УДК 517.5

©2015. **А. К. Бахтин, Я. В. Заболотный**

ОБ ОДНОМ ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ ИЗВЕСТНОЙ ПРОБЛЕМЫ В. Н. ДУБИНИНА

В данной работе рассматривается известная гипотеза В. Н. Дубинина о неналегающих областях на комплексной плоскости и найдено ее решение при $n = 5$ и $1 < \gamma \leq 2.32$.

Ключевые слова: *неналегающие области, внутренний радиус, квадратичный дифференциал.*

1. Введение.

В геометрической теории функций комплексного переменного экстремальные задачи о неналегающих областях являются хорошо известным классическим направлением. Первоначальным толчком к возникновению данного направления послужила фундаментальная работа [1], в которой, в частности, была впервые поставлена и решена задача о максимуме произведения конформных радиусов двух непересекающихся односвязных областей. Г. М. Голузин в работе [2] обобщил данную задачу на случай произвольного конечного числа взаимно непересекающихся областей и получил ее полное решение для случая трех областей. Среди дальнейших работ по данной тематике отметим, например, [3-8].

Задача, которую мы рассматриваем в данной работе, была сформулирована в работе [5].

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{C}$ – множества натуральных и комплексных чисел соответствено, B – область в $\mathbb{C}$, $a \in B$ – точка области B, $r(B, a)$ – внутренний радиус области B в точке a (см., напр. [5-8]).

Задача 1. Доказать, что максимум функционала

$$I_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, a_0) \cdot \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \tag{1}$$

где B_0, B_1, $B_2, \ldots, B_n$, $(n \geq 2)$ – попарно неналегающие области в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$ и $\gamma \leq n$, достигается для некоторой конфигурации областей, обладающей n-кратной симетрией.

На данный момент задача 1 полностью не решена, известно только ее решения для некоторых частных случаев. Так, решение задачи 1 при произвольном натуральном $n \geq 2$, но при условии $\gamma = 1$ было получено в работе [6]. В работе [9] был изучен случай $n \geq 2$ и $0 < \gamma < 1$. При произвольном $n \geq 5$ и при существенном ограничении на расположение точек a_k, а именно, что максимальный угол с вершинами $a_k; a_0; a_{k+1}$, $k = \overline{1, n}$, $a_{n+1} = a_1$, не превосходит $\frac{2\pi}{\sqrt{\gamma}}$, задача 1 была решена в работе [8]. В работе [7] задача 1 была впервые решена при всех $\gamma > 1$ и без дополнительных ограничений геометрического характера, но начиная с некоторого, заранее неизвестного номера n.

В данной работе мы исследуем случай $n = 5$. Отметим, что в [10] задача 1 была решена при $1 < \gamma \le 5^{\frac{1}{4}}$. Случаи $\gamma \le 5^{\frac{1}{3}}$ и $\gamma \le 5^{0.38}$ исследованы соответственно в работах [11] и [12].

2. Теоремы.

В данной работе получен следующий результат:

Теорема 1. *При $n = 5$ и $1 < \gamma \le 2.32$ справедливо неравенство*

$$r^{\gamma}(B_0, a_0) \cdot \prod_{k=1}^{5} r(B_k, a_k) \le r^{\gamma}(D_0, d_0) \cdot \prod_{k=1}^{5} r(D_k, d_k), \tag{2}$$

где B_0, B_1, B_2,...,B_5 - попарно неналегающие области в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $a_1 = 1$, $k = \overline{1,5}$, причем равенство достигается, например, при $a_k = d_k$, $B_k = D_k$, $k = \overline{0,5}$, где d_k, D_k, - соответственно полюса и круговые области квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(25-\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}dw^2. \tag{3}$$

Доказательство. Заметим, что, учитывая результаты работы [12], нам достаточно доказать теорему при $5^{0.38} < \gamma \le 2.32$.

Докажем сначала, что утверждение теоремы справедливо при $\gamma = 2.32$.

Найдем значение выражения

$$I_5^0(\gamma) = r^{\gamma}(D_0, d_0) \cdot \prod_{k=1}^{5} r(D_k, d_k),$$

где d_k, D_k, $k = \overline{0,5}$ – соответственно полюса и круговые области квадратичного дифференциала (3) при $\gamma = 2.32$. При доказательстве теоремы 5.2.3 [7] было получено следующее выражение:

$$I_n^0(\gamma) = \left(\frac{4}{n}\right)^n \cdot \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n+\frac{\gamma}{n}}} \cdot \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}.$$

При $n = 5$ получим:

$$I_5^0(\gamma) = \left(\frac{4}{5}\right)^5 \cdot \frac{\left(\frac{4\gamma}{25}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{25}\right)^{5+\frac{\gamma}{5}}} \cdot \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{5}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{5}}\right)^{2\sqrt{\gamma}}. \tag{4}$$

Непосредственным вычислением убеждаемся, что $I_5^0(2.32) > 0.051806$.

Найдем теперь некоторые ограничения на функционал (1) при $n = 5$, тоесть на $I_5(\gamma)$.

Согласно условию задачи, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,5}$. Допустим, не уменьшая общности, что

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_5 < 2\pi$$

Далее, определим числа α_k следующим образом:

$$\alpha_1 := \tfrac{1}{\pi} \cdot (\arg a_2 - \arg a_1), \alpha_2 := \tfrac{1}{\pi} \cdot (\arg a_3 - \arg a_2) \ldots \alpha_5 := \tfrac{1}{\pi} \cdot (2\pi - \arg a_5)$$

Как мы отмечали выше, в работе [8] задача 1 была решена при условиях, что $n \geq 5$ и $\alpha_k\sqrt{\gamma} \leq 2$. При $n = 5$ нам остается рассмотреть задачу 1 при условии $\alpha_0\sqrt{\gamma} > 2$, где $\alpha_0 = \max\limits_k \alpha_k$. Все дальнейшие рассуждения будем проводить именно при $\alpha_0 > \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$.

Выполним следующие преобразования:

$$I_5(\gamma) = r^\gamma(B_0, a_0) \cdot \prod_{k=1}^{5} r(B_k, a_k) =$$

$$= \left(\prod_{k=1}^{5} (r(B_0, a_0) \cdot r(B_k, a_k) \cdot r(B_{k+1}, a_{k+1}) \right)^{\frac{\gamma}{5}} \cdot \left(\prod_{k=1}^{5} r(B_k, a_k) \right)^{1-\frac{2\gamma}{5}},$$

где $B_6 := B_1$, $a_6 := a_1$ и, соответственно, $r(B_6, a_6) = r(B_1, a_1)$.

Согласно теореме Голузина [2, с. 165]

$$\begin{aligned} r(B_0, a_0) \cdot r(B_k, a_k) \cdot r(B_{k+1}, a_{k+1}) &\leq \frac{64}{81\sqrt{3}} \cdot |a_k - a_0| \cdot |a_{k+1} - a_0| \cdot |a_{k+1} - a_k| = \\ &= \frac{64}{81\sqrt{3}} \cdot |a_{k+1} - a_k|. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left(\prod_{k=1}^{5} (r(B_0, a_0) \cdot r(B_k, a_k) \cdot r(B_{k+1}, a_{k+1}) \right)^{\frac{\gamma}{5}} \leq \left(\frac{64}{81\sqrt{3}} \right)^{\gamma} \left(\prod_{k=1}^{5} |a_{k+1} - a_k| \right)^{\frac{\gamma}{5}}.$$

Максимум данного выражения по всевозможным конфигурациям точек a_k, $k = \overline{1;5}$, которые удовлетворяют условиям теоремы 1 не будет превышать следующего выражения:

$$\left(\prod_{k=1}^{5} (r(B_0, a_0) \cdot r(B_k, a_k) \cdot r(B_{k+1}, a_{k+1}) \right)^{\frac{\gamma}{5}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{64}{81\sqrt{3}} \right)^{\gamma} \left(2 \sin \left(\frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right) \right) \right)^{\frac{4\gamma}{5}} \left(2 \sin \pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right) \right)^{\frac{\gamma}{5}}, \qquad (5)$$

которое соответствует случаю $\alpha_0 = \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$, а все остальные α_k равны между собой и равны $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)$.

Оценим теперь выражение $\left(\prod\limits_{k=1}^{5} r(B_k, a_k)\right)^{1-\frac{2\gamma}{5}}$. Учитывая результат теоремы 5.1.1 [7], получим следующую цепочку неравенств:

$$\left(\prod_{k=1}^{5} r(B_k, a_k)\right)^{1-\frac{2\gamma}{5}} \leqslant \left[2^5 \prod_{k=1}^{5} \alpha_k\right]^{1-\frac{2\gamma}{5}} \leqslant \left[2^5 \alpha_0 \left(\frac{2-\alpha_0}{4}\right)^4\right]^{1-\frac{2\gamma}{5}} =$$

$$= \left[\frac{1}{8}\alpha_0 (2-\alpha_0)^4\right]^{1-\frac{2\gamma}{5}}.$$

А поскольку $\alpha_0 > \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$, то

$$\left(\prod_{k=1}^{5} r(B_k, a_k)\right)^{1-\frac{2\gamma}{5}} < \left[\frac{1}{4\sqrt{\gamma}} \cdot \left(2 - \frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^4\right]^{1-\frac{2\gamma}{5}}. \qquad (6)$$

Учитывая (5) и (6), получим следующее неравенство:

$$I_5(\gamma) < \left(\frac{64}{81\sqrt{3}}\right)^{\gamma} \left(2\sin\left(\frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)\right)\right)^{\frac{4\gamma}{5}} \times$$

$$\times \left(2\sin\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)\right)^{\frac{\gamma}{5}} \cdot \left[\frac{1}{4\sqrt{\gamma}} \cdot \left(2 - \frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^4\right]^{1-\frac{2\gamma}{5}} = J_5(\gamma).$$

При $\gamma = 2.32$ выражение $J_5(\gamma) \leq 0.051562$.

Таким образом, для произвольной конфигурации областей B_k и точек a_k, $k = \overline{0;5}$, для которых выполняются все условия теоремы 1 и условие $\alpha_0 > \frac{2}{\sqrt{\gamma}}$, имеют место неравенства:

$$I_5(2.32) < 0.051562 < 0.051806 < I_5^0(2.32).$$

А это значит, что при $\gamma = 2.32$ и для произвольной конфигурации областей B_k и точек a_k, $k = \overline{0;5}$, для которых выполняются все условия теоремы 1, выполняется неравенство (2).

Для $\gamma = 2.32$ теорема доказана.

Пусть теперь $1 < \gamma < 2.32$.

Заметим, что функция $J_5(\gamma)$ монотонно возростает по γ на промежутке $(1; 2.32]$. Таким образом, для произвольного $\gamma \in (1; 2.32)$ выполняется неравенство:

$$I_5(\gamma) < J_5(\gamma) < J_5(2.32).$$

Исследуем функцию $I_5^0(\gamma)$ (4).

$$(I_5^0(\gamma))' = I_5^0(\gamma)\left(\frac{1}{5}\ln\left(\frac{4\gamma}{25-\gamma}\right) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\ln\left(\frac{5-\sqrt{\gamma}}{5+\sqrt{\gamma}}\right)\right).$$

При $\gamma \in (1; 2.32)$ оба слагаемых в скобках отрицательны, а значит $(I_5^0(\gamma))' < 0$. Таким образом, для произвольного $\gamma \in (1; 2.32)$ выполняется неравенство:

$$I_5^0(\gamma) > I_5^0(2.32).$$

А значит при $\gamma \in (1; 2.32)$ выполняется неравенство $I_5(\gamma) < I_5^0(\gamma)$ для произвольной конфигурации областей B_k и точек a_k, $k = \overline{0; 5}$, для которых выполняются все условия теоремы 1.

Теорема доказана полностью. □

1. *Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934.– Т. 5.– С. 159-245.
2. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М: Наука, 1966. – 628 с.
3. *Колбина Л. И.* Конформное отображение единичного круга на неналегающие области // Вестник Ленинградского ун-та. – 1955. – Т. 5. – С. 37-43.
4. *Бахтина Г. П.* Вариационные методы и квадратичные дифференциалы в задачах о неналегающих областях: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1975. – 11 с.
5. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменною // Успехи мат. наук. – 1994. – Т. 49, № 1 (295). – С. 3-76.
6. *Дубинин В. Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – Т. 168. – С. 48-66.
7. *Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Праці ін-ту мат-ки НАН Укр. – 2008. – Т. 73. – 308 с.
8. *Ковалев Л. В.* К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности // Дальневосточный матем. сборник. – 1996. – Т. 2. – С. 96-98.
9. *Кузьмина Г. В.* Метод экстремальной метрики в задачах о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей при наличии свободных параметров // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2003. – Т. 302. – С. 52-67.
10. *Заболотний Я.В.* Деякі екстремальні задачі геометричної теорії функцій // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. - К.: Ін-т матем. НАН України, 2011. – Т. 8, № 1. – С. 88-97.
11. *Денега И.В.* Квадратичные дифференциалы и разделяющее преобразование в экстремальных задачах о неналегающих областях // Доп. НАН України. – 2012. – № 4. – С. 15-19.
12. *Бахтин А.К., Денега И.В.* Об одной проблеме В.Н. Дубинина. Комплексний аналіз, теорія потенціалу і застосування // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. – К.: Ін-т матем. НАН України, 2013. – Т.10, № 4-5. – С. 401-411.

A. K. Bakhtin, Ya. V. Zabolotniy

On a particular case of the well-known problem of V.N. Dubinin.

In this paper we consider the well-known problem of V.N. Dubinin on non-overlapping domains and find its solution for $n = 5$ and $1 < \gamma \leq 2.32$.

Keywords: *non-overlapping domains, inner radius, quadratic differential.*

О. К. Бахтін, Я. В. Заболотний

Про один частковий випадок відомої проблеми В.М. Дубініна.

В даній роботі розглядається відома проблема В. М. Дубініна про неперетинні області комплексної площини і знайдено її розв'язок для $n = 5$ і $1 < \gamma \leq 2.32$.

Ключові слова: *неперетинні області, внутрішній радіус, квадратичний диференціал.*

Ин-т математики НАН Украины, Киев
Получено 30.11.15
alexander.bahtin@yandex.ua, yaroslavzabolotnii@mail.ru