

УДК 622+536.12:517.956.4

И.Р. Венгеров, А.Н. Молчанов, А.А. Камчатный

## АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ МЕТАНА В НЕОДНОРОДНЫХ УГОЛЬНЫХ ПЛАСТАХ

Институт физики горных процессов НАН Украины

*Приведен метод математического моделирования фильтрации десорбирующего метана в неоднородных пластах для частных случаев с использованием приближённого аналитического решения задач фильтрации метана при помощи двухслойных моделей-модулей.*

**Ключевые слова:** математическое моделирование, десорбция и фильтрация метана, поля давления метана, дебит метана, краевые задачи и ординарные модели метановыделения.

### Введение

Дальнейшее совершенствование технологии угледобычи и охраны труда горнорабочих, разработка перспективных методов газодобычи из глубинных пластов-коллекторов требуют совершенствования методов математического моделирования массопереноса (фильтрации метана в угольных пластах в частности). Усложняющими моделирование факторами являются неоднородность и нестационарность пластовых систем, нестационарность и нелинейность процессов фильтрации, сопровождающихся различными физико-химическими процессами (десорбция, активируемая диффузия, химические реакции). Обобщение фундаментальных исследований, проведённых в ИФГП НАН Украины, осуществлено в [1–4] и других работах. Вместе с экспериментальными методами современной микрофизики [3, 4] развиваются, дополняя их, классические макроскопические методы математического моделирования процессов массопереноса (фильтрации метана в угольных шахтах, в частности) [5–10].

Структурируя исследуемые математические модели метаноотдачи угольных пластов, можно представить их схемой (рис. 1).

Системно-иерархический подход к математическому моделированию процессов фильтрации метана позволяет охватить большое количество практических задач расчета метаноотдачи угольных пластов на основе сравнительно небольшого количества моделей-модулей и ординарных моделей. Вытекающие из запросов практики задачи расчета метаноотдачи пластов в различных ситуациях рассматриваются с единых позиций – «монтажа» их из

более простых «моделей-модулей» – краевых задач фильтрации в двухслойных системах.

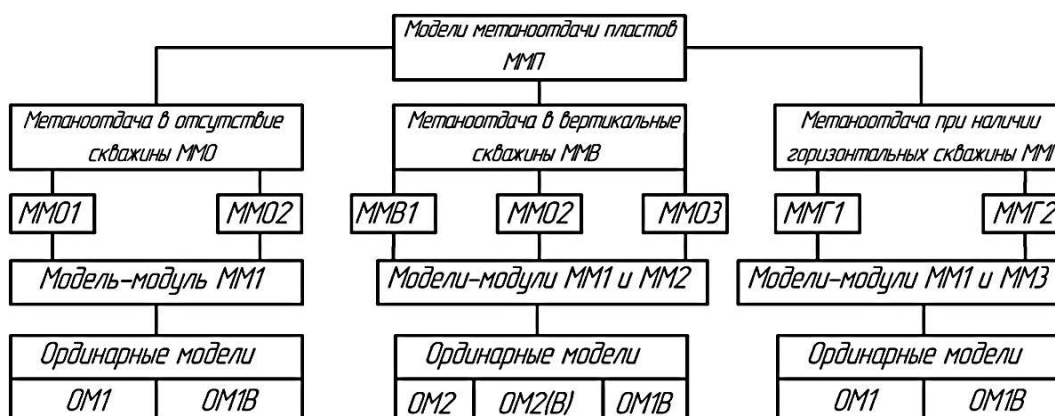


Рис. 1. Схема иерархии математических моделей

Модели-модули, в свою очередь, «комплекуются» из обыкновенных краевых задач – достаточно простых одномерных и двумерных моделей фильтрации в каждой из двух зон массива. Обыкновенные (базисные) модели рассматривались ранее [1, 9, 10], в настоящей работе приводятся математические модели, описывающие процесс метанопереноса в частных случаях (модели-модули ММ1 и ММ2). Целью является математическое моделирование фильтрации метана «полного цикла»: формулировка моделей, нахождение исходных данных – численных значений всех параметров и численная реализация моделей – получение пригодных для последующего анализа графиков, отображающих динамику полей давлений и дебитов метана.

### Модель-модуль ММ1 (система двух плоских слоёв)

Модель описывает фильтрацию метана в двухслойной системе  $\{\Omega_1^{(1)}, \Omega_2^{(1)}\}$  где  $\Omega_1^{(1)}$  – экзогенная зона с переменными параметрами, для которой имеется модель ОМ1 (а также – вспомогательная – ОМ1(В), которая используется в случае отсутствия эндогенной зоны). Для эндогенной зоны – области  $\Omega_2^{(1)}$  – имеем две различные модели – для граничных условий первого рода на внешней границе зоны ( $\tilde{z} = \Delta l_z$ ) – модель-аппроксимация (нормальный режим) U-поля, для однородных граничных условий второго рода на той же границе (режим истощения) – модель ОМ1<sup>+</sup>(В).

Главным этапом построения двухслойных моделей по методу функций склейки является определение функций склейки  $\tilde{\mu}_U(t) = \tilde{U}_1^{(+)}(t) = \tilde{U}_2^{(-)}(t)$ . Решение осуществляется на основе уравнения непрерывности U-потока на границе между слоями ( $z = l_{1,z}, \tilde{z} = 0$ ):

$$\frac{\partial \tilde{U}_1}{\partial z} \Big|_{z=l_{1,z}} = \frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=0}, \quad t > 0. \quad (1)$$

В зависимости от вида режима фильтрации в (1) необходимо подставлять различные функции  $\tilde{U}_1(z, t)$  и  $\tilde{U}_2(z, t)$ . Рассмотрим характеристики 2-го и 3-го режимов – нормального и истощения (1-й режим – интенсивной метаноотдачи – локализован в экзогенной зоне  $\Omega_1^{(1)}$  и длится непродолжительное время – до подхода гипобарического фронта к границе зоны  $z = l_{1,z}$ ).

При нормальном режиме фильтрации (продолжающееся от  $t=t_1$  до  $t=t_2$ ), гипобарическая зона расширяется, её фронт движется по области  $\Omega_2^{(1)}$ , достигая границы её ( $\tilde{z} = \Delta l_z$ ) в момент  $t=t_2$ . В период  $t \in (t_1, t_2)$  в области  $\Omega_1^{(1)}$  имеем  $U$ -поле, описываемое моделью ОМ1.

В этот же период времени в области  $\Omega_2^{(1)}$   $U$ -поле описывается аппроксимацией полей  $\tilde{U}_2(\tilde{z}, t)$  и  $\tilde{U}_1(r, t)$ . Используя условие (1) и применив преобразование Лапласа при  $\tilde{U}_1^{(-)}(t) = \Theta_+(t)U_0$ ,  $\tilde{U}_1^{(+)}(t) = \tilde{\mu}_U(t)$ , получим:

$$\bar{U}_1(z, p) = \frac{U_0}{p} + \left[ \bar{\mu}_U(p) - \frac{U_0}{p} \right] \left[ \frac{\exp(k_z \tilde{z}) - 1}{\exp(k_z) - 1} \right] + 5p\psi_1(z)\bar{E}_1(p) \left\{ \left( \frac{U_\infty}{p} - \frac{U_0}{p} \right) - B_1(k_z)\bar{\mu}_U(p) \right\} \quad (2)$$

В (2) кроме указанных переобозначений осуществлено упрощение: отброшен малый член  $B_1 U_0$ , поскольку:

$$\frac{B_1 U_0}{U_\infty - U_0} \ll 1. \quad (3)$$

$U$ -поток  $\bar{q}_{Uz}(l_{1,z}, p) = \left( \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial z} \right)_{z=l_{1,z}}$  будет, согласно (2):

$$\bar{q}_{U,1}(l_{1,z}, p) = k_z \left( \frac{\bar{\mu}_U(p) \frac{U_0}{p}}{l_{1,z}} - \frac{5p\bar{E}_1(p)}{l_{1,z}} \left[ \left( \frac{U_\infty}{p} - \frac{U_0}{p} \right) - B_1(k_z)\bar{\mu}_U(p) \right] \right). \quad (4)$$

Находим  $U$ -поток  $\bar{q}_{U2}(0, p) = \left( \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial \tilde{z}} \right)_{\tilde{z}=0}$ :

$$\bar{q}_{U2}(0, p) = 2 \left( \frac{\frac{U_\infty}{p} \bar{\mu}_U(p)}{\Delta l_z} \right). \quad (5)$$

Приравнявая, согласно (1) и (5), находим:

$$\bar{\mu}_U(p) = \frac{A_1}{p + \beta_1} + \frac{1}{p} \frac{D_1}{p + \beta_1}, \quad (6)$$

где:

$$A_1 = U_0 + (U_\infty - U_0)\Gamma_1, \quad D_1 = \beta_1[U_0 + (U_\infty - U_0)g_1], \quad (7)$$

$$\beta_1 = \alpha_1 \Gamma_0, \Gamma_0 = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2 + 1}, \alpha_1 = 10 \frac{a_{l_1}}{l_{1,z}^2}, \gamma_1 = \frac{2 l_{1,z}}{k_z \Delta l_z}, \gamma_2 = \frac{5}{k_z}, \quad (8)$$

$$\Gamma_1 = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{1 + \gamma_1 + B_1 \gamma_2}, g_1 = \frac{\gamma_1}{1 + \gamma_1}. \quad (9)$$

Обратное преобразование Лапласа в (6) приводит к выражению для функции склейки в нормальном режиме  $\tilde{\mu}_U^{(N)}(t)$ :

$$\tilde{\mu}_U^{(N)}(t) = \theta_+(t)[U_0 + (U_\infty - U_0)(g_1 + (\Gamma_1 - g_1) \exp(-\beta_1 t))]; t \in (t_1, t_2) \quad (10)$$

Численные оценки в (10) при  $k_z = 4,6$ ,  $l_{1,z} = \Delta l_z$ ,  $\beta_1 = 0,1$  дают для асимптотических значений  $\tilde{\mu}_U(0)$  и  $\tilde{\mu}_{U,S} \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_U(t)$ :

$$\tilde{\mu}_U(0) = \tilde{\mu}_{U,0} = 0,95U_\infty + 0,05U_0; \tilde{\mu}_{U,S} = 0,3U_\infty + 0,7U_0.$$

Определим  $U$ -поток к границе обнажения  $z=0$ , где положим  $\bar{U}_1^{(-)}(p) = \frac{U_0}{p}$ ,  $\bar{U}_1^{(+)}(p) = \bar{\mu}_U(p)$ :

$$\begin{aligned} \bar{q}_U(0, p) &= \left( \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial z} \right)_{z=0} = \left( \frac{\bar{\mu}_U^{(N)}(p) - \frac{U_0}{p}}{l_{1,z}} \right) + \\ &+ \frac{5\bar{E}_1(p)}{l_{1,z}} \left[ (U_\infty - U_0) - B_1(k_z) \bar{\mu}_U^{(N)} \left( \frac{k_z}{\exp(k_z)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

В (11) подставим (6) и получим выражение для последнего слагаемого в (11) в виде:

$$\begin{aligned} \bar{q}_U^{(3)}(0, p) &= - \frac{5B_1(k_z)}{l_{1,z}} \left( p \bar{E}_1(p) \bar{\mu}_U^{(N)}(p) \right) = \\ &= - \frac{5B_1(k_z)}{l_{1,z}} \left( \frac{1}{p + \alpha_1} \right) \left( \frac{A_1 p}{p + \beta_1} + \frac{D_1}{p + \beta_1} \right) = \\ &= \frac{5B_1(k_z)}{l_{1,z}} \left[ \frac{C_1}{p + \alpha_1} - \frac{C_2}{p + \beta_1} + \frac{D_{11}}{p + \alpha_1} - \frac{D_{12}}{p + \beta_1} \right], \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$C_1 = \frac{\alpha_1 A_1}{\alpha_1 - \beta_1}, C_2 = \frac{\beta_1 A_1}{\alpha_1 - \beta_1}, D_{11} = D_{12} = - \frac{D_1}{\alpha_1 - \beta_1}. \quad (13)$$

Окончательно (12) принимает вид:

$$\bar{q}_U^{(3)}(0, p) = \frac{5B_1}{l_{1,z}} \left( \frac{N_1}{p + \beta_1} - \frac{N_1 + A_1}{p + \alpha_1} \right), N_1 = (\gamma_1 + \gamma_2)(\Gamma_1 - g_1)(U_\infty - U_0). \quad (14)$$

После обратного преобразования Лапласа в (14) и в первых слагаемых (11), окончательно получаем функцию-оригинал  $\tilde{q}_U^{(N)}(0, t)$  ((N) – нормальный режим):

$$\tilde{q}_U^{(N)}(0, t) = \left( \frac{U_\infty - U_0}{l_{1,z}} \right) \times \left[ \frac{k_z g_1}{\exp(k_z)} + (\Gamma_1 - g_1) \left( \frac{k_z}{\exp(k_z)} + 5(\gamma_1 + \gamma_2) B_1 \right) \exp(-\beta_1 t) + 5(1 - B_1 \Gamma_1 - (\gamma_1 + \gamma_2) B_1 (\Gamma_1 - g_1)) \exp(-\alpha_1 t) \right], \quad t \in [t_1, t_2]. \quad (15)$$

Выражением (15) даётся  $U$ -поток к поверхности обнажения  $z=0$  в модели-модуле ММ1 в нормальном режиме фильтрации, временные рамки которого, как уже говорилось, конечны:  $t \in [t_1, t_2]$ . Поскольку  $t_1$ -начальное время нам известно, оценим значение  $t_2$ .

**Верхняя временная граница нормального режима**  $t_2$  может быть найдена, исходя из следующих соображений. Рассмотрим два варианта нормального режима: 1) угольный пласт можно считать неограниченным, а общее время процесса метаноотдачи (метанового дренирования пласта)  $t_d$  – заданным; 2) угольный пласт (а с ним – и эндогенная область  $\Omega_2^{(1)}$ ) ограничены, т.е. заданной величиной является  $\Delta l_z$ .

В первом варианте ширина гипобарической зоны при  $t = t_d$  совпадает с шириной эндогенной зоны  $\Delta l_z$ :

$$\delta_3^{(2)}(t)|_{t=t_d} = 3\sqrt{a_\infty(t_d - t_1)} = \Delta l_z. \quad (16)$$

Формула (16) позволяет: а) найти  $\Delta l_z$  по  $t_d$ ; б) принять, что  $t_2 = t_d$ , поскольку при  $t > t_d$ ,  $\delta_3^{(2)}(t) > \Delta l_z$ , т.е.  $U$ -поле на границе эндогенной зоны  $\tilde{z} = \Delta l_z$  начинает убывать, что означает переход в режим истощения фильтрации. Т.о, в первом варианте  $t_2 = t_d$ , а режима истощения нет. Весь процесс фильтрации при  $t \in (0, t_d)$  проходит в 2-х режимах: интенсивной метаноотдачи ( $t \in (0, t_1)$ ) и нормальной метаноотдачи ( $t \in (t_1, t_d)$ ).

Во втором варианте дело обстоит сложнее. Задание параметра  $\Delta l_z$  означает, что момент времени  $t = t_2$  (который надо подставить в (16) вместо  $t_d$ ) определяется зависимостью:

$$t_2 = t_1 + \frac{\Delta l_z^2}{9a_\infty}. \quad (17)$$

При  $t = t_2$ , найденном по (17), в интервале  $t \in (t_1, t_2)$  идёт нормальный режим, общая продолжительность которого  $\Delta t^{(N)} = t_1 - t_2 = \frac{\Delta l_z^2}{9a_\infty}$ . При этом формулы (10) и (15) остаются в силе. Однако может оказаться (при малых

$\Delta l_z$ ), что полученное по (17) значение  $t = t_2$  невелико, процесс метаноотдачи не завершен и должен быть продолжен до момента времени  $t = \tilde{t}_d > t_2$ .

**Режим истощения** начинается в этом случае при  $t > t_2$ . Ни (10), ни (15) не будут теперь правомочны. В этом режиме в области  $\Omega_2^{(1)}$  корректное описание фильтрации даёт не аппроксимация  $U$ -поля (как в нормальном режиме), а модель  $OM1^+(B)$ .

Чтобы найти выражение для  $U$ -потока на поверхности обнажения ( $z=0$ ) в режиме истощения  $\tilde{q}_U^{(I)}(0, t)$ , необходимо для этого режима найти функцию склейки  $\tilde{\mu}_U^{(I)}(t)$ . Последнее возможно, если приравнять  $\bar{q}_{U,2}(0, p)$  к  $U$ -потoku, найденному как  $\left(\frac{\partial \bar{U}_1}{\partial z}\right)_{z=l_{1,z}}$ . Если это попытаться сделать непосредственно, используя общие выражения для  $U$ -потока из моделей  $OM1$  и  $OM^+(B)$ , то получим весьма громоздкое выражение для  $\tilde{\mu}_U^{(I)}(p)$  и большие сложности с определением обратного преобразования Лапласа.

Есть обходной путь преодоления этих трудностей – использование не общего решения краевой задачи в  $OM1$ , а его редукции – квазистационарного приближения решения, сводящегося к выражению для граничной функции  $\bar{M}_1(z, p)$ . Определим условия, допускающие такую редукцию. Ранее установлено, что при медленно меняющейся (что характерно для квазистационарного приближения) функции  $\tilde{\mu}_U^{(I)}(t)$ , член с  $\tilde{E}_1(t)$ , в котором явно содержится время, можно отбросить при  $t \geq t_s$ , где  $t_s$  – начало квазистационарной стадии, для которой  $\tilde{E}_1(t_s) \leq 0,05\tilde{E}_1(0) = 0,05$ . Поскольку из условия  $\tilde{E}_1(t_s) = \exp\left(-10 \frac{a_{1,l}t_s}{l_{1,z}^2}\right) \leq 0,05$  следует:

$$Fo_{l,s} = \frac{a_{1,l}t_s}{l_{1,z}^2} = 0,3, \quad t_s = \frac{0,3l_{1,z}^2}{a_{1,l}}, \quad (18)$$

для  $t \geq t_s$ , по (18) можно записать:

$$\tilde{q}_{U,1}^{(I)}(l_{1,z}, p) \simeq k_z \left( \frac{\bar{\mu}_U^{(I)}(p) - \frac{U_0}{p}}{l_{1,z}} \right). \quad (19)$$

Теперь из условия склейки потоков

$$\tilde{q}_{U,1}^{(I)}(l_{1,z}, p) = \tilde{q}_{U,0}^{(I)}(\tilde{z}, p)|_{\tilde{z}=0} = 2,5 \left( \frac{U_\infty - p\bar{\mu}_U^{(I)}(p)}{\Delta l_z} \right) \bar{E}_{1+}^{(2)}(p), \quad (20)$$

где правая часть равенства соответствует модели  $OM1^+(B)$ , получим выражение для Лаплас-трансформанты функции склейки при режиме истощения:

$$\bar{\mu}_U^{(I)}(p) = \frac{\frac{k_z U_0 + 2,5}{l_{1,z} p + \Delta l_z} U_\infty \bar{E}_{1+}^{(2)}(p)}{\frac{k_z + 2,5}{l_{1,z} + \Delta l_z} p \bar{E}_{1+}^{(2)}(p)}. \quad (21)$$

Поскольку выражение (21) приводится к виду:

$$\bar{\mu}_U^{(I)}(p) = \left( \frac{U_0 + h U_\infty}{1+h} \right) \left( \frac{1}{p + 2,5 \frac{\tilde{a}_\infty}{\Delta l_z^2}} \right) + U_0 2,5 \frac{\tilde{a}_\infty}{\Delta l_z^2} \frac{1}{p} \left( \frac{1}{p + 2,5 \frac{\tilde{a}_\infty}{\Delta l_z^2}} \right), \quad (22)$$

обратное преобразование Лапласа в (22) будет иметь вид:

$$\bar{\mu}_U^{(I)}(t) = \Theta_+(t) \left[ U_0 + \frac{h}{1+h} (U_\infty - U_0) \exp\left(-2,5 \frac{\tilde{a}_\infty \tilde{t}}{\Delta l_z^2}\right) \right], t \geq t_s, \quad (23)$$

где

$$h = \frac{2,5 l_{1,z}}{k_z \Delta l_z}, \quad \tilde{a}_\infty = \frac{a_\infty}{1+h}. \quad (24)$$

$U$ -поток на поверхности обнажения в режиме истощения будет  $U$ -потокком при  $z=0$  в модели ОМ1 в квазистационарном приближении:

$$\bar{q}_{U,1}^{(I)}(0, p) = \frac{k_z}{\exp(k_z)} \left( \frac{\bar{\mu}_U^{(I)}(p) - U_0}{l_{1,z}} \right). \quad (25)$$

После обратного преобразования Лапласа в (25) и подстановки в эту формулу  $\tilde{\mu}_U^{(I)}(\tilde{t})$  из (22), получим:

$$\tilde{q}_{U,1}^{(I)}(0, \tilde{t}) = \frac{k_z}{\exp(k_z)} \left( \frac{U_\infty - U_0}{l_{1,z}} \right) \left( \frac{h}{1+h} \right) \exp\left(-2,5 \frac{\tilde{a}_\infty \tilde{t}}{\Delta l_z^2}\right), t \geq t_s. \quad (26)$$

В начале режима истощения, когда  $t = t_s$  из (26) следует:

$$\tilde{q}_{U,1}^{(I)}(0, t_s) = \frac{k_z}{\exp(k_z)} \left( \frac{U_\infty - U_0}{l_{1,z}} \right) \left( \frac{h}{1+h} \right) \exp(-2,5 F_{O_s}), F_{O_s} = \frac{\tilde{a}_\infty t_s}{\Delta l_z^2}. \quad (27)$$

Завершится режим истощения при таком значении  $t = t_\infty$ , когда  $U$ -поток на поверхности обнажения будет составлять 5% от начального (при  $t=0$ ) значения. Это условие формируется следующим образом:

$$\exp\left(-2,5 \frac{\tilde{a}_\infty t_\infty}{\Delta l_z^2}\right) = 0,05. \quad (28)$$

Если обозначить  $\frac{\tilde{a}_\infty t_\infty}{\Delta l_z^2} = Fo_\infty$ , то (29) будет выполняться при  $Fo_\infty \simeq 1,2$  или  $t_\infty = 1,2 \frac{\Delta l_z^2}{\tilde{a}_\infty}$ . Таким образом, продолжительность режима истощения:

$$\Delta t^{(I)} = t_n - t_s = 1,2 \frac{\Delta l_z^2}{\tilde{a}_\infty} - 0,3 \frac{l_{1,z}^2}{a_{1,l}}. \quad (29)$$

Предполагая, что режим истощения начинается с момента  $t = t_s$ , мы неявно допускали, что  $t_s \leq t_2$ . Если же оказывается, что  $t_s > t_2$ , то в интервале  $t \in [t_2, t_s]$  функции склейки нормального режима  $\tilde{\mu}_U^{(N)}(t)$  и режима истощения  $\tilde{\mu}_U^{(I)}(t)$  – неправомерны, поскольку в этот период времени  $\tilde{\mu}_U^{(N)}(t)$  уже не работает, а  $\tilde{\mu}_U^{(I)}(t)$  – ещё не работает. Наиболее простой путь преодоления этого затруднения – введение дополнительного, «постнормального» режима с продолжительностью  $\Delta t^{(pN)}$ :

$$\Delta t^{(pN)} = t_s - t_2 = \frac{0,3 l_{1,z}^2}{a_{1,l}} - \frac{\Delta l_z^2}{9 \tilde{a}_\infty} - \frac{0,16 l_{1,z}^2}{a_{1,l}^{(2)}}. \quad (30)$$

В начале постнормального режима, при  $t = t_2$ , имеем значение функции склейки  $\tilde{\mu}_U^{(N)}(t_2)$  (см. (10)):

$$\tilde{\mu}_U^{(N)}(t_2) = \Theta_+(t) [U_0 + (U_\infty - U_0)(g_1 + (\Gamma_1 - g_1) \exp(-\beta_1 t_2))]. \quad (31)$$

В конце этого режима, т.е. в начале режима истощения, при  $t = t_s$ , функция склейки будет иметь значение  $\tilde{\mu}_U^{(I)}(t_s)$  (см. (23)):

$$\tilde{\mu}_U^{(I)}(t_s) = \Theta_+(t) \left[ U_0 + \frac{h}{1+h} (U_\infty - U_0) \exp\left(-2,5 \frac{\tilde{a}_\infty t}{\Delta l_z^2}\right) \right] \quad (32)$$

Поскольку промежуток времени  $\Delta t^{(pN)}$ , как видно из (30), не может оказаться большим, предположим, что в этом промежутке функция склейки постнормального режима  $\tilde{\mu}_U^{(pN)}(t)$  может быть найдена путём линейной аппроксимации вида:

$$\tilde{\mu}_U^{(pN)}(t) = \tilde{\mu}_U^{(N)}(t_2) - \left[ \tilde{\mu}_U^{(N)}(t_2) - \tilde{\mu}_U^{(N)}(t_s) \right] \left( \frac{t-t_2}{\Delta t^{(pN)}} \right), t \in [t_2, t_s]. \quad (33)$$

Соответственно  $U$ -поток при  $z=0$  (на поверхности обнажения) в период протекания постнормального режима, будет (см. (25)) равен:

$$\tilde{q}_{U,1}^{(pN)}(0, t) = \frac{k_z}{\exp(k_z)} \left( \frac{\tilde{\mu}_U^{(pN)}(t) - U_0}{l_{1,z}} \right), t \in [t_2, t_s]. \quad (34)$$



**Модель-модуль ММ2 (система двух фильтрующих слоёв)**

Модель-модуль ММ2 аналогична ММ1. Интенсивный режим фильтрации в экзогенной области  $\Omega_1^{(2)} = \{r \in (0, t_1^{(2)})\}$  завершится при  $t = t_1^{(2)}$ . В этот период ( $t \in (0, t_1^{(2)})$ )  $U$ -поток на границе обнажения  $\bar{U}_1^{(+)}(p) = \frac{U_\infty}{p}$ , а  $\bar{U}_1^{(-)}(p) = \frac{U_0}{p}$ .

При нормальном режиме фильтрации ( $t \in (0, t_1^{(2)})$ ) гипобарический фронт движется по эндогенной зоне  $\Omega_2^{(2)} = \{r \in (r_1, r_2)\}$ , достигая её границы  $r = r_2$  в момент времени  $t = t_2^{(2)}$ . В этот же период времени  $U$ -поток на границе  $r = r_1$  между  $\Omega_1^{(2)}$  и  $\Omega_2^{(2)}$  выражается формулой:

$$\bar{q}_{U,2}^{(-)}(p) = \bar{q}_{U,2}(r_1, p) = 2 \left( \frac{\frac{U_\infty}{p} - \bar{\mu}_U^{(N)}(p)}{\Delta r_1} \right), \quad (35)$$

где  $\bar{\mu}_U^{(N)}(p)$ - функция склейки при нормальном режиме, определяемая из условия непрерывности на границе  $r = r_1$   $U$ -потока-аналога (1). Из этого условия получаем (выкладки, аналогичные изложенным выше, опускаем):

$$\tilde{\mu}_U^{(N)}(t) = \Theta_+(t)[U_0 + (U_\infty - U_0)(g_2 + (\Gamma_2 - g_2) \exp(-\beta_2 t))], \quad t \in (t_1^{(2)}, t_2^{(2)}) \quad (36)$$

Подстановка функции склейки (36) в выражение для  $U$ -потока на поверхности обнажения  $r = r_0$  из ОМ2 даёт:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{U,1}^{(N)}(r_0, t) = & \left( \frac{U_\infty - U_0}{\Delta r_1} \right) \left\{ (1 + M_\beta)^{-1} g_2 \right. \\ & + (\Gamma_2 - g_2) \left[ (1 + M_\beta)^{-1} + 5B_2(\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2) \right] \exp(-\beta_2 t) + \\ & \left. + 5[1 - B_2\Gamma_2 - (\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2)B_2(\Gamma_2 - g_2)] \exp(-\alpha_2 t) \right\}, \\ & t \in (t_1^{(2)}, t_2^{(2)}) \end{aligned} \quad (37)$$

В (36) и (37) обозначены:

$$\begin{aligned} g_2 = & \frac{\tilde{\gamma}_1}{1 + \tilde{\gamma}_1}, r_2 = \frac{\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2}{1 + \tilde{\gamma}_1 + B_2\tilde{\gamma}_2}, \beta_2 = \tilde{\gamma}\alpha_2, \tilde{\gamma} = \frac{\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2}{1 + \tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2}, \\ \alpha_2 = & 10 \left( \frac{a_{l,2}}{\Delta r_1^2} \right), \tilde{\gamma}_1 = 10(1 + M_\beta) \frac{\Delta r_1}{\Delta r_2} \exp(-k_r), \\ \tilde{\gamma}_2 = & 25(1 + M_\beta) \exp(-k_r), B_2 = \frac{0,56 + 0,19M_\beta}{1 + M_\beta} \end{aligned} \quad (38)$$

Выражения (36), (37) требуют для их корректного применения знания величины момента времени  $t = t_2^{(2)}$ . Его оценка учитывает наличие двух вариантов: 1) пласт угля можно считать неограниченным; 2) пласт является ограниченным.

**В первом варианте** задаётся максимальное время метанового дренажа пласта (метаноотдача пласта) –  $t = t_d$ , а ширина эндогенной зоны вычисляется:

$$\Delta r_2 = r_2 - r_1 = 3\sqrt{a_\infty(t_d - t_1^{(2)})}. \quad (39)$$

При этом можно принять, что  $t_2 = t_d$ , т.е. режим истощения отсутствует, и весь процесс метаноотдачи состоит из двух временных стадий – интенсивного и нормального режимов.

**Во втором варианте** ограниченность пласта формализуется заданием величины  $r_2(\Delta r_2)$ , а для  $t_2^{(2)}$  получаем, «обращая» (39) (предварительно заменив в ней  $t_d \rightarrow t_2^{(2)}$ ) выражения:

$$t_2^{(2)} = t_1^{(2)} + \frac{\Delta r_2^2}{9a_\infty}, \Delta t^{(N)} = t_2^{(2)} - t_1^{(2)} = \frac{\Delta r_2^2}{9a_\infty}. \quad (40)$$

В период времени  $t \in (t_1^{(2)}, t_2^{(2)})$ , где  $t_2^{(2)}$  дано (40), имеем нормальный режим фильтрации. Его завершение не означает, что метаноотдача из области  $\Omega_2^{(2)}$  исчерпана. Для её продолжения требуется продлить дренаж, т.е. перейти к третьему – режиму истощения в  $\Omega_2^{(2)}$ . Временные рамки этого режима  $t \in (t_1^{(2)}, t_\infty^{(2)})$ , где  $t_\infty^{(2)}$  – момент времени, к которому  $U$ -поток на поверхности обнажения уменьшится до величины, не превышающей 5% от первоначальной.

Здесь вновь имеют место два подварианта: 1)  $t_2^{(2)} \geq t_S^{(2)}$ ; 2)  $t_2^{(2)} < t_S^{(2)}$ , где  $t = t_S^{(2)}$  – момент времени, при котором в  $\Omega_1^{(2)}U_1$ -поле можно считать квазистационарным и использовать для  $\tilde{U}_1(r, t)$  и  $U$ -потоков на поверхности обнажения и на границе  $r = r_1$  упрощенные (редуцированные) выражения. В первом подварианте это обстоятельство позволяет в период режима истощения перейти для  $\tilde{U}_2(r, t)$  – аппроксимации к  $\tilde{U}_2(r, t)$  – режиму смешанной краевой задачи в области  $\Omega_2^{(2)}$  (т.е. модель  $OM2^+(B)$ ), что упрощает нахождение функции склейки в режиме истощения –  $\tilde{\mu}_U^{(I)}(t)$  и, соответственно,  $U$ -потока на поверхности обнажения.

Во втором подварианте, аналогично ММ1 вводим промежуточный между нормальным режимом и режимом истощения постнормальный режим. Поскольку  $t_S^{(2)} > t_2^{(2)}$ , постнормальный режим имеет продолжительность  $\Delta t^{(pN)} = t_S^{(2)} - t_2^{(2)}$  и при  $t = t_2^{(2)}$  изменится на режим истощения с длитель-

ностью  $\Delta t^{(i)} = t_{\infty}^{(2)} - t_S^{(2)}$ , где  $t_S^{(2)} = \tilde{t}_2^{(2)}$  – точная временная граница режима истощения. Рассмотрим подварианты 1) и 2).

При  $t_2^{(2)} \geq t_S^{(2)}$  в области  $\Omega_1^{(2)}$  к моменту  $t = t_2^{(2)}$  уже наступил квазистационарный режим, позволяющий использовать упрощенные выражения для  $U$ -потоков на границах экзогенной области  $\Omega_1^{(2)}$  ( $r = r_0$  и  $t = r_1$ ), которые имеют вид:

$$\tilde{q}_{U,1}(r_0, t) = (1 + M_{\beta})^{-1} \left( \frac{\tilde{\mu}_U^{(1)}(t) - U_0}{\Delta r_1} \right), t \in (t_2^{(2)}, t_{\infty}^{(2)}), \quad (41)$$

$$\tilde{q}_{U,1}(r_1, t) = \left( \frac{0,2k_r}{1 + M_{\beta}} \right) \left( \frac{\tilde{\mu}_U^{(1)}(t) - U_0}{\Delta r_1} \right), t \in (t_2^{(2)}, t_{\infty}^{(2)}), \quad (42)$$

Условием справедливости (41) и (42) является аналог (18):

$$Fo_{l,S}^{(2)} = \frac{a_{2,l} t_S^{(2)}}{\Delta r_1^2} = 0,3, \quad t_S^{(2)} = \frac{0,3 \Delta r_1^2}{a_{2,l}}, \quad (43)$$

$U$ -поток на границе  $r = r_1$  в модели OM2+(B) равен:

$$\bar{q}_{U,2}^{(-)}(r_1, p) = 2,34 \frac{\bar{E}_{2+}^{(2)}(p)}{\Delta r_2} \left( U_{\infty} - p \bar{\mu}_U^{(1)}(p) \right), \quad (44)$$

По условию непрерывности  $U$ -потока при  $r = r_1$  приравняем Лаплас-трансформанту (42) выражению (41) и находим  $\bar{\mu}_U^{(1)}(p)$ :

$$\bar{\mu}_U^{(1)}(p) = \frac{\left( \frac{0,2k_r}{1 + M_{\beta}} \frac{1}{\Delta r_1} \right) \frac{U_0}{p} + \left( 2,34 \frac{\bar{E}_{2+}^{(2)}(p)}{\Delta r_2} \right) U_{\infty}}{\left( \frac{0,2k_r}{1 + M_{\beta}} \frac{1}{\Delta r_1} \right) + \left( 2,34 \frac{\bar{E}_{2+}^{(2)}(p)}{\Delta r_2} \right)} \quad (45)$$

Поскольку  $\bar{E}_{2t}^{(2)}(p) = (p + 4,0 a_{\infty} / \Delta r_2^2)^{-1}$ , после некоторых преобразований и осуществления обратного преобразования Лапласа в (45), получим:

$$\bar{\mu}_U^{(1)}(p) = U_0 + \left( \frac{h^{(2)}}{1 + h^{(2)}} \right) (U_{\infty} - U_0) \exp \left( -4,0 \frac{\tilde{a}_{\infty}^{(2)} t}{\Delta r_2^2} \right), \quad t \in (t_2^{(2)}, t_{\infty}^{(2)}), \quad (46)$$

где

$$h^{(2)} = 11,7 \left( \frac{1 + M_{\beta}}{k_r} \right) \frac{\Delta r_1}{\Delta r_2}, \quad \tilde{a}_{\infty}^{(2)} = \frac{a_{\infty}}{1 + h^{(2)}}. \quad (47)$$

Выражение (46) полностью аналогично (23). Подставив (46) в (41), получим выражение для  $U$ -потока на поверхности обнажения  $r = r_0$  в режиме истощения фильтрации:

$$\tilde{q}_{U,1}(r_0, t) = (1 + M_\beta)^{-1} \left[ \frac{h^{(2)}}{1+h^{(2)}} (U_\infty - U_0) \exp\left(-4,0 \frac{\tilde{a}_\infty^{(2)} t}{\Delta r_2^2}\right) \right], t \in (t_2^{(2)}, t_\infty^{(2)}). \quad (48)$$

Режим истощения завершается при  $t = t_\infty^{(2)}$ , определяемом, как и в ММ1, из условия  $\exp\left(-4,0 \frac{\tilde{a}_\infty^{(2)} t}{\Delta r_2^2}\right) = 0,05$ , что даёт:

$$Fo_S^{(2)} = \frac{\tilde{a}_\infty^{(2)} t_\infty^{(2)}}{\Delta r_2^2} = 0,75, \quad t_\infty^{(2)} = 0,75 \frac{\Delta r_2^2}{\tilde{a}_\infty^{(2)}}. \quad (49)$$

Таким образом, в первом подварианте ( $t_2^{(2)} \geq t_S^{(2)}$ ), режим истощения является третьим, завершающим процесс метаноотдачи пласта, режимом, время завершения которого дано (49).

При  $t_2^{(2)} < t_S^{(2)}$ , после второго – нормального режима фильтрации начинается третий, промежуточный (постнормальный) режим, продолжительность которого  $\Delta t_2^{(pN)} = t_S^{(2)} - t_2^{(2)}$ . Аналогично тому, как это было осуществлено в ММ1, получаем аппроксимацию:

$$\tilde{\mu}_U^{(pN)}(t) = \tilde{\mu}_U^{(N)}(t_2^{(2)}) - \left[ \tilde{\mu}_U^{(N)}(t_2) - \tilde{\mu}_U^{(I)}(t_S^{(2)}) \right] \left( \frac{t - t_2^{(2)}}{\Delta t_2^{(pN)}} \right), t \in (t_2^{(2)}, t_\infty^{(2)}). \quad (50)$$

$U$ -поток на поверхности обнажения  $r = r_0$  в постнормальном режиме будет, согласно (41) равен:

$$\tilde{q}_{U,1}(r_0, t) = (1 + M_\beta)^{-1} \left( \frac{\tilde{\mu}_U^{(pN)}(t) - U_0}{\Delta r_1} \right), t \in (t_2^{(2)}, t_\infty^{(2)}). \quad (51)$$

Последний, четвёртый режим – режим истощения начинается при  $t = t_S^{(2)}$  и оканчивается при  $t = t_\infty^{(2)}$ . Описание этого режима уже дано ранее.

### Выводы

1. Получены аналитические решения задач фильтрации метана в моделях-модулях: ММ1 - система двух плоских слоёв и ММ2 - система двух фильтрующихся слоёв.

2. Полученные решения могут служить удобной базой для разработки различных инженерных расчетных методик, необходимых для совершенствования многих аспектов угле- и газодобычи подземным способом.

1. *Алексеев А.Д.* Физика угля и горных процессов / А.Д. Алексеев. – Киев: Наукова думка, 2010. – 424 с.
2. *Алексеев А.Д.* Диффузионно-фильтрационная модель выхода метана из угольного пласта / А.Д. Алексеев, Т.А. Василенко, К.В. Гуменник, Н.А. Калугина, Э.П. Фельдман – Журнал технической физики. – 2007. - т. 77, вып. 4. – С. 65–4.
3. *Молчанов А.Н.* Наукові основи оцінки стану, сорбційної кінетики та властивостей системи вугілля-вода-метан / А.Н. Молчанов – Автореф. ... д.т.н., Донецьк: ИФГП НАНУ, 2012. – 32 с.
4. *Василенко Т.А.* Сорбційні явища в системі вугілля-метан у різних термобаричних умовах / Т.А. Василенко. - Автореф. ... д.т.н., Харків, 2009. – 32 с.
5. *Колмаков В.А.* Метановыделение и борьба с ним в шахтах / В.А. Колмаков. – М.: Недра, 1981. – 134 с.
6. *Слесаренко А.П.* Приближенные решения нелинейных краевых задач десорбирующегося метана в неоднородных пластах угля / А.П. Слесаренко, И.Р. Венгеров. – Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2014. – №1/4 (69). Серия: Математика и кибернетика – прикладные аспекты. – С. 4– .
7. *Венгеров И.Р.* Теплофизика шахт и рудников. Математические модели / Монография в 2-х томах. – Том 1. Анализ парадигмы / И.Р. Венгеров. – Донецк: Норд-пресс, 2008. – 632 с.
8. *Венгеров И.Р.* Теплофизика шахт и рудников. Математические модели / Монография в 2-х томах. – Том 2. Базисные модели / И.Р. Венгеров – Донецк: Донбасс, 2012. – 684 с.
9. *Венгеров И.Р.* Математическое моделирование фильтрации десорбирующегося метана в неоднородных угольных пластах / И.Р. Венгеров, А.Н. Молчанов, А.А. Камчатный // Фізико-технічні проблеми горного виробництва. Сб. научн. трудов, вып. 17. – Донецк: ИФГП НАНУ. – 2014. - С. 27– 37.
10. *Венгеров И.Р.* Базисные модели метаноотдачи неоднородных угольных пластов / И.Р. Венгеров, А.Н. Молчанов, А.А. Камчатный // Форум гірників-2015. Матеріали міжнародної науково-технічної конференції. Дніпропетровськ, НГУ -2015. – С. 115–123.

*І.Р. Венгеров, О.М. Молчанов, О.А. Камчатний*

#### АНАЛІТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ ФІЛЬТРАЦІЇ МЕТАНУ В НЕОДНОРІДНИХ ВУГІЛЬНИХ ПЛАСТАХ

Наведено метод математичного моделювання фільтрації десорбуючого метану в неоднорідних пластах для окремих випадків з використанням наб-

лиженого аналітичного вирішення задач фільтрації метану за допомогою двошарових моделей-модулів.

**Ключові слова:** математичне моделювання, десорбція і фільтрація метану, поля тиску метану, дебіт метану, крайові задачі та ординарні моделі метано-виділення.

*I.R. Vengerov, O.M. Molchanov, A.A. Kamchatniy*

#### ANALYTICAL SOLUTIONS FOR METHANE FILTRATION PROBLEMS IN HETEROGENEOUS COAL SEAMS

The article presents the method of mathematical modeling of desorbing methane filtration in heterogeneous formations for particular cases with using the approximate analytical solutions of methane filtration problems using two-layer models-modules.

**Keywords:** mathematical modeling, the desorption and methane filtration, the fields of methane pressure, methane flow rate, boundary tasks and ordinary models of methane releasing from coal seams.