta/3)$. Тогда по неравенству треугольника $h(W_1, W_2) \geqslant \delta/3$. Рассмотрим функцию

$$\xi(t) = \begin{cases} 3/\delta, & t \in (\delta/3,\, 2\delta/3), \\ 0, & t \notin (\delta/3,\, 2\delta/3). \end{cases}$$

Ясно, что $\int\limits_{\delta/3}^{2\delta/3} \xi(t)\ dt = 1$ и по принципу минорирования и лемме 1 для любых континуумов $C_1 \subset W_1$ и $C_2 \subset W_2$:

$$M(f(\Delta(C_1, C_2, D))) \leqslant \int\limits_{A(p_1,\delta/3,2\delta/3)} K_f(p) \cdot\ \xi^2(h(p, p_1))\ dh(p) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{3^2}{\delta^2} \int\limits_{A(p_1,\delta/3,2\delta/3)} K_f(p)\ dh(p) < \infty ,$$

так как $K_f \in L^1(A)$, где $A = A(p_1, \delta/3, 2\delta/3)$ и предполагается, что K_f продолжена нулем вне D.

Однако, эта оценка противоречит условию, что ∂D^* является слабо плоской. Действительно, $p_* \in E_1 \cap E_2 \subseteq \overline{fW_1} \cap \overline{fW_2}$ и тогда в областях $W_1^* = fW_1$ и $W_2^* = fW_2$ найдется по непрерывной кривой, пересекающей любые наперед заданные окружности $\partial B(p_*, r_0)$ и $\partial B(p_*, r_*)$ с достаточно малыми радиусами r_0 и r_*. Поэтому предположение, что $E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$ было неверным. $\Box$

5. Лемма о продолжении на границу прямых отображений.

В отличие от случая обратных отображений, как это было установлено еще на плоскости, никакая степень интегрируемости дилатации не ведет к продолжению на границу прямых отображений класса Соболева на границу, см., например, доказательство предложения 6.3 в [11]. Соответствующий критерий для этого, приведенный ниже, является гораздо более тонким. Как и ранее, здесь мы подразумеваем, что функция K_f продолжена нулем вне области D.

Лемма 3. *Пусть $\mathbb{S}$ и $\mathbb{S}^*$ – римановы поверхности, D и D^* – области в $\overline{\mathbb{S}}$ и $\overline{\mathbb{S}^*}$, соответственно, $\partial D \subset \mathbb{S}$, $\partial D^* \subset \mathbb{S}^*$, D локально связна в точке $p_0 \in \partial D$. Предположим, что $f : D \to D^*$ – гомеоморфизм конечного искажения такой, что $K_f \in L^1_{\rm loc}$ и ∂D^* сильно достижима хотя бы в одной точке $C(p_0, f)$ и, в некоторой карте U поверхности $\mathbb{S}$ с локальной координатой z_0 точки p_0,*

$$\int\limits_{\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0} K_f(z)\cdot\psi^2_{z_0,\varepsilon}(|z-z_0|)\,dm(z) \;=\; o(I^2_{z_0,\varepsilon_0}(\varepsilon)) \qquad \text{при} \quad \varepsilon\to 0 \tag{25}$$

для некоторого $\varepsilon_0 > 0$, где $\psi_{z_0,\varepsilon}(t)$ – семейство неотрицательных измеримых (по Лебегу) функций на $(0,\infty)$ таких, что

$$0 \;<\; I_{z_0,\varepsilon_0}(\varepsilon) :\,= \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi_{z_0,\varepsilon}(t)\,dt \;<\;\infty \qquad \forall\,\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)\ . \tag{26}$$

Тогда отображение f продолжимо по непрерывности в точку p_0 и $f(p_0) \in \partial D^*$.

Заметим, что условия (25)–(26) влекут, что $I_{z_0,\varepsilon_0}(\varepsilon)\to\infty$ при $\varepsilon\to 0$ и, что ε_0 может быть выбрано сколь угодно малым с сохранением (25)–(26).

Доказательство. Переходя к карте U, мы можем считать, без ограничения общности, что $\mathbb{S}$ и D – плоские области. Тогда по общему принципу униформизации Кебе, см., например, [14], с. 48, область $D^* = fD$ также является картой на римановой поверхности $\mathbb{S}^*$. Таким образом, по теореме 3 в [20] и замечанию 1

$$M\left(\Delta\left(fC_1, fC_2;\, fD\right)\right) \;\leqslant\; \int\limits_{A} K_f(z)\cdot\;\eta^2(|z-z_0|)\;dm(z) \tag{27}$$

для любых колец $A = A(z_0, r_1, r_2) = \{z\in\mathbb{C} : r_1 < |z-z_0| < r_2\}$, $0 < r_1 < r_2 < \varepsilon_* := \sup\limits_{z\in D}|z-z_0|$, континуумов C_1 и C_2 в D, принадлежащих разным компонентам связности дополнения A в $\mathbb{C}$, и для любых измеримых функций $\eta : (r_1, r_2)\to[0,\infty]$ таких, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\eta(r)\;dr \geqslant\; 1\ . \tag{28}$$

Напомним, что по теореме Урысона $\overline{\mathbb{S}^*}$ является метризуемым пространством, см., например, теорему 22.II.1 в [7]. Поэтому компактность $\overline{\mathbb{S}^*}$ эквивалентна секвенциальной компактности, см., например, замечание 41.I.3 в [21]. Следовательно, предельное множество $C(z_0, f)$ не пусто ввиду секвенциальной компактности $\overline{\mathbb{S}^*}$, и по следствию 1 $C(z_0, f)\subseteq\partial D^*\subset\mathbb{S}^*$. Таким образом, достаточно показать, что $C(z_0, f)$ состоит из единственной точки, см., например, теоремы 20.V.1 и 21.II.1 в [7], поскольку $\overline{\mathbb{S}^*}$ метризуемо.

По условию леммы, ∂D^* сильно достижима в некоторой точке $p_1 \in C(z_0, f)$. Давайте предположим, что существует еще хотя бы одна точка $p_2 \in C(z_0, f)$. Через d обозначим одно из расстояний в $\overline{\mathbb{S}^*}$. Пусть $d_0 \in (0,\, d(p_1, p_2))$.

В силу локальной связности области D в точке z_0, найдется последовательность открытых окрестностей U_k точки z_0 такая, что $D_k = D \cap U_k$ – области и $\operatorname{diam} U_k \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда найдутся точки ζ_k и $\zeta_k^* \in D_k^* := f D_k$, близкие к p_1 и p_2, соответственно, для которых $d(p_1, \zeta_k) < d_0$ и $d(p_1, \zeta_k^*) > d_0$ и которые можно соединить кривыми C_k в областях D_k^*, $k = 1, 2, \ldots$. Ввиду связности C_k,

$$C_k \cap \partial B(p_1, d_0) \neq \varnothing\,, \qquad \text{где} \quad B(p_1, d_0) \;=\; \{p \in \mathbb{S}^* :\; d(p, p_1) < d_0\}\;. \tag{29}$$

По условию сильной достижимости точки p_1 найдутся континуум $C_0 \subset D^*$ и число $\delta > 0$ такие, что

$$M(\Delta(C_0, C_k;\, D^*)) \;\geqslant\; \delta \tag{30}$$

для достаточно больших k, поскольку $\operatorname{dist}(p_1, C_k) \to 0$ при $k \to \infty$. Заметим, что $K_0 := f^{-1}(C_0)$ также является континуумом как непрерывный образ континуума. Таким образом, $\varepsilon^* := \operatorname{dist}(z_0, K_0)) > 0$. Выберем в условии леммы $\varepsilon_0 < \min(\varepsilon_*, \varepsilon^*)$.

Заметим, что для функции

$$\eta_{\varepsilon}(t) \;:=\; \begin{cases} \psi_{z_0,\varepsilon}(t)/I_{z_0,\varepsilon_0}(\varepsilon), & t \in (\varepsilon, \varepsilon_0), \\ 0, & t \notin (\varepsilon, \varepsilon_0), \end{cases} \tag{31}$$

выполнено условие, что

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \eta_{\varepsilon}(t)\; dt \;=\; 1\;.$$

Таким образом, для любого континуума $K \subset D(z_0, \varepsilon) :=\; \{z \in D :\; |z - z_0| < \varepsilon\}$, по свойству (27),

$$M(\triangle(fK_0, fK;\, D^*)) \;\leqslant \int\limits_{\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0} K_f(z)\cdot\, \eta_{\varepsilon}^2(|z - z_0|)\; dm(z) \;=$$

$$=\; \frac{1}{I^2_{z_0,\varepsilon_0}(\varepsilon)} \int\limits_{\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0} K_f(z)\cdot\, \psi^2_{z_0,\varepsilon}(|z - z_0|)\; dm(z) \;\to\; 0 \qquad \text{при } \varepsilon \;\to\; 0 \tag{32}$$

ввиду условия (25).

С другой стороны, для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ при больших k имеет место включение $D_k \subset D(z_0, \varepsilon)$ и, следовательно, $f^{-1}(C_k) \subset D(z_0, \varepsilon)$. Таким образом, получаем противоречие между (30) и (32). Это противоречие опровергает предположение о существовании второй точки p_2 в $C(z_0, f)$, что и завершает доказательство. $\Box$

6. О гомеоморфном продолжении отображений на границу.

Комбинируя теорему 1 с леммой 3, можно получить целый ряд эффективных критериев гомеоморфного продолжения на границу для отображений с конечным искажением между областями на римановых поверхностях. Как и ранее, здесь мы будем подразумевать, что функция K_f продолжена нулем вне области D.

Теорема 2. *Пусть в дополнение к условиям теоремы 1, для любой точки $p_0 \in \partial D$ с локальной координатой z_0 в некоторой карте U поверхности $\mathbb{S}$,*

$$\int\limits_0^{\delta} \frac{dr}{||K_f||\,(z_0,r)} \ = \ \infty \tag{33}$$

при всех достаточно малых $\delta > 0$, где

$$||K_f||\,(z_0,r) \ = \int\limits_{|z-z_0|=r} K_f(z)\ |\,dz|\ . \tag{34}$$

Тогда отображение f продолжим до гомеоморфизма $\overline{D}$ на $\overline{D^*}$.

Доказательство. Действительно, полагая $\psi_{z_0}(t) = 1/||K_f||\,(z_0,t)$ для всех $t \in (0,\varepsilon_0)$ при достаточно малом $\varepsilon_0 > 0$, и $\psi_{z_0}(t) = 1$ для всех $t \in (\varepsilon_0,\infty)$, из условия (33) получаем, что

$$\int\limits_{\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0} K_f(z)\cdot\,\psi^2_{z_0}(|z-z_0|)\,dm(z) \ = \ I_{z_0,\varepsilon_0}(\varepsilon) \ = \ o(I^2_{z_0,\varepsilon_0}(\varepsilon)) \qquad \text{при} \quad \varepsilon\to 0\ ,$$

где, ввиду условий $K_f(z) \geqslant 1$ в D и $K_f \in L^1_{\mathrm{loc}}$,

$$0 \ < \ I_{z_0,\varepsilon_0}(\varepsilon) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi_{z_0}(t)\,dt \ < \ \infty\ .$$

Таким образом, теорема 2 следует из леммы 3 и теоремы 1. $\Box$

Следствие 2. *В частности, заключение теоремы 2 имеет место, если для любой точки $p_0 \in \partial D$ с локальной координатой z_0 в карте U поверхности $\mathbb{S}$,*

$$K_f(z) \quad = O\left(\log\frac{1}{|z-z_0|}\right) \qquad \text{при} \quad z\to z_0\ , \tag{35}$$

или, более общо,

$$k_{z_0}(\varepsilon) = O\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad \text{при} \quad \varepsilon\to 0\ , \tag{36}$$

где $k_{z_0}(\varepsilon)$ – среднее значение функции K_f на окружности $|z-z_0| = \varepsilon$.

По теореме 3.1 в работе [23], имеем следующий результат из теоремы 2.

Теорема 3. *При условиях теоремы 1, пусть для любой точки $p_0 \in \partial D$ найдется карта поверхности $\mathbb{S}$, содержащая p_0, в локальных координатах которой*

$$\int \Phi(K_f(z))\, d\,m(z) \ < \ \infty \ , \tag{37}$$

где $\Phi : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ – неубывающая выпуклая функция с условием

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \Phi^{-1}(\tau)} = \infty \tag{38}$$

для некоторого $\delta > \Phi(0)$. Тогда отображение f продолжим до гомеоморфизма $\overline{D}$ на $\overline{D^*}$.

Замечание 2. Заметим, что по теореме 5.1 и замечанию 5.1 в [24] условие (38) является не только достаточным, но и необходимым для непрерывного продолжения на границу всех отображений f конечного искажения с интегральными ограничениями вида (37).

Заметим также, что по теореме 2.1 в [23] условие (38) эквивалентно любому из следующих условий, где $H(t) = \log \Phi(t)$:

$$\int\limits_{\Delta}^{\infty} H'(t)\, \frac{dt}{t} = \infty \tag{39}$$

или

$$\int\limits_{\Delta}^{\infty} \frac{dH(t)}{t} = \infty \tag{40}$$

или

$$\int\limits_{\Delta}^{\infty} H(t)\, \frac{dt}{t^2} = \infty \tag{41}$$

для некоторого $\Delta > 0$, а также каждому из равенств:

$$\int\limits_{0}^{\delta} H\left(\frac{1}{t}\right)\, dt = \infty \tag{42}$$

для некоторого $\delta > 0$,

$$\int\limits_{\Delta_*}^{\infty} \frac{d\eta}{H^{-1}(\eta)} = \infty \tag{43}$$

для некоторого $\Delta_* > H(+0)$.

Здесь, интеграл в (40) понимается как интеграл Лебега–Стилтьеса, а интегралы в (45), (41)–(43) как обычные интегралы Лебега.

Необходимо привести еще пояснения. В правых частях условий (39)–(43), мы имеем ввиду $+\infty$. Если $\Phi(t) = 0$ для $t \in [0, t_*]$, то $H(t) = -\infty$ для $t \in [0, t_*]$, и мы завершаем определение в (39), полагая $H'(t) = 0$ для $t \in [0, t_*]$. Отметим, что условия (40) и (41) исключают случай того, что t_* принадлежит интервалу интегрирования, поскольку в противном случае левые части в (40) и (41) либо равны $-\infty$, либо не определены. Поэтому можем предполагать, что в (39–(42) $\delta > t_0$, соответственно, $\Delta < 1/t_0$, где $t_0 := \sup_{\Phi(t)=0} t$, и полагать $t_0 = 0$, если $\Phi(0) > 0$.

Наиболее интересным из перечисленных выше условий является условие (41), которое может быть переписано в виде:

$$\int\limits_{\delta}^{\infty} \log \Phi(t)\ \frac{dt}{t^2}\ =\ \infty\ . \tag{44}$$

Следствие 3. *В частности, заключение теоремы 3 имеет место, если при некотором $\alpha > 0$*

$$\int e^{\alpha K_f(z)}\ d\,m(z)\ <\ \infty\ . \tag{45}$$

Следующее утверждение вытекает из теоремы 1 и леммы 3 при $\psi(t) = 1/t$.

Теорема 4. *Пусть при условиях теоремы 1, для любой точки $p_0 \in \partial D$ с локальной координатой z_0 в некоторой карте U поверхности $\mathbb{S}$,*

$$\int\limits_{\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0} K_f(z)\ \frac{dm(z)}{|z-z_0|^2}\ =\ o\left(\left[\log\frac{1}{\varepsilon}\right]^2\right) \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0\ . \tag{46}$$

Тогда отображение f продолжим до гомеоморфизма $\overline{D}$ на $\overline{D^*}$.

Замечание 3. Выбирая в лемме 3 функцию $\psi(t) = 1/(t\log 1/t)$ вместо $\psi(t) = 1/t$, получаем, что условие (46) может быть заменено условием

$$\int\limits_{\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0} \frac{K_f(z)\ dm(z)}{\left(|z-z_0|\ \log\frac{1}{|z-z_0|}\right)^2}\ =\ o\left(\left[\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right]^2\right) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0\ . \tag{47}$$

Аналогично, условие (36) по теореме 2 может быть заменено более слабым условием

$$k_{z_0}(\varepsilon)\ =\ O\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0\ . \tag{48}$$

Конечно, мы могли бы здесь привести еще целый ряд соответствующих условий логарифмического типа, используя подходящие функции $\psi(t)$.

Следуя работе [25], говорим, что функция $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ в открытом множестве $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ имеет **конечное среднее колебание** в точке $z_0 \in D$, пишем $\varphi \in \mathrm{FMO}(z_0)$, если

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int\limits_{B(z_0,\,\varepsilon)} |\ \varphi(z) - \widetilde{\varphi}_\varepsilon|\ dm(z)\ <\ \infty\ , \tag{49}$$

где $\widetilde{\varphi}_\varepsilon$ – среднее значение функции φ в круге $B(z_0,\,\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} :\ |z - z_0| < \varepsilon\}$.

По лемме 3 с выбором $\psi_{z_0,\,\varepsilon}(t) \equiv 1/t \log \frac{1}{t}$, смотри также следствие 2.3 в [25], получаем следующий результат.

Теорема 5. *Пусть при условиях теоремы 1, для любой точки* $p_0 \in \partial D$ *с локальной координатой* z_0 *в некоторой карте* U *поверхности* $\mathbb{S}$,

$$K_f(z)\ \leqslant\ Q(z) \in\ \mathrm{FMO}(z_0)\ . \tag{50}$$

Тогда отображение f *продолжим до гомеоморфизма* $\overline{D}$ *на* $\overline{D^*}$.

По следствию 2.1 в [25] из теоремы 5 также имеем:

Следствие 4. *В частности, заключение теоремы 5 имеет место, если*

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int\limits_{B(z_0,\,\varepsilon)} K_f(z)\ dm(z)\ <\ \infty\ .$$

Замечание 4. Заметим, что в теореме 1 мы требовали, чтобы область D^* имела слабо плоскую границу, а в лемме 3 более слабое условие, чтобы граница D^* была сильно достижимой. Во всех теоремах последней секции о гомеоморфном продолжении на границу мы требовали выполнения условий теоремы 1. Однако, для непрерывного продолжения отображений на границу достаточно требовать только сильную достижимость границы D^*, поскольку при этом мы можем опираться только на лемму 3, не привлекая теорему 1. При этом, при выполнении соответствующих условий на дилатацию из теорем последней секции, получаем соответствующие теоремы о непрерывном продолжении отображений на границу. Более того, лемма 3 позволяет проводить поточечный анализ: если выполнены условия на дилатацию в какой-либо граничной точке D, то в этой точке имеет место продолжение на границу по непрерывности. Однако, чтобы не повторятся и из-за ограничений на объем статьи, мы не формулируем здесь соответствующие теоремы в явном виде.

1. *Форстер О.* Римановы поверхности. – М.: Мир, 1980.
2. *Мазья В.Г.* Пространства С.Л. Соболева. – Л.: ЛГУ, 1985.
3. *Gehring F. W., Lehto O.* On the total differentiability of functions of a complex variable // Ann. Acad. Sci. Fenn. A1. Math. – 1959. – **272**. – P. 1–9.
4. *Lehto O., Virtanen K.J.* Quasiconformal mappings in the plane. – Berlin, Springer–Verlag, 1973.
5. *Menchoff D.* Sur les differentielles totales des fonctions univalentes // Math. Ann. – 1931. – **105**. – P. 75–85.
6. *Uryson P.S.* Zum Metrisationsproblem // Math. Ann. – 1925. – **94**. – P. 309–315.
7. *Куратовский К.* Топология, Т. 1. – М.: Мир, 1966.
8. *Стоилов С.* Лекции о топологических принципах теории аналитических функций. – М.: Наука, 1964.
9. *Цишанг Х., Фогт Э., Колдевай Х.-Д.* Поверхности и разрывные группы. – М.: Наука, 1988.
10. *Рязанов В.И., Салимов Р.Р.* Слабо плоские пространства и границы в теории отображений // Укр. мат. вiсник. – 2007. – **4**, № 2. – С. 199–234; transl. in Ukrainian Math. Bull. – 2007. – **4**, № 2. – P. 199–234.
11. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory. – New York etc., Springer, 2009.
12. *Ковтонюк Д.А., Рязанов В.И.* К теории нижних Q-гомеоморфизмов // Укр. мат. вестник. – 2008. – **5**, № 2. – С. 159 – 184; transl. in Ukrainian Math. Bull. – 2008. – **5**, № 2. – P. 157–181.
13. *Fuglede B.* Extremal length and functional completion // Acta Math. – 1957. – **98**. – P. 171–219.
14. *Крушкаль С.Л., Апанасов Б.Н., Гусевский Н.А.* Клейновы группы и униформизация в примерах и задачах. – Новосибирск: Наука, 1981.
15. *Бердон А.* Геометрия дискретных групп. – М.: Наука, 1986.
16. *ван дер Варден Б.Л.* Алгебра. – М.: Наука, 1976.
17. *Iwaniec T., Sverak V.* On mappings with integrable dilatation // Proc. Amer. Math. Soc. – 1993. – **118**. – P. 181–188.
18. *Iwaniec T., Martin G.* Geometric function theory and non-linear analysis. – Oxford, Oxford Univ. Press, 2001.
19. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. – М.: Наука, 1987.
20. *Ковтонюк Д. А., Петков И. В., Рязанов В. И., Салимов Р. Р.* Граничное поведение и задача Дирихле для уравнений Бельтрами // Алгебра и Анализ. – 2013. – **25**:4. – P. 101–124.
21. *Куратовский К.* Топология, Т. 2. – М.: Наука, 1969.
22. *Ковтонюк Д.А., Петков И.В., Рязанов В.И.* О граничном поведении решений уравнений Бельтрами // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 8. – С. 1078–1091.
23. *Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* Integral conditions in the mapping theory // Укр. мат. вестник. – 2010. – **7**, № 1. – С. 73–87; transl. in Math. Sci. J. – 2011 – **173**, No. 4. – P. 397–407.
24. *Kovtonyuk D. and Ryazanov V.* On the boundary behavior of generalized quasi-isometries // J. Anal. Math. – 2011. – **115**. – P. 103–120.
25. *Игнатьев А. А., Рязанов В.И.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. мат. вестник. – 2005. – **2**, № 3. – С. 395 – 417; transl. in Ukrainian Math. Bull. – 2005. – **2**, № 3. – P. 403–424.

S. V. Volkov, V. I. Ryazanov

On the boundary behavior of mappings of the class $W^{1,1}_{\rm loc}$ on Riemannian surfaces.

In terms of dilatations, it is formulated a series of criteria for continuous and homeomorphic extension to the boundary of mappings in the class $W^{1,1}_{\rm loc}$ between domains on the Riemann surfaces

Keywords: *Riemann surfaces, boundary behavior, continuous and homeomorphic extension, Sobolev classes, strongly accessible and weakly flat boundaries.*

С. В. Волков, В. І. Рязанов

Про граничну поведінку відображень класу $W^{1,1}_{\rm loc}$ на римановых поверхнях.

У термінах дилатацій сформульовано ряд критеріїв для неперервного і гомеоморфного продовження на межу відображення класу $W^{1,1}_{\rm loc}$ між областями на римановых поверхнях

Ключові слова: *риманові поверхні, гранична поведінка, неперервне і гомеоморфне продовження, класи Соболева, сильно досяжні та слабо плоскі межі.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Славянск
`sergey.v.volkov@mail.ru, vl.ryazanov1@gmail.com`