

УДК 539.3

КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ ОТВОРІВ У ПРУЖНІЙ ПЛОЩИНІ ЗА АНТИПЛОСКОЇ ДЕФОРМАЦІЇ

М. П. САВРУК^{1,2}, А. КАЗБЕРУК², І. ТАРАСЮК²

¹ Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів;

² Білостоцька політехніка, Польща

Методом сингулярних інтегральних рівнянь знайдено розв'язки антиплоских задач теорії пружності для площини, послабленої криволінійними отворами із закругленими та гострими вершинами. Коефіцієнти інтенсивності напружень у гострих вершинах визначено граничним переходом від закруглених вершин за залежністю між коефіцієнтами інтенсивності та концентрації напружень у гострій та закругленій вершинах кутового вирізу. Числові результати отримано для отворів різної конфігурації: еліптичного, фізичної щілини, овального, ромбічного та прямокутного.

Ключові слова: механіка руйнування, коефіцієнт інтенсивності напружень, кутовий виріз, антиплоска деформація, гострокутний отвір, метод сингулярних інтегральних рівнянь.

Єдиний підхід до розв'язування плоских задач теорії пружності та механіки руйнування тіл з гострими та закругленими кутовими вирізами (I та II типи деформування) [1–5] поширено на відповідні антиплоскі задачі (III тип деформування). Ґрунтуючись на отриманих раніше [6] залежностях між коефіцієнтом концентрації напружень у закругленій вершині кутового вирізу та коефіцієнтом інтенсивності напружень (КІН) у відповідній гострій вершині, побудували розв'язки задач про концентрацію напружень біля гострокутних отворів різної конфігурації. Розв'язки крайових задач для площини, послабленої отворами із закругленими вершинами, отримано методом сингулярних інтегральних рівнянь [7], який тут дає змогу досить точно знайти розподіл напружень біля вершин отвору, закруглених дугою кола малого відносного радіуса.

Розподіл напружень на контурі кутового вирізу за антиплоскої деформації [6]. Спочатку розглянемо антиплоску задачу на власні значення для пружного клина, що займає область $S = \{(r, \theta); r \geq 0, -\alpha \leq \theta \leq \alpha\}$, де r, θ – полярні координати з полюсом у вершині клина і полярною віссю вздовж його діагоналі: $z = x + iy = re^{i\theta}$ (рис. 1а). На гранях клина відсутні дотичні напруження:

$$\tau_{\theta z} = 0, \quad \theta = \pm\alpha. \quad (1)$$

Переміщення w та напруження $\tau_{rz}, \tau_{\theta z}$ у клині виразимо через комплексні потенціали $f_0(z)$ і $F_0(z) = f_0'(z)$ за формулами [7]

$$Gw(x, y) = \operatorname{Re} f_0(z), \quad \tau_{rz} - i\tau_{\theta z} = e^{i\theta} F_0(z), \quad (2)$$

де G – модуль зсуву.

Задовольнивши крайові умови (1) з урахуванням співвідношень (2), знайшли комплексний потенціал напружень $F_0(z)$, який визначає розклад сингулярних напружень у клині [6, 8]:

$$F_0(z) = -\frac{i\tilde{K}_{III}^V}{(2\pi z)^{\lambda_{III}}}, \quad (3)$$

де параметр $\lambda_{III} = 1 - \pi/(2\alpha)$ характеризує порядок особливості поля напружень поздовжнього зсуву у вершині клина, а \tilde{K}_{III}^V – КІН у цій вершині, який уведено за допомогою співвідношення [9]

$$\tilde{K}_{III}^V = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(2\pi x)^{\lambda_{III}} \tau_{\theta z}(x, 0) \right].$$

Зазначимо, що у літературі використовують також інше його визначення:

$$K_{III}^V = (2\pi)^{1/2-\lambda_{III}} \tilde{K}_{III}^V.$$

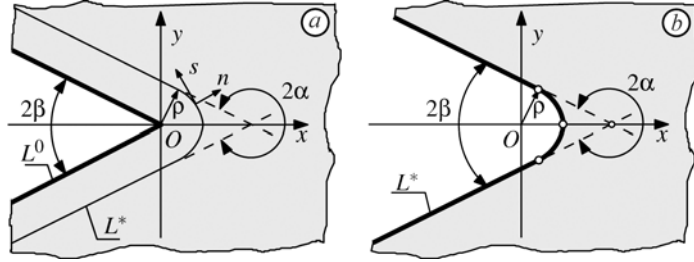


Рис. 1. Гострий (а) та закруглений (б) кутові вирізи у пружній площині.

Fig. 1. Sharp (a) and rounded (b) V-notches in an elastic plane.

Розглянемо тепер напівнескінченний закруглений кутовий виріз у пружній площині, контур L^* якого складається з двох променів, з'єднаних плавною дугою кола радіуса ρ (рис. 1b). Розв'язок задачі про розподіл напружень у такій області отримано методом суперпозиції, коли основний напружений стан визначає потенціал $F_0(z)$ (3), а збурений, викликаний розрізом вздовж контуру L^* у клині (рис. 1a), знайдено [6] методом сингулярних інтегральних рівнянь [7]. У результаті для максимальних дотичних напружень у вершині закругленого вирізу отримано залежність

$$\tau_{\max} = \tau_{\theta z}(\rho, 0) = \tilde{K}_{III}^V R_{III} (2\pi\rho)^{-\lambda_{III}}, \quad (4)$$

де ρ – радіус закруглення вершини вирізу, а R_{III} – коефіцієнт впливу закруглення вирізу на напруження в його вершині.

На основі отриманих числових результатів для коефіцієнта R_{III} побудовано апроксимаційну формулу [6]

$$R_{III} = \frac{1 + 17,845\gamma + 20,266\gamma^2 - 19,123\gamma^3 + 9,502\gamma^4 - 1,916\gamma^5}{1 + 14,248\gamma}, \quad \gamma = \pi/2 - \beta,$$

відносна похибка якої не перевищує 0,1% для всіх кутів $\beta \in [0, \pi/2]$.

Співвідношення (4) для обмежених тіл має асимптотичний характер: воно тим точніше, що менший радіус закруглення вирізу. Знаючи КІН \tilde{K}_{III}^V у вершині гострого кутового вирізу, за співвідношенням (4) легко дослідити концентрацію напружень в околі вершини вирізу малого радіуса кривини, тобто тоді, коли знайти числовий розв'язок складно. З іншого боку, побудовану залежність можна також використати для знаходження КІН у гострих вершинах кутових вирізів у тілах різної геометрії, скориставшись розв'язками для відповідних закруглених кутових вирізів, за допомогою граничного переходу:

$$\tilde{K}_{III}^V = \frac{1}{R_{III}} \lim_{\rho \rightarrow 0} [(2\pi\rho)^{\lambda_{III}} \tau_{\max}]. \quad (5)$$

Застосування цього підходу проілюструємо на задачах про гострокутні отвори у пружній площині.

Інтегральне рівняння задачі [7]. Розглянемо антиплоску задачу теорії пружності для площини, послабленої криволінійним отвором з гладким контуром L . Уважатимемо, що на нескінченності задані зсувні напруження $\tau_{yz}^{\infty} = \tau$, а край отвору вільний від зовнішніх навантажень:

$$\tau_{nz}^*(t) = 0, \quad t \in L.$$

Комплексний потенціал напружень задачі шукатимемо у вигляді

$$F_*(z) = F_0(z) + F(z),$$

де потенціал $F_0(z) = -i\tau$ описує основний напружений стан у суцільній площині без отвору, а функція $F(z)$ визначає збурений стан, викликаний отвором.

Крайова умова для збурених напружень має вигляд

$$\tau_{nz}(t) = \text{Im} \left[F(t) \frac{dt}{ds} \right] = \tau(t) = -\text{Im} \left[F_0(t) \frac{dt}{ds} \right], \quad t \in L, \quad (6)$$

де s – дугова абсциса точки $t \in L$. Збурені напруження на нескінченності згасають до нуля. Комплексний потенціал $F(z)$ шукаємо у вигляді [7]

$$F(z) = \frac{1}{i\pi} \int_L \frac{\gamma'(t)}{t-z} dt, \quad (7)$$

де $\gamma'(t)$ – невідома неперервна на контурі L функція. За додатний напрям обходу контуру L виберемо той, за якого пружна область залишається зліва. Підставивши потенціал (7) у крайову умову (6), прийдемо до сингулярного інтегрального рівняння

$$\frac{1}{\pi} \int_L K(t, t') \gamma'(t) dt + a_0 = \tau(t'), \quad t' \in L, \quad (8)$$

де ядро $K(t, t')$ визначає залежність

$$K(t, t') = \text{Re} \left(\frac{1}{t-t'} \frac{dt'}{ds'} \right).$$

До лівої частини інтегрального рівняння (8) додано нульовий (за однозначності переміщень) оператор

$$a_0 = \frac{1}{\pi l} \int_L \gamma'(t) dt,$$

який забезпечує його розв'язуваність для довільної правої частини. Тут l – довільний параметр розмірності довжини.

Записавши параметричне рівняння контуру L у вигляді

$$t = l\omega(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 2\pi \quad (t' = l\omega(\eta), \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi),$$

подамо інтегральне рівняння (8) у канонічній формі:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} M(\xi, \eta) \gamma'(\xi) d\xi = \tau(\eta), \quad 0 \leq \eta < 2\pi, \quad (9)$$

де $M(\xi, \eta) = IK(l\omega(\xi), l\omega(\eta)) + 1$; $\gamma'(\xi) = \gamma'(l\omega(\xi))\omega'(\xi)$; $\tau(\eta) = \tau(l\omega(\eta))$; $\gamma'(\xi)$ – шукана 2π -періодична неперервна функція. Застосувавши до інтегрального рівняння (9) квадратурні формули з рівновіддаленими вузлами, зведемо його до системи лінійних алгебричних рівнянь [7]. Для збільшення точності числового розв'язування для малих відносних радіусів закруглення вершин отвору використовують різні нелінійні перетворення, які призводять до згущення квадратурних вузлів в

околі цих вершин. Для отвору з N рівновіддаленими вершинами використано сигмоїдне перетворення [2, 10]

$$\xi = G(\tau) = \tau - (A/N) \sin(\tau N), \quad 0 \leq \tau \leq 2\pi,$$

де A – довільна дійсна стала з інтервалу $[0, 1)$. Зробивши заміну

$$\xi = G(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq 2\pi, \quad \eta = G(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (10)$$

зведемо інтегральне рівняння (9) до вигляду

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} M(\xi, \eta) \varphi'(\xi) G'(\tau) d\tau = \tau(\eta), \quad (11)$$

де $\varphi'(\tau) = \varphi'(G(\tau))$, $\tau(\eta) = \tau(G(\theta))$.

Дискретним аналогом інтегрального рівняння (11) є система лінійних алгебричних рівнянь

$$\frac{2}{4n} \sum_{k=1}^{4n} [M(\xi_k, \eta_m) u(\xi_k)] G'(\tau_k) = p(\eta_k), \quad k, m = 1, \dots, 4n, \quad (12)$$

де $\xi_k = G(\tau_k)$, $\tau_k = \pi(2k-1)/(4n)$, $k = 1, \dots, 4n$; $\eta_m = G(\theta_m)$, $\theta_m = 2\pi(m-1)/(4n)$, $m = 1, \dots, 4n$.

Уважатимемо, що контур отвору симетричний відносно осей Ox і Oy . Тоді, врахувавши умови симетрії [7] $\gamma'(\bar{t}) = \gamma'(t)$, $\gamma'(-t) = -\gamma'(t)$, $t \in L$, можна зменшити у чотири рази порядок системи (12):

$$\frac{1}{2n} \left\{ [M(0, \eta_m) - M(\pi, \eta_m)] \varphi'(0) + \sum_{k=2}^n [M(\xi_k, \eta_m) - M(\pi - \xi_k, \eta_m) - M(\pi + \xi_k, \eta_m) + M(2\pi - \xi_k, \eta_m)] \varphi'(\xi_k) \right\} = p(\eta_m), \quad m = 1, \dots, 4n.$$

Знаючи функцію $\varphi'(t)$, за формулою (7) знаходимо потенціал $F(z)$, який визначає збурений напружено-деформований стан у всій пружній області. Однак, якщо отвір ненавантажений, дотичні напруження τ_{sz}^* на його краю можна знайти безпосередньо через функцію $\varphi'(\xi)$ [11]:

$$\tau_{sz}^*(\xi) = -\operatorname{Im} \left(F_0(l\omega(\xi)) \frac{\omega'(\xi)}{|\omega'(\xi)|} \right) - 2 \frac{\varphi'(\xi)}{|\omega'(\xi)|}.$$

Еліптичний отвір. Для такого отвору в пружній площині, коли параметричне рівняння контуру L має вигляд

$$t = l\omega(\xi) = l(\cos \xi - i\sqrt{\varepsilon} \sin \xi), \quad 0 \leq \xi \leq 2\pi,$$

можна отримати замкнений аналітичний розв'язок [12, 13]. Тут $2l$ – велика вісь еліпса, $\varepsilon = \rho/l$ – відносний радіус кривини у вершині отвору (на осі Ox).

Для дотичного напруження τ_{sz} на краю отвору маємо [12]:

$$\tau_{sz}(\xi) = \tau(1 + \sqrt{\varepsilon}) \frac{\cos \xi}{\sqrt{\sin^2 \xi + \varepsilon \cos^2 \xi}}.$$

Його максимальне значення досягається у вершині отвору:

$$\tau_{\max} = \tau_{sz}(0) = \tau(1 + \sqrt{l/\rho}) = \tau(1 + 1/\sqrt{\varepsilon}). \quad (13)$$

Звідси, зокрема, впливає зв'язок між максимальним напруженням у вершині напівнескінченного параболічного вирізу τ_{\max} та КІН для відповідної тріщини [9], якщо перейти до границі, коли велика вісь еліпса прямує до нескінченності:

$$\tau_{\max} = K_{III} R_{III} / \sqrt{2\pi\rho}, \quad \text{де } K_{III} = \tau\sqrt{\pi l}.$$

Фізична щілина. Розглянемо задачу про концентрацію напружень біля фізичної щілини – вузького отвору, контур якого творять два паралельні відрізки, гладко з'єднані на кінцях двома півколами радіуса ρ . Довжину щілини (проекцію отвору на вісь Ox) позначимо $2l$ (див. схему на рис. 2), а відносний радіус кривини у вершині – через $\varepsilon = \rho/l$.

Ураховуючи симетрію контуру отвору відносно осей Ox і Oy , запишемо його параметричне рівняння у вигляді

$$t = l\omega(\xi) = l \begin{cases} \omega_0(\xi), & 0 \leq \xi < \pi/2, \\ -\omega_0(\pi - \xi), & \pi/2 \leq \xi < \pi, \\ -\omega_0(\xi - \pi), & \pi \leq \xi < 3\pi/2, \\ -\omega_0(2\pi - \xi), & 3\pi/2 \leq \xi < 2\pi, \end{cases} \quad (14)$$

де функція $\omega_0(\xi)$ описує частину контуру L у четвертій частині системи координат:

$$\omega_0(\xi) = \begin{cases} 1 - \varepsilon + \varepsilon[\cos(c\xi) - i \sin(c\xi)], & 0 \leq \xi < \pi/(2c), \\ \varepsilon c(\pi/2 - \xi) - i\varepsilon, & \pi/(2c) \leq \xi < \pi/2. \end{cases}$$

Довжина контуру L рівна $2\pi\rho c$, де $c = 1 + 2(1/\varepsilon - 1)/\pi$.

Обчислювали для значень параметра $\varepsilon \in [10^{-6}; 1]$. На основі отриманих числових результатів побудовано залежність добутку $\tau_{\max} \sqrt{\varepsilon}/\tau$ від параметра ε (рис. 2), що дало змогу перейти до математичної щілини ($\varepsilon \rightarrow 0$) та отримати для неї на основі залежності (5) відоме значення КІН: $K_{III} = \tau \sqrt{\pi l}$.

Для максимальних напружень у вершині фізичної щілини побудовано апроксимувальну формулу

$$\tau_{\max} = \tau \left(\frac{1,3442}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon} + 0,5249} \right), \quad (15)$$

максимальна відносна похибка якої не перевищує 0,4% (для $\varepsilon = 0,3$). Числові коефіцієнти у формулі (15) отримано з умов: $\tau_{\max} = 2\tau$ для $\varepsilon = 1$ та $\tau_{\max} \rightarrow \rightarrow K_{III} R_{III} / \sqrt{2\pi\rho}$, коли $\varepsilon \rightarrow 0$.

Порівняння значень максимальних напружень у вершинах еліптичного отвору (13) та фізичної щілини (15) свідчить, що найбільша відносна різниця між ними (близько 35%) досягається, якщо $\varepsilon \rightarrow 0$. Зі збільшенням параметра ε ця різниця монотонно спадає до нуля (для $\varepsilon = 1$).

Овальний отвір. Нехай контур L складається з двох симетричних дуг кола радіуса R , дотичні до яких у кінцевих точках перетинаються під кутом 2β . Кінці цих дуг гладко з'єднані між собою дугами кіл радіуса ρ . Довжину проекції отвору на вісь Ox позначимо через $2l$. Відношення цих радіусів кіл до половини проекції отвору на вісь Ox описують параметри $\varepsilon = \rho/l$ і $\tilde{\varepsilon} = R/l$. Коли $\rho \rightarrow 0$, овальний отвір переходить у двокутний лінзоподібний. Параметричне рівняння контуру L має вигляд (14), де

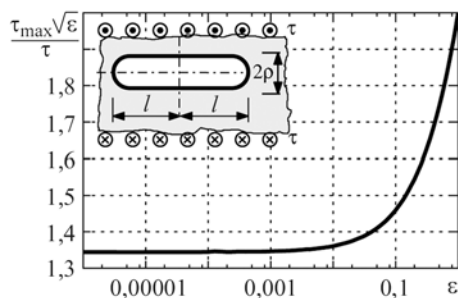


Рис. 2. Залежність добутку $\tau_{\max} \sqrt{\varepsilon}/\tau$ від параметра ε у вершині фізичної щілини.

Fig. 2. Dependence of the product $\tau_{\max} \sqrt{\varepsilon}/\tau$ on parameter ε at the physical slot vertex.

$$\omega_0(\xi) = \begin{cases} (1-\varepsilon) + \varepsilon \cos \frac{c\xi}{\varepsilon} - i \sin \frac{c\xi}{\varepsilon}, & 0 \leq \xi < \xi_B, \\ \tilde{\varepsilon} \cos \left(\frac{c(\xi - \xi_B)}{\tilde{\varepsilon}} + \theta_B \right) + i \left[\cos \beta - \sin \left(\frac{c(\xi - \xi_B)}{\tilde{\varepsilon}} + \theta_B \right) \right], & \xi_B \leq \xi < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Тут } \xi_B = \frac{\varepsilon \theta_B}{c}, \quad c = 2\varepsilon \frac{\theta_B}{\pi} + \tilde{\varepsilon} \left(1 - 2 \frac{\theta_B}{\pi} \right), \quad \theta_B = \arctg \left(\frac{\tilde{\varepsilon} \cos \beta}{1 - \varepsilon} \right).$$

Розраховували максимальні напруження у вершині овального отвору (рис. 3). Сійкі результати одержано для значень параметрів $\varepsilon \in [10^{-6}; 1]$ і $\beta \in [0; 89,5^\circ]$.

На основі отриманих числових результатів за допомогою граничного переходу (5), коли відносний радіус закруглення вершин овального отвору $\varepsilon \rightarrow 0$, знайдено безрозмірний КІН $F_{III}^V = K_{III}^V / [\tau l^{\lambda_{III}} \sqrt{\pi}]$ у вершинах двокутного лінзоподібного отвору (рис. 4).

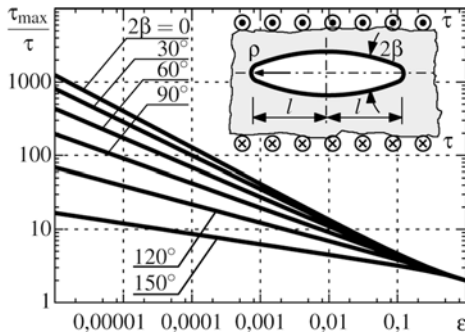


Рис. 3. Fig. 3.

Рис. 3. Залежність коефіцієнта концентрації напружень τ_{\max}/τ у вершині овального отвору від параметра ε для різних кутів 2β .

Fig. 3. Dependence of the stress concentration factor, τ_{\max}/τ , at the vertex of an oval hole on parameter ε for different opening angles 2β .

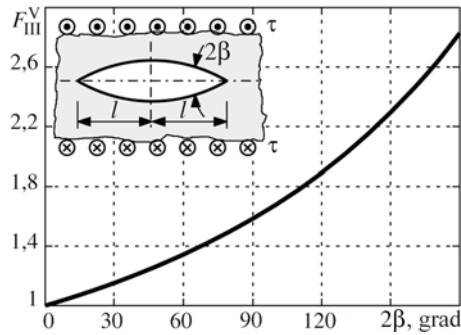


Рис. 4. Fig. 4.

Рис. 4. Залежність безрозмірного КІН F_{III}^V від кута розхилу 2β вершини лінзоподібного отвору.

Fig. 4. Dependence of the dimensionless stress intensity factor, F_{III}^V , on the opening angle 2β of a lens-shaped hole vertex.

Ромбічний отвір. Розглянемо пружну площину, послаблену ромбічним отвором із закругленими вершинами дугами радіусів ρ (на осі Ox) і ρ' (на осі Oy) (див. схему на рис. 5). Довжину проєкції отвору на вісь Ox позначимо $2l$. Параметричне рівняння контуру отвору L має вигляд (14), де

$$\omega_0(\xi) = \begin{cases} (1-\varepsilon) + \varepsilon \cos(c\xi/\varepsilon) - i \sin(c\xi/\varepsilon), & 0 \leq \xi < \xi_B, \\ (1-\varepsilon) + \varepsilon \sin \beta - c(\xi - \xi_B) \cos \beta - \\ -i \left[\varepsilon \cos \beta + c(\xi - \xi_B) \sin \beta \right], & \xi_B \leq \xi < \xi_C, \\ -\varepsilon \sin \left[c(\xi - \xi_C)/\varepsilon - \beta \right] - \\ -i \left\{ (1-\varepsilon) \operatorname{tg} \beta + \varepsilon \cos \left[c(\xi - \xi_C)/\varepsilon - \beta \right] \right\}, & \xi_C \leq \xi < \pi/2. \end{cases}$$

$$\text{Тут } \xi_B = \varepsilon(\pi/2 - \beta)/c, \quad \xi_C = \xi_B + ((1-\varepsilon)/c) \sec \beta, \quad c = \varepsilon + (2(1-\varepsilon)/\pi) \sec \beta.$$

Обчислено максимальні напруження у вершині ромбічного отвору, вершини якого закруглені дугами однакового радіуса ($\rho = \rho'$) (рис. 5). Стійкі результати отримано для значень параметрів $\varepsilon \geq 10^{-6}$ та $\beta \in [0^\circ; 87^\circ]$.

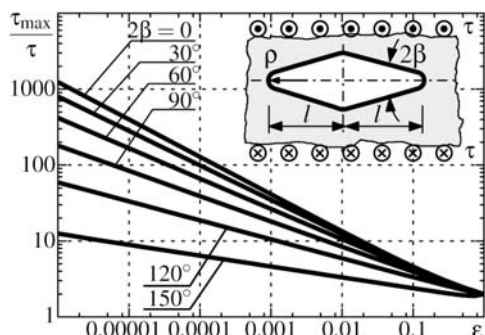


Рис. 5. Fig. 5.

Рис. 5. Залежність коефіцієнта концентрації напружень τ_{\max}/τ у вершині ромбічного отвору від параметра ε для різних кутів 2β .

Fig. 5. Dependence of the stress concentration factor, τ_{\max}/τ , at the vertex of a rhombic hole on parameter ε for different angles 2β .

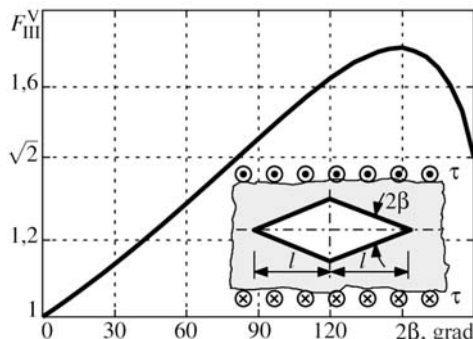


Рис. 6. Fig. 6.

Рис. 6. Залежність безрозмірного КІН $F_{III}^V = K_{III}^V / [\tau l^{\lambda_{III}} \sqrt{\pi}]$ від кута розхилу 2β вершини ромбічного отвору.

Fig. 6. Dependence of the dimensionless stress intensity factor, $F_{III}^V = K_{III}^V / [\tau l^{\lambda_{III}} \sqrt{\pi}]$, on the opening angle 2β of a rhombic hole vertex.

У граничному випадку ($\varepsilon \rightarrow 0$) за залежністю (5) знайдено КІН у гострій вершині ромбічного отвору (рис. 6). Отримані значення КІН добре узгоджуються (відносна похибка не перевищує 0,1%) з відомим аналітичним розв'язком [14]

$$F_{III}^V = \sqrt{2} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{-\lambda_{III}} \left[-B \left(\frac{\alpha}{\pi}, \frac{3}{2} - \frac{\alpha}{\pi} \right) \cos \alpha \right]^{-\lambda_{III}}, \quad \alpha = \pi - \beta,$$

знайденим методом конформних відображень. Тут $B(x, y)$ – бета-функція.

Прямокутний отвір. Нехай площина послаблена прямокутним отвором із закругленими вершинами дугами кіл радіуса ρ . Проекції отвору на осі Ox і Oy відповідно рівні $2l$ і $2b$. Уведемо параметри: $\varepsilon = \rho/l$ ($0 < \varepsilon \leq 1$) – відносний радіус закруглення вершин і $\gamma = l/b$ ($\varepsilon \leq \gamma < \infty$) – відносне видовження отвору. Параметричне рівняння контуру отвору L має вигляд (14), де

$$\omega_0(\xi) = \begin{cases} \gamma - ic\xi, & 0 \leq \xi \leq \xi_A, \\ (\gamma - \varepsilon) + \varepsilon \cos \phi - i[(1 - \varepsilon) + \varepsilon \sin \phi], & \xi_A \leq \xi \leq \xi_C, \\ (\gamma - \varepsilon) - c(\xi - \xi_C) - i, & \xi_C \leq \xi \leq \pi/2. \end{cases}$$

Тут $\phi = c(\xi - \xi_A)/\varepsilon$; $c = \varepsilon + 2[(1 - \varepsilon) + (\gamma - \varepsilon)]/\pi$; $\xi_A = (1 - \varepsilon)/c$; $\xi_B = \xi_A + \pi\varepsilon/(4c)$; $\xi_C = \xi_A + \pi\varepsilon/2c$.

Обчислено розподіл напружень в околі закругленої вершини прямокутного отвору ($b/l = 0,5$) на його контурі. Зі зменшенням параметра ε точка, в якій напруження досягають максимального значення, наближається до вершини отвору. Для збільшення точності розв'язування інтегрального рівняння використано мо-

дифікацію нелінійного перетворення (10) на нерівновіддалені вершини отвору [5]. Безрозмірні КІН $F_{III}^V = K_{III}^V / [\tau l^{1/3} \sqrt{\pi}]$ і $\tilde{F}_{III}^V = F_{III}^V (b/l)^{1/6}$ у гострій вершині прямокутного отвору отримано за формулою (5) для значень $0,02 \leq b/l \leq 1$ (рис. 7a).

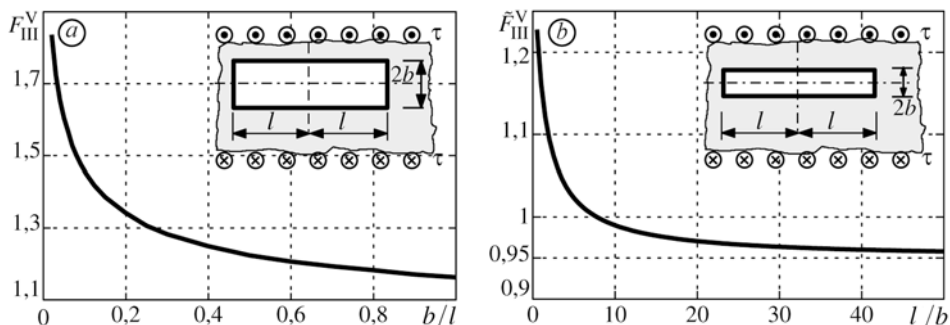


Рис. 7. Залежності безрозмірних КІН F_{III}^V і \tilde{F}_{III}^V у вершині прямокутного отвору від відносних видовжень b/l (a) і l/b (b).

Fig. 7. Dependences of the dimensionless stress intensity factors, F_{III}^V , and, \tilde{F}_{III}^V , at the vertex of a rectangular hole on relative elongations b/l (a) and l/b (b).

На основі цих числових результатів для безрозмірного КІН побудовано апроксимувальну формулу

$$F_{III}^V = (b/l)^{-1/6} (0,6255 + b/l) / (0,659 + 0,739 b/l), \quad 0,02 \leq b/l \leq 1,$$

відносна похибка якої не перевищує 0,5%.

Для видовжених отворів, коли відношення $b/l \rightarrow 0$, КІН у вершині прямокутного отвору можна подати у вигляді

$$K_{III}^V = F_{III}^V \tau l^{\lambda_{III}} \sqrt{\pi} = F_{III}^V \tau l^{1/3} \sqrt{\pi} = F_{III}^V l^{-1/6} \tau \sqrt{\pi l} = \tilde{F}_{III}^V K_{III} b^{-1/6},$$

де $\tilde{F}_{III}^V = F_{III}^V (b/l)^{1/6}$ (рис. 7b), $K_{III} = \tau \sqrt{\pi l}$.

Функція \tilde{F}_{III}^V прямує до граничного значення $\tilde{F}_{III}^V \approx 0,95$, коли відношення $l/b \rightarrow \infty$. У результаті отримуємо КІН K_{III}^V у вершині напівнескінченного прямокутного вирізу:

$$K_{III}^V = 0,95 b^{\lambda_{III} - 1/2} K_{III},$$

де K_{III} – КІН у вершині відповідної напівнескінченної тріщини.

ВИСНОВКИ

Розвинуто єдиний підхід до розв'язування антиплоских задач теорії пружності для тіл з гострими та закругленими кутовими вирізами. Методом сингулярних інтегральних рівнянь знайдено розв'язки антиплоских задач теорії пружності про концентрацію напружень біля криволінійних отворів із закругленими вершинами. На основі раніше побудованої авторами залежності між коефіцієнтами інтенсивності та концентрації напружень у гострій та закругленій вершинах кутового вирізу визначено КІН у гострих вершинах лінзоподібного, ромбічного та прямокутного отворів. Порівняння отриманих результатів з відомими розв'язками підтвердили високу точність запропонованого підходу. За допомогою граничного переходу, коли відношення сторін прямокутного отвору прямує до нескінченності, отримано залежність КІН у вершині напівнескінченного прямокутного вирізу через КІН для відповідної напівнескінченної тріщини.

РЕЗЮМЕ. Методом сингулярных интегральных уравнений получены решения антиплоских задач теории упругости для плоскости, ослабленной криволинейными отверстиями с закругленными и острыми вершинами. Коэффициенты интенсивности напряжений в острых вершинах найдены предельным переходом от закругленных вершин с помощью зависимости между коэффициентами интенсивности и концентрации напряжений в острой и закругленной вершинах углового выреза. Численные результаты получены для отверстий различной конфигурации: эллиптического, физической щели, овального, ромбического и прямоугольного.

SUMMARY. Solutions of antiplane elasticity problems for a plane weakened by curvilinear holes with rounded and sharp vertexes are obtained by the singular integral equation method. The stress intensity factors at the sharp vertexes are found by limiting transition from the rounded vertexes, using the relationship between the stress intensity factor and the stress concentration factor at the sharp and rounded vertexes. Numerical results are obtained for the holes of different shapes: elliptical, physical slot, oval, rhombic, and rectangular.

Робота виконана за проектом № 2011/03/В/ST8/06456, який фінансує Національний центр науки (Польща).

1. Саврук М. П., Казберук А. Зв'язок між коефіцієнтами інтенсивності та концентрації напружень для гострих і закруглених кутових вирізів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2006. – **42**, № 6. – С. 17–26.
(Savruk M. P. and Kazberuk A. Relationship between the stress intensity and stress concentration factors for sharp and rounded notches // Materials Science. – 2006. – **42**, № 6. – P. 725–738.)
2. Саврук М. П., Казберук А. Единый подход к решению задач о концентрации напряжений около острых и закругленных угловых вырезов // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 2. – С. 70–87.
3. Savruk M. P. and Kazberuk A. Two-dimensional fracture mechanics problems for solids with sharp and rounded V-notches // Int. J. Fract. – 2010. – **161**, № 1. – P. 79–95.
4. Kazberuk A. Dwuwymiarowe zagadnienia mechaniki pękania ciał z krawkami. – Białystok: Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej, 2010. – 242 s.
5. Саврук М. П., Казберук А. Розподіл напружень біля кутових вирізів за складного напруженого стану // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2011. – **47**, № 4. – С. 52–61.
(Savruk M. P. and Kazberuk A. Distribution of stresses near V-shaped notches in the complex stressed state // Materials Science. – 2011. – **47**, № 4. – P. 476–487.)
6. Саврук М. П., Казберук А., Тарасюк Г. Розподіл напружень на контурі кутового закругленого вирізу за антиплоскої деформації // Там же. – 2011. – **47**, № 6. – С. 7–14.
(Savruk M. P., Kazberuk A., and Tarasyuk G. Distribution of stresses over the contour of a rounded V-shaped notch under antiplane deformation // Materials Science. – 2011. – **47**, № 6. – P. 717–725.)
7. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
8. Benthem J. P. Stresses in the region of rounded corners // Int. J. Solids Struct. – 1987. – **23**, № 2. – P. 239–252.
9. Seweryn A. Metody numeryczne w mechanice pękania. – Warszawa: IPPT PAN, 2003. – 361 s.
10. Sidi A. A new variable transformation for numerical integration // Numerical Integration IV / Eds. H. Brass, G. Hammerlin. – Basel: Birkhäuser, 1993. – **112**. – P. 359–373.
11. Саврук М. П., Осив П. Н., Прокопчук И. В. Численный анализ в плоских задачах теории трещин. – К.: Наук. думка, 1989. – 248 с.
12. Neuber H. Kerbspannungslehre: Theorie der Spannungskonzentration; genaue Berechnung der Festigkeit. – Berlin: Springer-Verlag, 1985. – 326 s.
13. Су Г., Либовиц Г. Математическая теория хрупкого разрушения // Разрушение / Под ред. Г. Либовица. – М.: Мир, 1975. – Т. 2. – С. 83–203.
14. Kohno Y. and Ishikawa H. Singularities and stress intensities at the corner point of a polygonal hole and rigid polygonal inclusion under antiplane shear // Int. J. Eng. Sci. – 1995. – **33**, № 11. – P. 1547–1560.

Одержано 13.07.2012