УДК 519.218.23+517.977.5
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2016.3.09

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫМИ ПРОЦЕССАМИ РОЖДЕНИЯ И ГИБЕЛИ

Н.В. АНДРЕЕВ, В.М. СТАТКЕВИЧ

Аннотация. Для неоднородных марковских процессов рождения и гибели в случае постоянного отношения c интенсивностей гибели и рождения решены три задачи управления выбором параметра c. Для задачи минимизации вероятности выхода процесса при $t \to +\infty$ из полосы при помощи метода золотого сечения найдены точки минимума в случае их наличия, зависящие от конкретных значений порога и интегральной интенсивности рождения. Для задачи управления выбором параметра c с учётом стабилизирующей функции найдено точку минимума и доказано условие её существования; рассмотрены важные частные случаи. К этой задаче примыкает задача идентификации параметров для стабилизирующей функции экспоненциального роста. Для задачи минимизации математического ожидания момента вырождения при малой вероятности превышения порога найдены условия сходимости математического ожидания, упрощены условия вероятности превышения порога, а сама задача решена в случае постоянной интенсивности рождения.

Ключевые слова: задача управления, задача стабилизации, неоднородный марковский процесс рождения и гибели, интенсивность рождения, интенсивность гибели, момент вырождения.

ВВЕДЕНИЕ

Ветвящиеся процессы являются математической моделью многих физических, биологических и социальных явлений, например, ливней космических лучей, электронно-фотонных каскадов, ядерных реакций, эволюции биологических популяций, распространения эпидемий и т.д. [1–10]. В работе рассматривается один из классов ветвящихся процессов, а именно неоднородные марковские процессы рождения и гибели (являющиеся частным случаем процессов рождения, иммиграции и гибели). Они встречаются, например, в теории массового обслуживания, в теории надёжности и т.д. Различным аспектам проблем управления такими процессами посвящены работы [11–16].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для неоднородного процесса рождения и гибели в случае постоянного отношения c интенсивностей гибели и рождения рассмотрим следующие задачи управления выбором параметра c:

1) задачу минимизации вероятности выхода процесса при $t \to \infty$ из полосы;

2) задачу управления с учётом стабилизирующей функции;

3) задачу минимизации математического ожидания момента вырождения процесса при малой вероятности превышения порога.

Эти задачи сформулированы в работе [6]. Указанное постоянное отношение c интенсивностей гибели и рождения возникает, например, при анализе процесса нуклеации ковкого чугуна [4, 5]. Подробнее про механизм и кинетику нуклеации из жидкой фазы изложено, например, в работе [17].

Пусть $\xi(t)$, $t \geq 0$ — неоднородный во времени процесс рождения и гибели. Это марковский процесс с состояниями $\{0,1,2,\ldots\}$, для которого из состояния $\xi(t) = n > 0$ возможны лишь переходы в состояния $n-1$ и $n+1$, причём

$$P\{\xi(t+\Delta t) = n+1 / \xi(t) = n\} = n\lambda(t)\Delta t + o(\Delta t),$$

$$P\{\xi(t+\Delta t) = n-1 / \xi(t) = n\} = n\mu(t)\Delta t + o(\Delta t),$$

$$P\{\xi(t+\Delta t) = n / \xi(t) = n\} = 1 - n(\lambda(t)+\mu(t))\Delta t + o(\Delta t).$$

Здесь $\lambda(t)$ и $\mu(t)$ – положительные непрерывные на $(0;+\infty)$ функции, называемые интенсивностями рождения и гибели соответственно. В начальный момент времени $\xi(0) = 1$, а возможность самозарождения исключается (переход из состояния 0 в состояние 1 невозможен). Обозначим: $\Lambda(t) = \int\limits_0^t \lambda(\tau)d\tau$ — интегральная интенсивность рождения, $\Lambda = \int\limits_0^{+\infty} \lambda(\tau)d\tau$, $P_n(t) = P\{\xi(t) = n\}$ ($n = 0,1,2,\ldots$). Из второй системы дифференциальных уравнений Колмогорова следует [1, 7]

$$\frac{d}{dt}P_n(t) = (n+1)\mu(t)P_{n+1}(t) - n(\lambda(t)+\mu(t))P_n(t) + (n-1)\lambda(t)P_{n-1}(t), \ n \geq 1,$$

$$\frac{d}{dt}P_0(t) = \mu(t)P_1(t).$$

После доопределения $P_n(t) = 0$ для $n < 0$ и введения производящей функции $\varphi(z,t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} P_n(t)z^n$ эти уравнения эквивалентны задаче Коши для линейного дифференциального уравнения в частных производных $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = (z-1)(\lambda(t)z - \mu(t))\frac{\partial\varphi}{\partial z}$, $\varphi(z,0) = z$ [1]. Действительно

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} P_n(t)z^n\right) = \mu(t)P_1(t) + \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)\mu(t)P_{n+1}(t)z^n -$$

$$-\sum_{n=1}^{+\infty} n(\lambda(t)+\mu(t))P_n(t)z^n + \sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)\lambda(t)P_{n-1}(t)z^n =$$

$$= \mu(t)P_1(t) + \mu(t)\frac{\partial}{\partial z}\big(\varphi(z,t) - P_0(t) - P_1(t)z\big) - (\lambda(t)+\mu(t)) \times$$

$$\times z\frac{\partial}{\partial z}\big(\varphi(z,t) - P_0(t)\big) + \lambda(t)z^2\frac{\partial}{\partial z}\big(\varphi(z,t) - P_0(t)\big) = (z-1)(\lambda(t)z - \mu(t))\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

В работах [1] и [6] получены явные формулы для $P_n(t)$ ($n = 0,1,2,\dots$), а также доказано, что $\varphi(z,t) = 1 + \dfrac{1}{\dfrac{e^{\rho(t)}}{z-1} - \int\limits_0^t \lambda(u) e^{\rho(u)} du}$, где $\rho(t) = \int\limits_0^t (\mu(u) - \lambda(u)) du$.

Рассматривается следующий случай: отношение $\dfrac{\mu(t)}{\lambda(t)} = c > 0$ постоянное для всех $t > 0$. В работах [4, 6] получены формулы:

$$P_0(t) = \left(1 + \Lambda^{-1}(t)\right)^{-1}, \ (c = 1), \ \ P_0(t) = \frac{c(1 - e^{\rho(t)})}{1 - ce^{\rho(t)}}, \ \ (c \neq 1), \tag{1}$$

$$P_n(t) = \frac{e^{\rho(t)}}{c^{n-1}} P_0^{n-1}(t)(1 - P_0(t))^2, \ (n = 1,2,\dots), \ \ \rho(t) = (c-1)\Lambda(t). \tag{2}$$

Из соотношений (1) и (2) следует, что $P_0(t) < c$, а функция $P_n(t)$ при фиксированном t непрерывна по c. Первый момент распределения случайной величины $\xi(t)$ [4, 6]

$$\alpha_1(t) = M\xi(t) = e^{-\rho(t)}. \tag{3}$$

Для момента ξ вырождения процесса $\xi(t)$, т.е. момента исчезновения всех частиц, справедливо равенство [6]

$$M\xi = \int\limits_0^{+\infty} t dP_0(t) = \int\limits_0^{+\infty} t \frac{d}{dt} P_0(t) dt. \tag{4}$$

Цель работы — решение задач 1–3.

1. ЗАДАЧА МИНИМИЗАЦИИ ВЕРОЯТНОСТИ ВЫХОДА ПРОЦЕССА $\xi(t)$ ПРИ $t \to +\infty$ ИЗ ПОЛОСЫ

Пусть задано натуральное число N. Рассмотрим задачу управления: минимизировать вероятность выхода процесса при $t \to +\infty$ из полосы $[1; N-1]$, управляя параметром c, т.е.

$$P(c) = \lim_{t \to +\infty} P\{\xi(t) = 0\} + \lim_{t \to +\infty} P\{\xi(t) \geq N\} \to \min_c. \tag{5}$$

Вероятность превысить порог $N-1$ согласно соотношениям (2) равна

$$P\{\xi(t) \geq N\} = \sum_{k=N}^{+\infty} P\{\xi(t) = k\} = e^{\rho(t)} (1 - P_0(t))^2 \sum_{k=N}^{+\infty} \left(\frac{P_0(t)}{c}\right)^{N-1}.$$

Вычислив с учётом формулы (2) сумму геометрической прогрессии со знаменателем $q < 1$, получим

$$P\{\xi(t)\geq N\}=\frac{\Lambda^{N-1}(t)}{(1+\Lambda(t))^{N}}\,,\ (c=1);$$

$$P\{\xi(t)\geq N\}=\frac{(1-c)(1-e^{\rho(t)})^{N-1}}{(1-ce^{\rho(t)})^{N}}\,,\ \ (c\neq 1). \qquad (6)$$

Подставив в первое слагаемое критерия (5) формулы (1), а во второе — формулы (6) и перейдя к пределу $t\to+\infty$, находим эргодическое состояние процесса: при $\Lambda<+\infty$

$$P(c)=\frac{\Lambda}{1+\Lambda}+\frac{\Lambda^{N-1}}{(1+\Lambda)^{N}}\,,\ \ (c=1),$$

$$P(c)=\frac{c(1-e^{(c-1)\Lambda})}{1-ce^{(c-1)\Lambda}}+\frac{(1-c)(1-e^{(c-1)\Lambda})^{N-1}}{(1-ce^{(c-1)\Lambda})^{N}}=P_1(c)+P_2(c)\,,\ \ (c\neq 1),$$

а при $\Lambda=+\infty$ $P(c)\equiv 1$. Заметим, что функция $P(c)$ непрерывна на $(0;+\infty)$.

Утверждение 1. $P_1(c)$ — возрастающая функция на $(0;+\infty)$.

Доказательство. Производная данной функции имеет вид $P_1'(c)=$ $=\dfrac{1+e^{(c-1)\Lambda}(c(c-1)\Lambda-1)}{(1-ce^{(c-1)\Lambda})^{2}}$. Рассмотрим вспомогательную функцию $g(\Lambda)=$ $=1+e^{(c-1)\Lambda}(c(c-1)\Lambda-1)$. Её производная $g'(\Lambda)=(c-1)^2e^{(c-1)\Lambda}(c\Lambda+1)>0$, поэтому $g(\Lambda)>g(0)=0$, что доказывает утверждение.

Утверждение 2. $P_2(c)$ — убывающая функция на $(0;+\infty)$.

Доказательство. Вводим вспомогательную функцию $g(c,\tau)=$ $=\dfrac{(1-c)(1-\tau)^{N-1}}{(1-c\tau)^{N}}$. Тогда, используя равенство $P_2'(c)=\dfrac{d}{dc}g(c,e^{(c-1)\Lambda})$ и полагая $\tau=e^{(c-1)\Lambda}$, после упрощений получаем

$$P_2'(c)=\frac{(1-\tau)^{N-2}}{(1-c\tau)^{N}}(-1+\tau+(1-c)\Lambda\tau)+$$

$$+\frac{\tau N(1-c)(1-\tau)^{N-2}}{(1-c\tau)^{N+1}}(1-\tau-(1-c)\Lambda)\,. \qquad (7)$$

Выполняются неравенства $e^{(c-1)\Lambda}(1-(c-1)\Lambda)-1<0$ и $1-e^{(c-1)\Lambda}+$ $+(c-1)\Lambda<0$. Действительно, для доказательства первого из них вводим вспомогательную функцию $g_1(y)=e^{y}(1-y)$, имеющую глобальный максимум в точке $y=0$, откуда $g_1(y)<g_1(0)=1$ при $y\neq 0$. Второе неравенство следует из неравенства $e^{y}>y+1$ ($y\neq 0$). Поэтому $P_2'(c)$, задаваемая формулой (7), отрицательна, что доказывает утверждение.

Функция $P(c)$ при $\Lambda<+\infty$ может либо иметь единственную точку минимума $c_*>0$, либо иметь $\inf\limits_{(0;+\infty)}P(c)=\lim\limits_{c\to 0}P(c)=(1-e^{-\Lambda})^{N-1}$ в зависимости от соотношения N и Λ. Для функций на рис. 1 численный подсчёт (например, методом золотого сечения) даёт $\inf\limits_{(0;+\infty)} P(c) = (1-e^{-3})^{199}$ при $\Lambda = 3$ и точки минимума $c_* \approx 0{,}117263$, $c_* \approx 0{,}420581$ и $c_* \approx 0{,}632043$ при $\Lambda = 5$, $\Lambda = 7$ и $\Lambda = 10$ соответственно.

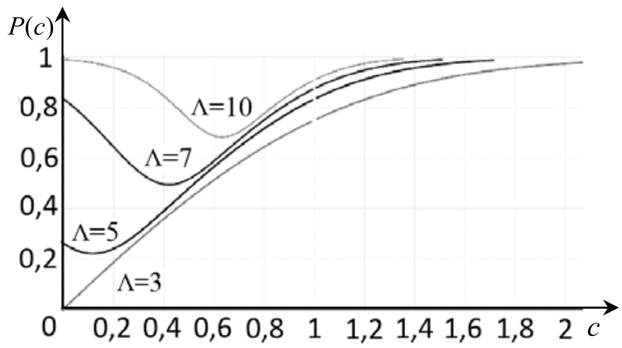

Рис. 1. Графики функций $P(c)$ при $N = 200$

2. ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ВЫБОРОМ ПАРАМЕТРА c С УЧЁТОМ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

Пусть задано число $T > 0$ и некоторая функция $f(t) \in L_2([0;T])$. Напомним, что в пространстве $L_2([0;T])$ скалярное произведение и норма задаются формулами $(f_1, f_2) = \int\limits_0^T f_1(t) f_2(t) dt$ и $\|f\| = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int\limits_0^T f^2(t)dt}$ соответственно. Рассмотрим задачу управления: минимизировать отклонение в норме пространства $L_2([0;T])$ первого момента $\alpha_1(t)$ (см. формулу (3)) от заданной функции $f(t)$, управляя параметром c. Соответствующий критерий $J(c) = \int\limits_0^T (f(t) - e^{-\rho(t)})^2 dt \to \min\limits_c$ (ср. [6]) зависит от c экспоненциально. Изменим постановку задачи управления: минимизировать отклонение $\ln f(t)$ от $\ln \alpha_1(t)$, соответствующий критерий $J(c) = \int\limits_0^T (\ln f(t) + \rho(t))^2 dt + \gamma c^2 \to$ $\to \min\limits_c$, где $\gamma > 0$ — заданное число, квадратичен относительно c.

Теорема 1. Если выполнено условие

$$\int\limits_0^T \Lambda(t) \ln f(t) dt < \int\limits_0^T \Lambda^2(t) dt \qquad (8)$$

(эквивалентные записи $(\Lambda - \ln f, \Lambda) > 0$ и $(\Lambda, \ln f) < \|\Lambda\|^2$), то $J(c)$ имеет единственную точку минимума

$$c_* = \frac{\int\limits_0^T (\Lambda(t) - \ln f(t))\Lambda(t)dt}{\int\limits_0^T \Lambda^2(t)dt + \gamma} = \frac{(\Lambda - \ln f, \Lambda)}{\|\Lambda\|^2 + \gamma}, \ J(c_*) = \|\ln f - \Lambda\|^2 - \frac{(\Lambda - \ln f, \Lambda)^2}{\|\Lambda\|^2 + \gamma}.$$

В противном случае $\inf\limits_{(0;+\infty)} J(c) = \lim\limits_{c \to 0} J(c) = \|\ln f - \Lambda\|^2$.

Доказательство. Рассмотрим

$$J'(c) = 2c\left(\int\limits_0^T \Lambda^2(t)dt + \gamma\right) - 2\int\limits_0^T (\Lambda(t) - \ln f(t))\Lambda(t)dt.$$

При выполнении условия (8) критическая точка $c_* > 0$, $J' < 0$ на $(0; c_*)$, $J' > 0$ на $(c_*; +\infty)$. Поэтому c_* является точкой глобального минимума на $(0; +\infty)$, а

$$J(c_*) = \int\limits_0^T ((\ln f(t) - \Lambda(t)) + c_*\Lambda(t))^2 dt + \gamma c_*^2 = \int\limits_0^T (\ln f(t) - \Lambda(t))^2 dt +$$

$$+ 2\frac{(\Lambda - \ln f, \Lambda)}{\|\Lambda\|^2 + \gamma}\int\limits_0^T (\ln f(t) - \Lambda(t))\Lambda(t)dt + \frac{(\Lambda - \ln f, \Lambda)^2}{(\|\Lambda\|^2 + \gamma)^2}\int\limits_0^T \Lambda^2(t)dt +$$

$$+ \gamma\frac{(\Lambda - \ln f, \Lambda)^2}{(\|\Lambda\|^2 + \gamma)^2} = \|\ln f - \Lambda\|^2 - \frac{(\Lambda - \ln f, \Lambda)^2}{\|\Lambda\|^2 + \gamma}.$$

При равенстве в условии (8) критической точкой является точка 0, $J' > 0$ на $(0; +\infty)$. При знаке «$>$» в условии (8) критическая точка отрицательна. Поэтому при невыполнении условия (8) $\inf\limits_{(0;+\infty)} J(c) =$ $= \lim\limits_{c \to 0} J(c) = \|\ln f - \Lambda\|^2$.

Теорема доказана.

Замечание. При выполнении условия (8) $J(c_*) < \|\ln f - \Lambda\|^2$, а вследствие неравенства Коши–Буняковского

$$J(c_*) = \frac{\|\ln f - \Lambda\|^2 \gamma + \|\ln f - \Lambda\|^2 \cdot \|\Lambda\|^2 - (\Lambda - \ln f, \Lambda)^2}{\|\Lambda\|^2 + \gamma} \ge \frac{\|\ln f - \Lambda\|^2 \gamma}{\|\Lambda\|^2 + \gamma}.$$

Частный случай 1. Рассмотрим $\lambda(t) \equiv \lambda_0 > 0$. Этот случай предложен В. Феллером, рассмотрен в качестве частного случая в [1] и других работах. Тогда $\Lambda(t) = \lambda_0 t$, условие (8) принимает вид $\int\limits_0^T t \ln f(t)dt < \frac{\lambda_0 T^3}{3}$. При выполнении этого условия $c_* = \frac{\lambda_0^2 T^3 - 3\lambda_0 \int\limits_0^T t \ln f(t)dt}{\lambda_0^2 T^3 + 3\gamma}$ (интенсивность гибели

$\mu(t) \equiv \lambda_0 c > 0$), в противном случае $\inf\limits_{(0;+\infty)} J(c) = \left\| \ln f - \Lambda \right\|^2$ (интенсивность гибели почти нулевая).

Рассмотрим частный случай $f(t) \equiv a > 0$. Условие (8) принимает вид $a < e^{2\lambda_0 T/3}$, при выполнении этого условия

$$c_* = \frac{2\lambda_0^2 T^3 - 3\lambda_0 T^2 \ln a}{2\lambda_0^2 T^3 + 6\gamma}, \quad J(c_*) = \frac{\lambda_0^2 T^4 \ln^2 a + 4\gamma(\lambda_0^2 T^3 - 3\lambda_0 T^2 \ln a + 3T \ln^2 a)}{4(\lambda_0^2 T^3 + 3\gamma)}.$$

Рассмотрим частный случай $f(t) = e^{at}$. Такая функция выбрана потому, что это элементарная функция, а при $a < 0$ выполняются $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$, $\int\limits_0^{+\infty} f(t)dt < +\infty$. Также можно провести параллель с плотностью экспоненциального распределения случайной величины η с параметром $\lambda > 0$: $f_\eta(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ при $t \geq 0$, $f_\eta(t) = 0$ при $t < 0$. Условие (8) принимает вид $a < \lambda_0$, и если оно выполнено, то $c_* = \dfrac{\lambda_0 T^3(\lambda_0 - a)}{\lambda_0^2 T^3 + 3\gamma}$, $J(c_*) = \dfrac{(\lambda_0 - a)^2 T^3 \gamma}{\lambda_0^2 T^3 + 3\gamma}$. Заметим, что при выборе a, близких к λ_0, расхождение между $\ln f(t)$ и $\ln \alpha_1(t)$ мало́.

Частный случай 2. Рассмотрим $\lambda(t) = e^{bt}$. Тогда $\Lambda(t) = \dfrac{1}{b}(e^{bt} - 1)$. Если $b < 0$, то $\lim\limits_{t \to +\infty} \lambda(t) = 0$, а $\Lambda = -\dfrac{1}{b}$. Условие (8) после упрощения принимает вид

$$\frac{1}{b}\int\limits_0^T (e^{bt} - 1)\ln f(t)dt < \frac{1}{2b^3}e^{2bT} - \frac{2}{b^3}e^{bT} + \frac{3}{2b^3} + \frac{T}{b^2},$$

и если оно выполнено, выполняется равенство

$$c_* = \frac{e^{2bT} - 4e^{bT} + 3 + 2bT - 2b^2 \int\limits_0^T (e^{bt} - 1)\ln f(t)dt}{e^{2bT} - 4e^{bT} + 3 + 2bT + 2b^3\gamma}.$$

Частный случай 3. Рассмотрим $\lambda(t) = \lambda_0 t + \beta_0$ — процесс линейного роста с иммиграцией [2]. Тогда $\Lambda(t) = \dfrac{\lambda_0}{2}t^2 + \beta_0 t$, условие (8) после упрощения принимает вид

$$\int\limits_0^T \left(\frac{\lambda_0}{2}t^2 + \beta_0 t\right)\ln f(t)dt < \frac{\lambda_0^2 T^5}{20} + \frac{\lambda_0 \beta_0 T^4}{4} + \frac{\beta_0^2 T^3}{3},$$

и если оно выполнено, выполняется равенство

$$c_* = \frac{3\lambda_0^2 T^5 + 15\lambda_0\beta_0 T^4 + 20\beta_0^2 T^3 - 30\int\limits_0^T (\lambda_0 t^2 + 2\beta_0 t)\ln f(t)dt}{3\lambda_0^2 T^5 + 15\lambda_0\beta_0 T^4 + 20\beta_0^2 T^3 + 60\gamma}.$$

Частный случай 4. В некоторых случаях полезно полагать, что интенсивность рождения допускает всплеск, ограниченный во времени. Простейшая функция такого типа с носителем $[0;a]$ — сплайн степени 1 и дефекта 1, «шапочка» (рис. 2):

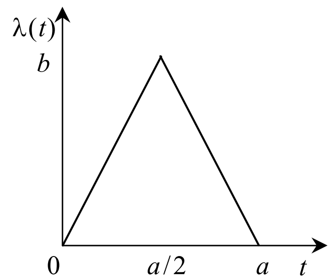

Рис. 2. Функция $\lambda(t)$

$$\lambda(t) = \frac{2b}{a}t\,,\ \ 0 \le t \le \frac{a}{2}\,;$$

$$\lambda(t) = -\frac{2b}{a}t + 2b\,,\ \ \frac{a}{2} < t \le a\,;$$

$$\lambda(t) = 0\,,\ \ t > a\,.$$

(здесь полагаем $a > 0$, $b > 0$). Тогда функция

$$\Lambda(t) = \frac{b}{a}t^2\,,\ \ 0 \le t \le \frac{a}{2}\,;\ \ \Lambda(t) = -\frac{b}{a}t^2 + 2bt - \frac{ab}{2}\,,\ \ \frac{a}{2} < t \le a\,;\ \ \Lambda(t) = \frac{ab}{2}\,,\ \ t > a$$

реализует переход гладкости C^1 с уровня 0 на уровень $\frac{ab}{2}$. Для выполнения условия $\lambda(t) > 0$ полагаем $\frac{a}{2} \le T < a$. Условие (8) после упрощения принимает вид

$$\frac{b}{a}\int\limits_0^{a/2} t^2 \ln f(t)dt + \int\limits_{a/2}^{T}\left(-\frac{b}{a}t^2 + 2bt - \frac{ab}{2}\right)\ln f(t)dt <$$

$$< b^2\left(\frac{T^5}{5a^2} - \frac{T^4}{a} + \frac{5T^3}{3} - aT^2 + \frac{a^2T}{4} - \frac{a^3}{48}\right),$$

а при $T \to a - 0$ правая часть стремится к $\frac{23a^3b^2}{240}$. При выполнении этого условия имеем

$$c_* = \frac{b^2(48T^5 - 240aT^4 + 400a^2T^3 - 240a^3T^2 + 60a^4T - 5a^5) -}{b^2(48T^5 - 240aT^4 + 400a^2T^3 - 240a^3T^2 + 60a^4T - 5a^5) + 240a^2\gamma}$$

$$\frac{-240ab\int\limits_0^{a/2} t^2\ln f(t)dt+120ab\int\limits_{a/2}^{T}(2t^2-4at+a^2)\ln f(t)dt}{},$$

а при $T\to a-0$

$$c_*\to\frac{23a^4b^2-240b\int\limits_0^{a/2} t^2\ln f(t)dt+120b\int\limits_{a/2}^{a}(2t^2-4at+a^2b)\ln f(t)dt}{23a^4b^2+240a\gamma}.$$

ДОПОЛНЕНИЕ: ЗАДАЧА ИДЕНТИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ СТАБИЛИЗИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РОСТА

Теперь рассмотрим задачу идентификации параметров. Считая, что $f(t)$ является функцией экспоненциального роста, т.е. $f(t)=e^{at+b}$, где $a\in\mathrm{R}$ и $b\in\mathrm{R}$, находим параметры a и b для указанной функции $f(t)$ при заданном c, минимизируя отклонение $\ln f(t)$ от $\ln\alpha_1(t)$ (см. формулу (3)). Соответствующий критерий $J(a,b)=\int\limits_0^T(at+b+(c-1)\Lambda(t))^2\,dt\to\min\limits_{(a,b)}$.

Приравнивая частные производные к нулю

$$J'_a(a,b)=\int\limits_0^T 2(at+b+(c-1)\Lambda(t))tdt=0,\quad J'_b(a,b)=\int\limits_0^T 2(at+b+(c-1)\Lambda(t))dt=0,$$

составляем систему линейных уравнений для поиска критической точки:

$$\frac{2T^3}{3}a+T^2b=-2(c-1)\int\limits_0^T t\Lambda(t)dt,\quad T^2a+2Tb=-2(c-1)\int\limits_0^T\Lambda(t)dt.$$

Определитель данной системы $\frac{T^4}{3}>0$, поэтому согласно формулам Крамера

$$a=\frac{3(1-c)}{T^3}\left(4\int\limits_0^T t\Lambda(t)dt-2T\int\limits_0^T\Lambda(t)dt\right),$$

$$b=\frac{3(1-c)}{T^2}\left(\frac{4T}{3}\int\limits_0^T\Lambda(t)dt-2\int\limits_0^T t\Lambda(t)dt\right). \qquad (9)$$

Заметим, что матрица вторых производных J'' согласно критерию Сильвестра положительно определена, поэтому критическая точка (9) является точкой локального минимума, а в силу единственности – и глобального. Вычислим невязку между $\ln f(t)$ и $\ln\alpha_1(t)$. Подстановка искомых параметров (9) в критерий $J(a,b)$ после упрощений даёт

$$J(a,b)=(c-1)^2\left(\|\Lambda\|^2-\frac{4}{T}\left(\int_0^T\Lambda(t)dt\right)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{12}{T^2}\int_0^T\Lambda(t)dt\int_0^T t\Lambda(t)dt-\frac{12}{T^3}\left(\int_0^T t\Lambda(t)dt\right)^2\right). \qquad (10)$$

В случае малой невязки можно использовать функции экспоненциального роста.

Частный случай 1. Рассмотрим $\lambda(t)\equiv\lambda_0$. Тогда после соответствующих вычислений получаем $a=\lambda_0(1-c)$, $b=0$ и $J(a,b)=0$. Это полностью согласуется с теми «эмпирическими соображениями», что при выборе $f(t)=e^{\lambda_0(1-c)t}$ расхождения между $\ln f(t)$ и $\ln\alpha_1(t)$ нет. Этим, в частности, можно объяснить выбор функций экспоненциального роста, поскольку они подходят для данного частного случая.

Частный случай 2. Рассмотрим $\lambda(t)=\lambda_0 t+\beta_0$ — процесс линейного роста с иммиграцией. Тогда после соответствующих вычислений получаем $a=\frac{(1-c)\lambda_0 T}{2}+(1-c)\beta_0$, $b=-\frac{(1-c)\lambda_0 T^2}{12}$, $J(a,b)=\frac{1}{720}(c-1)^2\lambda_0^2T^5$. Это показывает, что лишь при малых $J(a,b)$, т.е. при малых λ_0 или близких к единице c следует пользоваться функциями экспоненциального роста.

Частный случай 3. Рассмотрим $\lambda(t)=\lambda_0+\tilde\lambda(t)$, где $\tilde\lambda(t)$ — достаточно малая величина в следующем смысле: $\|\tilde\Lambda(t)\|=\left\|\int_0^t\tilde\lambda(\tau)d\tau\right\|\le\varepsilon$. Вследствие неравенства Коши–Буняковского

$$\int_0^T\tilde\Lambda(t)dt=(1(t),\tilde\Lambda)\le\|1(\cdot)\|\cdot\|\tilde\Lambda\|\le\sqrt{T}\varepsilon,\quad \int_0^T t\tilde\Lambda(t)dt=(t,\tilde\Lambda)\le\|t\|\cdot\|\tilde\Lambda\|\le T\sqrt{\frac{T}{3}}\varepsilon$$

(здесь $1(t)$ – единичная функция на $[0;T]$), поэтому из формулы (10) получаем

$$J(a,b)=(c-1)^2\left(\|\tilde\Lambda\|^2-\frac{4}{T}\left(\int_0^T\tilde\Lambda(t)dt\right)^2+\frac{12}{T^2}\int_0^T\tilde\Lambda(t)dt\int_0^T t\tilde\Lambda(t)dt-\frac{12}{T^3}\left(\int_0^T t\tilde\Lambda(t)dt\right)^2\right),$$

$$J(a,b)\le(c-1)^2(9+4\sqrt{3})\varepsilon^2.$$

3. ЗАДАЧА МИНИМИЗАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ МОМЕНТА ВЫРОЖДЕНИЯ ξ ПРИ МАЛОЙ ВЕРОЯТНОСТИ ПРЕВЫШЕНИЯ ПОРОГА

Пусть задано натуральное число N и малое число $\alpha>0$. Рассмотрим задачу управления: минимизировать математическое ожидание момента ξ вырождения процесса $\xi(t)$ при условии, что для каждого $t>0$ вероятность превышения порога $N-1$ не превышает α, т.е.

$$M\xi \to \min_{c}, \quad \forall t>0 \quad P\{\xi(t)\geq N\}\leq \alpha. \tag{11}$$

Здесь $M\xi$ задаётся равенством (4). Из формул (1), (2) следует

$$M\xi = \int_0^{+\infty} \frac{t\lambda(t)}{(\Lambda(t)+1)^2}dt, \ (c=1);$$

$$M\xi = (c-1)^2 c \int_0^{+\infty} \frac{te^{(c-1)\Lambda(t)}\lambda(t)}{(1-ce^{(c-1)\Lambda(t)})^2}dt, \ (c\neq 1); \tag{12}$$

$$\forall t>0 \quad \frac{\Lambda^{N-1}(t)}{(\Lambda(t)+1)^N}\leq \alpha, \ (c=1);$$

$$\forall t>0 \quad \frac{(1-c)(1-e^{(c-1)\Lambda(t)})^{N-1}}{(1-ce^{(c-1)\Lambda(t)})^N}\leq \alpha, \ (c\neq 1). \tag{13}$$

В данной работе найдены условия сходимости интеграла $M\xi$ (12), упрощены условия (13), а задача (11) решена в частном случае $\lambda(t)\equiv\lambda_0>0$.

Теорема 2. Пусть $\lambda(t)=O(t^\gamma)$ при $t\to+\infty$. Тогда интеграл $M\xi$

а) сходится на множестве $\{(\gamma,c)\,|\,(\gamma<-2)\vee((\gamma>-1)\wedge\neg((-1<\gamma\leq 0)\wedge \wedge(c=1)))\}$;

б) расходится на множестве $\{(\gamma,c)\,|\,(-2\leq\gamma<-1)\vee((-1\leq\gamma\leq 0)\wedge(c=1))\}$.

Доказательство. Обозначим $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\lambda(t)}{t^\gamma}=L$. Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть $\gamma<-2$, $c=1$. Интеграл $\int_1^{+\infty} t^\gamma dt$ сходится, поэтому по теореме сравнения интеграл $\Lambda(t)$ также сходится, т.е. $\Lambda<+\infty$. Предел $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t\lambda(t)}{(\Lambda(t)+1)^2}\Big/ t^{\gamma+1}=\dfrac{L}{(\Lambda+1)^2}$ существует и ненулевой, интеграл $\int_1^{+\infty} t^{\gamma+1}dt$ сходится, поэтому интеграл $M\xi$ также сходится.

2. Пусть $-2\leq\gamma<-1$, $c=1$. В отличие от случая 1 интеграл $\int_1^{+\infty} t^{\gamma+1}dt$ расходится, поэтому интеграл $M\xi$ также расходится.

3. Пусть $\gamma>0$, $c=1$. В отличие от случая 1 интеграл $\Lambda(t)$ расходится. Предел

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t\lambda(t)}{(\Lambda(t)+1)^2}\Big/\frac{1}{t^{\gamma+1}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\lambda(t)}{t^\gamma}\lim_{t\to+\infty}\frac{\Lambda^2(t)}{(\Lambda(t)+1)^2}\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t^{\gamma+1}}{\Lambda(t)}\right)^2 =$$

$$= L\left(\lim_{t\to+\infty}\frac{(\gamma+1)t^{\gamma}}{\lambda(t)}\right)^2 = \frac{(\gamma+1)^2}{L}$$

согласно правилу Лопиталя существует и ненулевой, интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{\gamma+1}}$ сходится, поэтому интеграл $M\xi$ также сходится.

4. Пусть $-1<\gamma\le 0$, $c=1$. В отличие от случая 3 интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{\gamma+1}}$ расходится, поэтому интеграл $M\xi$ также расходится.

5. Пусть $\gamma=-1$, $c=1$. Аналогично случаю 3 интеграл $\Lambda(t)$ расходится. Предел

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t\lambda(t)}{(\Lambda(t)+1)^2}\bigg/\frac{1}{\ln^2 t} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\lambda(t)}{1/t}\lim_{t\to+\infty}\frac{\Lambda^2(t)}{(\Lambda(t)+1)^2}\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\ln t}{\Lambda(t)}\right)^2 =$$

$$= L\left(\lim_{t\to+\infty}\frac{1/t}{\lambda(t)}\right)^2 = \frac{1}{L}$$

согласно правилу Лопиталя существует и ненулевой; интеграл $\int_a^{+\infty}\frac{dt}{\ln^2 t}$ ($a>1$) сводится заменой $t=e^u$ к расходящемуся интегралу $\int_{\ln a}^{+\infty}\frac{e^u}{u^2}du$, следовательно, расходится; поэтому интеграл $M\xi$ расходится.

6. Пусть $\gamma<-2$, $c\ne 1$. Аналогично случаю 1 интеграл $\Lambda(t)$ сходится. Предел $\lim_{t\to+\infty}\frac{te^{(c-1)\Lambda(t)}\lambda(t)}{(1-ce^{(c-1)\Lambda(t)})^2}\bigg/t^{\gamma+1} = \frac{e^{(c-1)\Lambda}L}{(1-ce^{(c-1)\Lambda})^2}$ существует и ненулевой, интеграл $\int_1^{+\infty}t^{\gamma+1}dt$ сходится, поэтому интеграл $M\xi$ также сходится.

7. Пусть $-2\le\gamma<-1$, $c\ne 1$. В отличие от случая 6 интеграл $\int_1^{+\infty}t^{\gamma+1}dt$ расходится, поэтому интеграл $M\xi$ также сходится.

8. Пусть $\gamma>-1$, $c>1$. Интеграл $\Lambda(t)$ расходится. Предел

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{te^{(c-1)\Lambda(t)}\lambda(t)}{(1-ce^{(c-1)\Lambda(t)})^2}\bigg/\frac{\Lambda(t)}{e^{(c-1)\Lambda(t)}} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\frac{\lambda(t)}{t^{\gamma}}\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{e^{(c-1)\Lambda(t)}}{1-ce^{(c-1)\Lambda(t)}}\right)^2\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{\gamma+1}}{\Lambda(t)} = \frac{L}{c^2}\lim_{t\to+\infty}\frac{(\gamma+1)t^{\gamma}}{\lambda(t)} = \frac{\gamma+1}{c^2}$$

согласно правилу Лопиталя существует и ненулевой; интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\Lambda(t)}{e^{(c-1)\Lambda(t)}} dt$ сходится, поскольку $\Lambda(t) = O(t^{\gamma+1})$ при $t \to +\infty$, поэтому интеграл $M\xi$ также сходится.

9. Пусть $\gamma > -1$, $c < 1$. Аналогично случаю 8 интеграл $\Lambda(t)$ расходится. Предел

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{te^{(c-1)\Lambda(t)}\lambda(t)}{(1-ce^{(c-1)\Lambda(t)})^2} \Bigg/ \Lambda(t)e^{(c-1)\Lambda(t)} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{\lambda(t)}{t^\gamma} \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{1}{1-ce^{(c-1)\Lambda(t)}}\right)^2 \lim_{t\to+\infty} \frac{t^{\gamma+1}}{\Lambda(t)} = L \lim_{t\to+\infty} \frac{(\gamma+1)t^\gamma}{\lambda(t)} = \gamma + 1$$

согласно правилу Лопиталя существует и ненулевой; интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \Lambda(t)e^{(c-1)\Lambda(t)} dt = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\Lambda(t)}{e^{(1-c)\Lambda(t)}} dt$ сходится (см. случай 8), поэтому интеграл $M\xi$ также сходится. Теорема доказана.

Замечание. Теорема не охватывает случай $\gamma = -1$, $c \neq 1$.

Теперь рассмотрим условия (13). Их проверка для всех $t > 0$ вызывает сложности, поэтому упростим условия (13). $\lambda(t) > 0$, поэтому функция $\Lambda(t)$ монотонно возрастает, следовательно имеет обобщённый предел $\Lambda \le +\infty$ (конечный или бесконечный).

Теорема 3. Пусть $N \ge 2$. Тогда условия (13) эквивалентны:

1) $\frac{\Lambda^{N-1}}{(\Lambda+1)^N} \le \alpha$, если $c = 1$, $\Lambda \le N - 1$;

2) $\frac{(N-1)^{N-1}}{N^N} \le \alpha$, если $c = 1$, $\Lambda > N - 1$ (в том числе и $\Lambda = +\infty$);

3) $\frac{(1-c)(1-e^{(c-1)\Lambda})^{N-1}}{(1-ce^{(c-1)\Lambda})^N} \le \alpha$, если выполнены условия а) $c > 1$, $\Lambda \le \frac{1}{c-1} \ln \frac{1+N(c-1)}{c}$, или б) $c < 1$, $N \ge \frac{1}{1-c}$, $\Lambda < +\infty$, или в) $c < 1$, $N < \frac{1}{1-c}$, $\Lambda \le \frac{1}{c-1} \ln \frac{1+N(c-1)}{c}$;

4) $\frac{(N-1)^{N-1}}{c^{N-1}N^N} \le \alpha$, если $\left((c>1) \vee \left(\left(N < \frac{1}{1-c}\right) \wedge (c<1)\right)\right) \wedge$ $\wedge \left(\Lambda > \frac{1}{c-1} \ln \frac{1+N(c-1)}{c}\right)$;

5) $1 - c \le \alpha$, если $c < 1$, $N \ge \frac{1}{1-c}$, $\Lambda = +\infty$.

Доказательство. Случай 1. Пусть $c = 1$. Вводим вспомогательную функцию $g(t) = \frac{t^{N-1}}{(t+1)^N}$. Тогда $\frac{d}{dt} P\{\xi(t) \ge N\} = g'(\Lambda(t))\lambda(t) = \frac{\Lambda^{N-2}(t)}{(\Lambda(t)+1)^{N+1}} \times$

$\times(N-1-\Lambda(t))\lambda(t)$. Если $\Lambda \le N-1$, то $P\{\xi(t)\ge N\}$ возрастает на $[0;+\infty)$ и условия (13) эквивалентны условию 1 теоремы. Если $\Lambda > N-1$ (в том числе и $\Lambda=+\infty$), то существует единственная точка $t_* > 0$ такая, что $\Lambda(t_*)=N-1$, и условия (13) эквивалентны условию 2 теоремы.

Случай 2. Пусть $c\ne 1$. Вводим вспомогательную функцию $g(t)=$ $=(1-c)\dfrac{(1-t)^{N-1}}{(1-ct)^N}$. Тогда, используя равенство $\dfrac{d}{dt}P\{\xi(t)\ge N\}=\dfrac{d}{dt}g(e^{(c-1)\Lambda(t)})$, после упрощений получаем

$$\frac{d}{dt}P\{\xi(t)\ge N\}=$$

$$=-(1-c)^2\frac{(1-e^{(c-1)\Lambda(t)})^{N-2}}{(1-ce^{(c-1)\Lambda(t)})^{N+1}}(N(c-1)+1-ce^{(c-1)\Lambda(t)})e^{(c-1)\Lambda(t)}\lambda(t).$$

Для определения знака полученной производной рассмотрим уравнение

$$e^{(c-1)\Lambda(t)}=\frac{N(c-1)+1}{c}. \qquad (14)$$

Пусть $c>1$. В предположении $N\ge 2$ правая часть уравнения (14) больше единицы и уравнение (14) принимает вид $\Lambda(t)=\dfrac{1}{c-1}\ln\dfrac{N(c-1)+1}{c}$. Если $\Lambda\le\dfrac{1}{c-1}\ln\dfrac{1+N(c-1)}{c}$, то $P\{\xi(t)\ge N\}$ возрастает на $[0;+\infty)$ и условия (13) эквивалентны условию 3 теоремы. В противном случае существует единственная точка $t_*>0$ – решение уравнения (14) и условия (13) эквивалентны условию 4 теоремы.

Пусть $c<1$. Если $N\ge\dfrac{1}{1-c}$, то уравнение (14) не имеет решений и $P\{\xi(t)\ge N\}$ возрастает на $[0;+\infty)$. Если $\Lambda<+\infty$, то условия (13) эквивалентны условию 3 теоремы; в противном случае – условию 5 теоремы. Если $N<\dfrac{1}{1-c}$, то $0<\dfrac{N(c-1)+1}{c}<1$ и уравнение (14) принимает вид $\Lambda(t)=\dfrac{1}{c-1}\ln\dfrac{N(c-1)+1}{c}$. Если $\Lambda\le\dfrac{1}{c-1}\ln\dfrac{1+N(c-1)}{c}$, то $P\{\xi(t)\ge N\}$ возрастает на $[0;+\infty)$ и условия (13) эквивалентны условию 3 теоремы. В противном случае существует единственная точка $t_*>0$ — решение уравнения (14) и условия (13) эквивалентны условию 4 теоремы.

Теорема доказана.

Замечание. В условиях 2 и 4 теоремы 3 $\dfrac{(N-1)^{N-1}}{N^N}\approx\dfrac{1}{Ne}$ при достаточно больших N.

Частный случай. Рассмотрим $\lambda(t)\equiv\lambda_0>0$. В этом случае интеграл $M\xi$, сходящийся при $c\ne 1$ согласно теореме 2, выражается в явном виде.

Действительно, в равенстве (4) применим интегрирование по частям и подставим формулы (1):

$$M\xi = \lim_{R\to+\infty}\left(tP_0(t)\,|_0^R - \int_0^R P_0(t)dt \right) =$$

$$= \lim_{R\to+\infty}\left(R\left(\frac{c-1}{1-ce^{(c-1)\lambda_0 R}} + 1 \right) - \int_0^R \left(\frac{c-1}{1-ce^{(c-1)\lambda_0 t}} + 1 \right) dt \right) =$$

$$= (c-1)\lim_{R\to+\infty}\left(\frac{R}{1-ce^{(c-1)\lambda_0 R}} - \int_0^R \frac{dt}{1-ce^{(c-1)\lambda_0 t}} \right). \qquad (15)$$

В случае $c>1$ первое слагаемое в правой части формулы (15) стремится к нулю при $t\to+\infty$, а в интеграле делаем замену $e^{(c-1)\lambda_0 t}=u$ и разлагаем на простые дроби:

$$M\xi = \frac{1}{\lambda_0}\lim_{R\to+\infty} \int_1^{\exp\{(c-1)\lambda_0 R\}} \left(-\frac{1}{u} + \frac{c}{cu-1} \right) du =$$

$$= \frac{1}{\lambda_0}\lim_{R\to+\infty} \ln\frac{\left|ce^{(c-1)\lambda_0 R}-1\right|}{(c-1)e^{(c-1)\lambda_0 R}} = \frac{1}{\lambda_0}\ln\left(1+\frac{1}{c-1}\right).$$

В случае $c<1$ аналогичной заменой в интеграле и разложением на простые дроби получаем

$$M\xi =$$

$$= (c-1)\lim_{R\to+\infty}\left(\frac{R}{1-ce^{(c-1)\lambda_0 R}} + \frac{1}{(c-1)\lambda_0}\left(-(c-1)\lambda_0 R + \ln\left|ce^{(c-1)\lambda_0 R}-1\right| - \ln(1-c) \right) \right) =$$

$$= -\frac{\ln(1-c)}{\lambda_0} + (c-1)\lim_{R\to+\infty}\left(\frac{R}{1-ce^{(c-1)\lambda_0 R}} - R \right) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_0}\lim_{R\to+\infty}\ln\left|ce^{(c-1)\lambda_0 R}-1\right| = -\frac{\ln(1-c)}{\lambda_0}.$$

Поэтому задачу (11) с учётом явного выражения для интеграла $M\xi$ и теоремы 3 удобно рассматривать в виде двух задач.

Первая из задач, отвечающая случаю $c>1$ и условию 4 теоремы 3,

$$\frac{1}{\lambda_0}\ln\left(1+\frac{1}{c-1}\right) \to \min_c, \quad \frac{(N-1)^{N-1}}{c^{N-1}N^N} \le \alpha$$

решения не имеет: инфимум целевой функции равен нулю, при этом $c\to+\infty$ (т.е. почти мгновенное вымирание всей популяции).

Вторая из задач отвечает случаю $c<1$ и условиям 4 и 5 теоремы 3:

$$-\frac{\ln(1-c)}{\lambda_0} \to \min_c,$$

$$c \ge \frac{N-1}{N \sqrt[N-1]{\alpha N}}, \text{ если } c > 1 - \frac{1}{N},$$

$$c \ge 1-\alpha, \text{ если } c \le 1 - \frac{1}{N}.$$

Решение этой задачи зависит от соотношения N и α. Если $\alpha N \ge 1$, то $c_* = 1-\alpha$. В противном случае $c_* = \dfrac{N-1}{N \sqrt[N-1]{\alpha N}}$.

ВЫВОДЫ

В работе для неоднородного процесса рождения и гибели в случае постоянного отношения c интенсивностей гибели и рождения решено три задачи управления при помощи выбора параметра c.

Для первой задачи минимизации вероятности выхода процесса $\xi(t)$ при $t \to +\infty$ из полосы $[1; N-1]$ доказано, что критерий является суммой возрастающей и убывающей функций, а для конкретных значений порога N и интегральной интенсивности рождения Λ при помощи метода золотого сечения найдены точки минимума c_* в случае их наличия.

Для второй задачи управления выбором параметра c с учётом стабилизирующей функции $f(t)$ найдена точка минимума c_* и доказано условие её существования. В качестве примеров рассмотрены наиболее интересные (с точки зрения авторов) частные случаи. К этой задаче примыкает задача идентификации параметров a и b для стабилизирующей функции экспоненциального роста e^{at+b}.

Для третьей задачи минимизации математического ожидания момента вырождения ξ при малой вероятности α превышения порога $N-1$ найдены условия сходимости математического ожидания $M\xi$, упрощены условия вероятности превышения порога $N-1$, а сама задача решена в частном случае $\lambda(t) \equiv \lambda_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kendall D.G.* On the Generalized «Birth-and-Death» Process / D.G. Kendall // Ann. Math. Statistics. — 1948. — **19**, N 1. — P. 1–15.
2. *Бартлетт М.С.* Введение в теорию случайных процессов / М.С. Бартлетт. — М.: ИЛ, 1958. — 384 с.
3. *Харрис Т.* Теория ветвящихся случайных процессов / Т. Харрис. — М.: Мир, 1966. — 356 с.
4. *Horalek V.* Nonhomogeneous birth-death processes with constant ratio of rates / V. Horalek // Aplikace matematiky. — 1966. — **11**, N 4. — P. 296–302.
5. *Horalek V.* On some types of nonhomogeneous birth-immigration-death processes / V. Horalek // Aplikace matematiky. —1964. — **9**, N 6. — P. 421–434.
6. *Андреев Н.В.* О некоторых задачах управления неоднородными процессами рождения и гибели / Н.В. Андреев, Э.С. Штатланд // Труды семинара «Теория оптимальных решений». — Вып. 4. — К., 1968. — С. 42–46.

7. *Гихман И.И.* Введение в теорию случайных процессов / И.И. Гихман, А.В. Скороход. —2-е изд. — М.: Наука, 1977. — 568 с.
8. *Kondratiev Yu.* Self-organizing birth-and-death stochastic systems in continuum / Yu. Kondratiev, R. Minlos, E. Zhizhina // Rev. Math. Phys. — 2008. — **20**, N 4. — P. 451–492.
9. *Сегхайер А.* Об интервальной модели для процесса рождения и гибели с гистерезисом / А. Сегхайер, И.И. Цитович // Информационные процессы. — 2012. — Т. 12, № 1. — С. 117–126.
10. *Калинкин А.В.* Уравнения марковского процесса гибели в математической теории надежности / А.В. Калинкин // Инженерный журнал: наука и инновации. — Вып. 12 (24), 2013. — 7 с. URL: http://engjournal.ru/catalog/appmath/hidden/1150.html
11. *Lefevre C.* Optimal Control of a Birth and Death Epidemic Process / C. Lefevre // Operations Research. —1981. — **29**, N 5. — P. 971–982.
12. *Serfozo R.* Optimal Control of Random Walks, Birth and Death Processes, and Queues / R. Serfozo // Advances in Applied Probability. —1981. — **13**, N 1. — P. 61–83.
13. *Kyriakidis E.G.* Optimal control of a simple immigration-birth-death process through total catastrophes / E.G. Kyriakidis // European Journal of Operational Research. — 1995. — **81**, Issue 2. — P. 346–356.
14. *Getz W.M.* Optimal control of a birth-and-death process population model / W.M. Getz // Mathematical Biosciences. — 1975. — **23**, Issues 1–2. — P. 87–111.
15. *Chatwin R.E.* Optimal control of continuous-time terminal-value birth-and-death processes and airline overbooking / R.E. Chatwin // Naval Research Logistics. — 1996. — **43**, Issue 2. — P. 159–168.
16. *Андреев Н.В.* О задаче управления неоднородным процессом рождения и гибели / Н.В. Андреев, В.М. Статкевич // Системный анализ и информационные технологии: материалы 18-й Междунар. научно-техн. конф. SAIT 2016 (Киев, 30 мая – 2 июня 2016 г.) — К.: УНК «ИПСА» НТУУ «КПИ», 2016. — С. 50.
17. *Кидяров Б.И.* Механизм и кинетика наноразмерных стадий образования кристаллов из жидкой фазы / Б.И. Кидяров // Конденсированные среды и межфазные границы. — 2009. — **11**, № 4. — С. 314–317.

Поступила 25.05.2016