

Динамика и торможение вихря в сверхпроводнике II рода со слабыми неоднородностями

А. Ю. Галкин

Институт металлофизики НАН Украины, Украина, 252142, г. Киев, пр. Вернадского, 36

Б. А. Иванов

Институт магнетизма НАН Украины, Украина, 252142, г. Киев, пр. Вернадского, 36, б
E-mail: vbaryakhtar@bitp.kiev.ua

Статья поступила в редакцию 20 апреля 1999 г.

Исследована динамика вихревой решетки Абрикосова и отдельного вихря с учетом как инерционных, так и гироскопических (холловских) свойств сверхпроводника при наличии дефектов. Без учета дефектов спектр собственных колебаний вихрей имеет две ветви. При малых k одна из ветвей — бесщелевая и имеет квадратичный закон дисперсии, а вторая имеет конечную щель. При больших k закон дисперсии обеих мод становится линейным (звукоподобным). Показано, что вследствие взаимодействия с дефектами в движущемся вихре или вихревой решетке происходит возбуждение колебаний, отвечающих этим модам. Это приводит к появлению дополнительного канала диссипации энергии поступательного движения вихря. Для уединенного вихря соответствующая сила торможения расходится при $V \rightarrow 0$ как $V^{-1/2}$, т.е. при малых скоростях она превалирует над обычной силой вязкого трения.

Досліджено динаміку ґратки вихорів Абрикосова та окремого вихора при урахуванні як інерційних, так і гіроскопічних (холівських) властивостей надпровідника при наявності дефектів. Без урахування дефектів спектр власних коливань вихорів має дві гілки. При малих k одна з гілок — безщілинна і має квадратичний закон дисперсії, а друга має кінцеву щілину. При великих k закон дисперсії обох мод стає лінійним (звукоподібним). Виявлено, що внаслідок взаємодії з дефектами у вихорі, що рухається, або у вихоровій ґратці збуджуються коливання, що відповідають цим модам. Останнє приводить до появи додаткового каналу дисипації енергії поступального руху вихора. У випадку відокремленого вихора відповідна сила гальмування розбігається при $V \rightarrow 0$ як $V^{-1/2}$, тобто при малих швидкостях вона має перевагу над звичайною силою в'язкого тертя.

PACS: 74.60.Ge, 74.25.-q

Динамика вихрей и вихревых решеток в сверхпроводниках, их пиннинг на дефектах и процессы депиннинга определяют основные физические свойства сверхпроводников второго рода, существенные для их применения (см. обзор [1]). Динамика вихрей в различных упорядоченных средах (сверхпроводниках, сверхтекучих фазах ^4He и ^3He) представляет собой достаточно сложное явление, при анализе которого необходимо, вообще говоря, учитывать инерционные и диссипативные свойства вихрей, наличие гироскопической (для сверхпроводников — холловской) силы, а также дефектов. В частности, эти свойства проявляются в существовании особых коллективных мод вихревой системы. Эти моды наблюдались в резо-

нансных экспериментах для ^4He [2]. Для высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП) интерес к ним возрос в последние годы после опубликования результатов экспериментов по магнитному поглощению в $\text{Bi}_2\text{Si}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+x}$ [3], в которых наблюдался резонанс, связанный с собственными вихревыми модами. Однако описание вынужденного движения вихрей и вихревых решеток в ВТСП обычно проводится в чисто диссипативном приближении, без учета особенностей отклика системы с локальными модами (см. обзор [1]).

В настоящей работе исследована динамика вихревой решетки и отдельного вихря в сверхпроводнике с учетом как инерционных, так и гироскопических свойств сверхпроводника при наличии дефектов.

скопических (холловских) свойств при наличии дефектов. Спектр собственных колебаний вихрей без учета дефектов имеет две ветви. При малых волновых векторах q одна из ветвей — бесщелевая и имеет квадратичный закон дисперсии, а вторая имеет конечную щель. При больших q закон дисперсии обеих мод становится линейным (звукоподобным).

Вследствие взаимодействия с дефектами в движущемся вихре или движущейся вихревой решетке происходит возбуждение колебаний, отвечающих этим модам. Это приводит к появлению дополнительного канала диссипации энергии поступательного движения вихря. Поскольку закон дисперсии бесщелевой, такая диссипация проявляется при сколь угодно малой скорости V вихря. Она отлична от нуля даже в пренебрежении начальной (затравочной) диссипацией в уравнении движения для вихря. В этом случае вихрь тормозится из-за того, что энергия его поступательного движения необратимо передается элементарным возбуждениям (квантам собственных мод).

Характер этой силы торможения существенно зависит от расстояния между вихрями. В том случае, когда плотность вихрей велика, они сильно взаимодействуют и образуют решетку. Решетка вихрей может быть как трехмерной (3D), так и двумерной (2D), последний случай (реализация так называемых *raisance vortices* [1]) характерен для предельно анизотропных сверхпроводников. Для обоих случаев анализ показал, что вклад в диссипацию движущейся вихревой решетки из-за взаимодействия с дефектами мал, но он возрастает при уменьшении плотности решетки. Таким образом, эффект максимален для слабовзаимодействующих вихрей. Для случая уединенного вихря дополнительный вклад в силу торможения расходуется при $V \rightarrow 0$. Последнее качественно согласуется с выводом авторов [4] о том, что амплитуда вынужденных колебаний вихрей в вихревой решетке, движущейся в присутствии дефектов, растет при уменьшении скорости движения решетки.

Динамика вихревой решетки

Рассмотрим динамику вихревой решетки (состоящей из вихрей Абрикосова, параллельных оси z) в отсутствие возмущения. Низкочастотная динамика вихревой решетки может быть описана на основе эффективного уравнения для двумерного вектора $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t)$, лежащего в плоскости x, y и описывающего смещения вихревой решетки [1] (рис. 1).

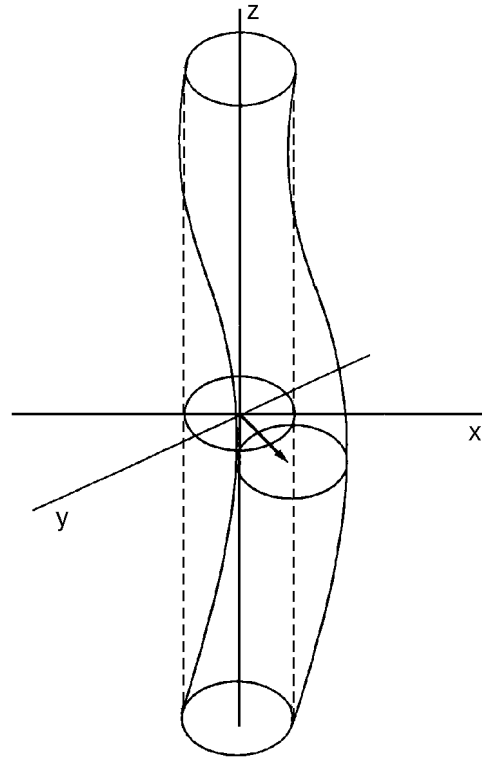


Рис. 1. Недеформированный вихрь (цилиндр, штриховые линии) и деформированный вихрь (сплошные линии), вектор $\mathbf{u}(z, t)$ показан стрелкой.

Бездиссипативная динамика \mathbf{u} определяется следующим лагранжианом:

$$L(\dot{\mathbf{u}}) = \int dx dy dz \left[\frac{\rho}{2} \dot{\mathbf{u}}^2 + \frac{H}{2} (u_x \dot{u}_y - u_y \dot{u}_x) \right] - W\{\mathbf{u}\}. \quad (1)$$

Здесь $\dot{\mathbf{u}} = \partial \mathbf{u} / \partial t$; ρ и H — масса и холловская константа вихрей в решетке на единицу объема; $W\{\mathbf{u}\}$ — энергия деформированной решетки,

$$W(\mathbf{u}) = \int dx dy dz \left[\frac{1}{2} c_{11} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} c_{66} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} c_{44} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right)^2 \right] + U_{\text{imp}}(\mathbf{u}), \quad (1a)$$

которая записывается так же, как в обычной теории упругости; c_{11} , c_{44} , c_{66} — упругие модули решетки. Слагаемое U_{imp} характеризует энергию взаимодействия вихря с дефектами, его структуру мы рассмотрим ниже. Скорость диссипации энергии в системе определяется диссипативной функцией, $dE/dt = -2Q(\dot{\mathbf{u}})$. В теории упругости эта

скорость равна нулю при поступательном движении решетки как целого, поэтому плотность диссипативной функции $Q(\dot{\mathbf{u}})$ пропорциональна $[\partial^2 \mathbf{u} / \partial x_i \partial t]^2$. Для решетки, состоящей из макроскопических объектов типа вихрей, дислокаций и т.д., ситуация иная. Каждый вихрь, двигаясь в среде, испытывает действие силы торможения, и скорость диссипации его энергии пропорциональна $(\partial \mathbf{u} / \partial t)^2$. Поэтому мы выберем диссипативную функцию в виде

$$Q = \frac{\beta}{2} \int dx dy dz \dot{\mathbf{u}}^2, \quad (2)$$

β — коэффициент диссипации, рассчитанный на единицу объема.

Выражения (1), (2) записаны для случая 3D вихревой решетки. Переход к другим интересным случаям, например 2D решетки (pancake vortices) или уединенного вихря, не представляет труда. Достаточно сделать замену $\int dx dy dz \{ \dots \} \rightarrow \int dx dy \{ \dots \}$ (2D случай) или $\int dx dy dz \{ \dots \} \rightarrow \int dz \{ \dots \}$ (уединенный вихрь), а также опустить слагаемые с производными от \mathbf{u} по z (2D случай) или по x, y (уединенный вихрь). Следует также считать, что ρ , β и т.д. описывают характерные величины на единицу площади решетки (2D случай) или на единицу длины уединенного вихря. В частности, для важного случая уединенного вихря надо сделать замены типа $\rho \rightarrow \rho a_v^2$, $\beta \rightarrow \beta a_v^2$, $c_{44} \rightarrow \kappa$, где κ — энергия единицы длины вихря; a_v^2 — площадь вихревой решетки, приходящаяся на один вихрь.

Уравнения движения для переменной \mathbf{u} находятся варьированием уравнений (1) и (2), $\delta L / \delta \mathbf{u} - \delta Q / \delta \dot{\mathbf{u}} = 0$. Без учета взаимодействия с дефектами уравнение движения вихревой решетки можно записать в виде

$$\begin{aligned} \rho \ddot{\mathbf{u}} + H (\mathbf{e}_x \dot{u}_y - \mathbf{e}_y \dot{u}_x) + \beta \dot{\mathbf{u}} - c_{44} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} - \\ - \mathbf{e}_x \left[c_{11} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + c_{66} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right] - \\ - \mathbf{e}_y \left[c_{11} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) - c_{66} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Это уравнение в бездиссипативном пределе ($\beta = 0$) описывает собственные колебания решетки. При малой диссипации соответствующий

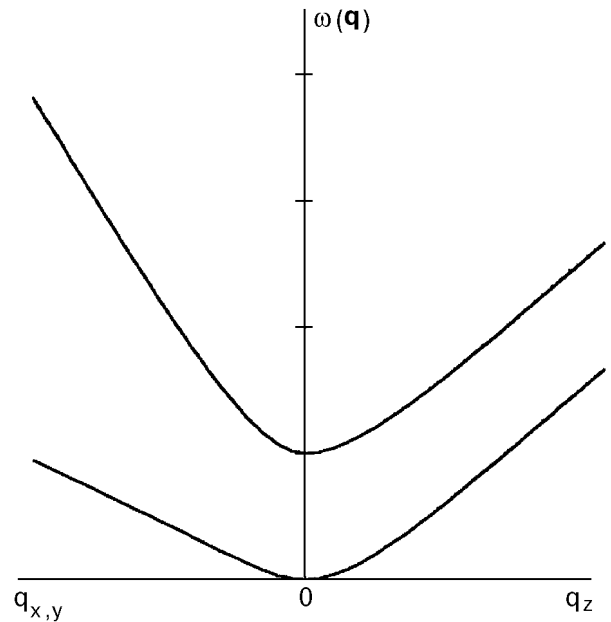


Рис. 2. Закон дисперсии (схематически) для колебаний вихревой решетки при распространении волны вдоль оси вихрей (правая часть графика) и перпендикулярно оси вихрей (левая часть графика).

закон дисперсии $\omega = \omega(\mathbf{q})$ сильно анизотропный (рис. 2) и описывается достаточно громоздкой формулой

$$\begin{aligned} \rho \omega^2 = c_{44} q_z^2 + \frac{1}{2} (c_{11} + c_{66}) q_{\perp}^2 + \frac{H^2}{2\rho} \pm \\ \pm \left[\left(\frac{H^2}{2\rho} \right)^2 + \frac{H^2}{2\rho} [2c_{44} q_z^2 + (c_{11} + c_{66}) q_{\perp}^2] + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} (c_{11} - c_{66})^2 q_{\perp}^4 \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (4)$$

где обозначено $q_{\perp}^2 = q_x^2 + q_y^2$, знаки «+», «-» отвечают двум ветвям колебаний. В предельном случае малых q_z и q_{\perp} выражения для частот верхней и нижней ветвей существенно упрощаются:

$$\omega_{(-)}^2 = \frac{1}{H^2} (c_{44} q_z^2 + c_{66} q_{\perp}^2) (c_{44} q_z^2 + c_{11} q_{\perp}^2), \quad (4a)$$

$$\omega_{(+)}^2 = \frac{H^2}{\rho^2} + \frac{2}{\rho} c_{44} q_z^2 + \frac{1}{\rho} q_{\perp}^2 (c_{11} + c_{66}), \quad (4б)$$

Выражение (4a) соответствует низкочастотной бесщелевой моде. При малых q_z и q_{\perp} закон дисперсии этой моды квадратичен по компонентам \mathbf{q} и не зависит от массы вихря. Для волны, бегущей вдоль направления вихря (предельный случай $q_{\perp} \rightarrow 0$), результат совпадает с полученным еще в работе Де

Жена и Матрикона для уединенного вихря [5] $\omega_{(-)} \rightarrow q_z^2 \kappa / H_1$, где введено значение холловской константы для уединенного вихря H_1 .

Формула (46) при малых q относится к моде с конечной щелью, $\omega_{(+)} \rightarrow H/\rho + [2c_{44}q_z^2 + (c_{11} + c_{66})q_{\perp}^2]/2\rho$. Предельное значение частоты этой моды определяется холловской постоянной H и массой ρ , $\omega_{(+)} \rightarrow H/\rho$ при $q \rightarrow 0$. Таким образом, в однородном случае ($q = 0$) этой моде отвечает циклотронное движение вихрей в решетке. Циклотронное движение вихря в сверхтекучих системах и сверхпроводниках рассматривалось многими авторами с микроскопической точки зрения [6], оно известно также для ферромагнетиков [7] и антиферромагнетиков во внешнем магнитном поле [8]. Отметим, что в сверхпроводниках иногда вводят другую циклотронную частоту ω_c [9], которая определяется циклотронным движением электронов и имеет конечное значение даже без учета массы вихря. Иной механизм формирования щели в спектре собственных мод в решетке, а именно дальнедействующее взаимодействие вихрей, обсуждался Сониным [10]. Естественно, этот механизм, в отличие от циклотронного, не работает для собственных мод колебаний уединенного вихря.

Указанная выше специфика (квадратичный закон дисперсии, наличие щели) обусловлена гиросилой. Только для больших значений q , $cq^2 \gg H/\rho$, гиросила не важна и закон дисперсии обеих мод переходит в стандартный для решеточных систем линейный (квазизвуковой). Соответствующая скорость звука существенно зависит от направления распространения волны:

$$\omega_{(\pm)}^2 = \frac{1}{2\rho} \left[2c_{44}q_z^2 + (c_{66} + c_{11})q_{\perp}^2 \right] \pm \frac{1}{2\rho} |c_{66} - c_{11}| q_{\perp}^2.$$

При распространении волны вдоль направления вихрей обе ветви, естественно, соответствуют поперечным колебаниям со скоростью звука $s_z = (c_{44}/\rho)^{1/2}$. Две ветви, отвечающие распространению в направлении перпендикулярно вихрям, при $cq^2 \gg H/\rho$ представляют собой продольные и поперечные волны со скоростями $s_l = (c_{11}/\rho)^{1/2}$ и $s_t = (c_{66}/\rho)^{1/2}$ соответственно.

Перейдем к рассмотрению взаимодействия вихревой решетки с неоднородностями кристалла. Примем для определенности, что наличие дефектов приводит к зависимости локальной критической температуры T_c от координат. Это можно описать, вводя в разложение Гинзбурга — Ландау зависящий от координат коэффициент $[a_0 + F(\mathbf{r})]|\psi|^2$ [1].

Начнем со случая одного вихря, который в равновесии расположен в некотором узле вихревой решетки \mathbf{l} . Будем считать, что распределение параметра порядка в вихре не меняется при движении вихря и описывается известной функцией $f(r_{\perp})$ [11]. Таким образом, с учетом смещения вихря получим $|\psi|^2 = |\psi_0|^2 f(r_{\perp})$, где $r_{\perp} = [(x - l_x - u_x)^2 + (y - l_y - u_y)^2]^{1/2}$. Тогда энергия U_{imp} , связанная с неоднородностями кристалла, может быть представлена с помощью функции $f(r_{\perp})$ в виде функционала от смещения вихря:

$$U_{\text{imp}} = \int d\tilde{x}d\tilde{y}dz f(r_{\perp}) F[x + l_x + u_x(\mathbf{r}, t), y + l_y + u_y(\mathbf{r}, t), z],$$

где $\tilde{x} = x - l_x - u_x(\mathbf{r}, t)$, $\tilde{y} = y - l_y - u_y(\mathbf{r}, t)$.

Энергию U_{imp} удобно записать в виде разложения Фурье по x, y :

$$U_{\text{imp}} = \frac{1}{S} \sum_{q_x, q_y} f(q_{\perp}) \times \int dz F(q_x, q_y, z) \exp\{-i\mathbf{q}_{\perp} \mathbf{l} - i\mathbf{q}_{\perp} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\}, \quad (6)$$

где $\mathbf{q}_{\perp} = (q_x, q_y, 0)$; $S = L_x L_y$ — площадь сверхпроводника; $f(q_{\perp})$ — форм-фактор вихря;

$$F(q_x, q_y, z) = \int d\xi d\eta F(\xi, \eta, z) e^{iq_x \xi + iq_y \eta},$$

$$f(x, y) = \sum_{q_x, q_y} f(q_{\perp}) e^{iq_x x + iq_y y}.$$

С учетом этого выражения уравнение движения вихрей при наличии дефектов имеет вид (3) с дополнительной силой \mathcal{F}_{imp} в правой части:

$$\mathcal{F}_{\text{imp}} = \sum_{q_x, q_y} i\mathbf{q}_{\perp} f(q_{\perp}) F(q_x, q_y, z) \exp(i\mathbf{q}_{\perp} \mathbf{u}). \quad (7)$$

Общее решение этого нелинейного уравнения с коэффициентами, зависящими от z , невозможно. Однако достаточно полный анализ можно провести, полагая, что вызванные дефектами отклонения от состояния прямолинейного равномерного движения вихрей малы. Считая, что $\mathbf{u} = \mathbf{e}_x Vt + \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)$ и линеаризуя (3), (7) по $\tilde{\mathbf{u}}$, получаем для $\tilde{\mathbf{u}}$ линейное уравнение с правой частью:

$$\begin{aligned} & \ddot{\mathbf{u}} + H[\mathbf{e}_z, \dot{\mathbf{u}}] + \beta \dot{\mathbf{u}} + \kappa \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{u}}}{\partial z^2} = \\ & = \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{q}} i\mathbf{q}_{\perp} f(q_{\perp}) F(\mathbf{q}) \exp(i\mathbf{q}_{\perp} \mathbf{l} + iq_z z - iq_x Vt). \end{aligned} \quad (8)$$

где $\Omega = L_x L_y L_z$ — объем сверхпроводника.

Это уравнение описывает вынужденные колебания вихря, оно легко решается методом преобразования Фурье. Подстановка этого решения в диссипативную функцию дает дополнительный вклад в диссипацию энергии вихря, связанный с тем, что в присутствии дефекта движение вихря не является прямолинейным и равномерным. Поскольку среднее значение $\tilde{\mathbf{u}}$ по z и t обращается в нуль, этот вклад квадратичен по амплитуде вынужденных колебаний вихря.

Ясно, что такое же выражение (8) соответствует каждому из вихрей, образующих решетку. Для того чтобы в рамках макроскопического описания найти силу, действующую на единицу объема решетки вблизи данной точки \mathbf{r} , достаточно сделать в (8) замену $\mathbf{q}_{\perp} \mathbf{l} + q_z z \rightarrow \mathbf{q}\mathbf{r}$ и разделить (7) на величину a_v^2 — площадь, приходящуюся на один вихрь. В результате получаем

$$(\mathcal{F}_{\text{imp}})_{\text{lat}} = \frac{1}{a_v^2 \Omega} \sum_{\mathbf{q}} i\mathbf{q}_{\perp} f(q_{\perp}) F(\mathbf{q}) \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r} - iq_x Vt). \quad (8a)$$

Расчет диссипации для вихревой решетки

Для конкретного анализа вклада в торможение вихревой решетки будем считать, что неоднородность вызвана системой точечных дефектов размером меньше радиуса кора вихря. В этом случае функцию $F(x, y, z)$ в (5) можно представить в виде суммы дельта-функций Дирака:

$$F(\mathbf{r}) = \sum_a \alpha \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a).$$

Здесь \mathbf{r}_a — координата дефекта a ; α характеризует интенсивность взаимодействия дефекта с пара-

метром порядка (для простоты считаем, что величина α одинакова для всех дефектов). Такая модель адекватно описывает любые дефекты, размеры которых малы по сравнению с длиной когерентности сверхпроводника ξ . Для ВТСП их типичным примером являются кислородные вакансии [1].

В этом случае выражение для силы \mathcal{F}_{imp} (8a), действующей на единицу объема решетки, можно записать в виде

$$\mathcal{F}_{\text{imp}} = \frac{1}{a_v^2} \frac{\alpha}{\Omega} \sum_a \sum_{\mathbf{q}} i\mathbf{q}_{\perp} f(q_{\perp}) e^{i\mathbf{q}_{\perp} \mathbf{r}_a} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r} - iq_x Vt}.$$

Получим решение уравнения для $\tilde{\mathbf{u}}$:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{x,y} &= \frac{1}{a_v^2} \frac{\alpha}{\Omega} \sum_a \sum_{\mathbf{q}} f(q_{\perp}) e^{i\mathbf{q}_{\perp} \mathbf{r}_a} \times \\ & \times \frac{A_{x,y}(\mathbf{q}_{\perp}) + iB(\mathbf{e}_{x,y}[\mathbf{e}_z, \mathbf{q}])}{A_x A_y - B^2} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r} - iq_x Vt}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} A_x &= (c_{11} q_{\perp}^2 + c_{44} q_z^2) + i\beta q_x V - \rho(q_x V)^2; \\ A_y &= (c_{66} q_{\perp}^2 + c_{44} q_z^2) + i\beta q_x V - \rho(q_x V)^2; \\ B &= q_x V H. \end{aligned}$$

Отметим, что при $\beta \rightarrow 0$ условие $A_x A_y - B^2 = 0$ определяет полученный выше закон дисперсии колебаний вихревой решетки (4). При $\beta \neq 0$ знаменатель в формуле (9) не обращается в нуль ни при каких значениях \mathbf{q} .

Подставляя выражение (9) в диссипативную функцию и производя усреднение по дефектам с помощью правила $\sum_a \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}_a) = N\delta_{\mathbf{q},0}$, где N — число дефектов; $\delta_{\mathbf{q},o}$ — дельта-символ Кронекера, легко найти зависимость силы торможения от скорости вихря:

$$\begin{aligned} Q(V) &= \frac{1}{a_v^4} \frac{C_{\text{imp}}}{(2\pi)^2} V^2 \alpha^2 \beta \int dq_x dq_y dq_z q_{\perp}^2 q_x^2 f^2(q_{\perp}) \times \\ & \times \frac{q_x^2 V^2 (\beta^2 + H^2) + (c_{44} q_z^2 + c_{11} q_y^2 + c_{66} q_x^2 - \rho q_x^2 V^2)^2 + (c_{11} - c_{66})^2 q_x^2 q_y^2}{\left[\rho^2 (q_x V)^4 - H^2 (q_x V)^2 - \rho \hat{C}_q (q_x V)^2 + \hat{C}_{1q} \hat{C}_{2q} - (\beta q_x V)^2 \right]^2 + (\beta q_x V)^2 \left[\hat{C}_q - 2\rho (q_x V)^2 \right]^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $C_{\text{imp}} = N/\Omega$ — концентрация дефектов, для сокращения формулы введены обозначения

$$\hat{C}_q = \hat{C}_{1q} + \hat{C}_{2q}, \quad \hat{C}_{1q} = c_{11}q_{\perp}^2 + c_{44}q_z^2, \\ \hat{C}_{2q} = c_{66}q_{\perp}^2 + c_{44}q_z^2.$$

Прямое вычисление этого интеграла приводит к достаточно громоздким выражениям, и ниже мы ограничимся анализом предельных соотношений параметров задачи, таких как вязкость, коэффициент Холла или масса вихря, а также случаев малых скоростей. Однако перед тем, как обсуждать конкретные ответы, сделаем некоторое общее утверждение о зависимости добавочной силы торможения $\Delta F(V) = Q(V)/V$ ($Q(V)$ — диссипативная функция (10)) от скорости вихрей и параметров задачи.

Перед интегралом (10) стоит множитель βV^2 , наличие которого позволяет предположить, что величина $Q(V) \sim \beta V^2$, что, в свою очередь, приводит к линейной зависимости силы торможения от скорости, $F(V) \sim \beta V$. Понятно, что в этом случае учет колебаний вихрей, возникающих вследствие воздействия дефектов, может дать лишь малую поправку к обычной «затравочной» силе торможения. Однако интеграл в (10) содержит сингулярности, вследствие которых дополнительный канал релаксации (10) может стать существенным и даже определяющим.

Дело в том, что даже в предельном случае малой диссипации ($\beta \rightarrow 0$, ρ , H — конечные) дополнительное торможение не обращается в нуль. На первый взгляд, это выглядит парадоксальным. Однако такое бесстолкновительное затухание (затухание Ландау), обусловленное перекачкой энергии одной моды колебаний в другую, встречается во многих областях физики. Здесь реализуется именно эта ситуация: при малых β воздействие дефектов на вихри приводит к возбуждению слабозатухающих собственных колебаний вихрей в решетке. Обсудим этот вывод подробнее.

Выражение (10) содержит β в комбинации $\beta / \{ \beta^2 + F^2[\mathbf{q}, (q_x V)^2] \}$ (см. [10]) с такой функцией F , что условие $F[\mathbf{q}, (q_x V)^2] = 0$ с заменой $q_x V \rightarrow \omega$ определяет частоты собственных мод колебаний вихрей в решетке (ср. (4) и (10)). При $\beta \rightarrow 0$ выражение (10) переходит в δ -функцию $\delta\{F[\mathbf{q}, (q_x V)^2]\}$. После простых преобразований (10) приводится к сумме двух δ -функций вида $\delta[(q_x V)^2 - \omega_{(\pm)}^2(\mathbf{q})]$, где $\omega_{(\pm)}(\mathbf{q})$ — частоты собственных мод (4). Поскольку при любых значениях скорости по крайней мере одно из уравнений $q_x V = \omega_{(-)}(\mathbf{q})$ или $q_x V = \omega_{(+)}(\mathbf{q})$ имеет решение, значение $Q(V)$ может быть конечным даже при $\beta \rightarrow 0$. Подобный результат возникал при анализе

торможения доменных стенок в магнетиках с микроскопическими дефектами [12,13]. Его можно объяснить следующим образом: воздействие дефектов на вихри приводит к возбуждению слабозатухающих собственных колебаний вихрей и в силу этого к необратимому переходу энергии поступательного движения вихря в энергию этих колебаний.

Физический смысл этого результата становится более ясным, если переформулировать его на квантовомеханическом языке [11]. Перейдем в систему отсчета, движущуюся вместе с вихрями. В этой системе дефекты имеют скорость $\mathbf{V} = -V\mathbf{e}_x$ в направлении параллельном оси x и могут передавать решетке вихрей импульс \mathbf{q} (мы положили $\hbar = 1$) только одновременно с энергией $\mathbf{qV} = q_x V$. Этот импульс перераспределяется между решеткой как целым и элементарным возбуждением, а энергия передается элементарному возбуждению. В частности, для одного вихря ситуация наиболее простая: вихрь принимает импульс в направлении перпендикулярном своей оси (оси z), а волна, бегущая по вихрю, — проекцию импульса вдоль оси z . Легко видеть, что аргументы представленных выше δ -функций определяют соответствующие законы сохранения энергии и импульса при рождении одного из квантов колебаний, отвечающих некоторой собственной моде. Диссипация обусловлена необратимой передачей энергии движения вихря этим возбуждениям.

Конкретный расчет при малых скоростях приводит к выражению $\Delta F(V) \sim V^3/\mathbf{C}$, где \mathbf{C} — некоторая комбинация величин c_{11} и c_{66} . Поэтому, в отличие от случая доменных стенок [12,13], для которых $\Delta F(V) \rightarrow \text{const}$ при $V \rightarrow 0$, соответствующая добавка к силе торможения при малых скоростях мала по сравнению со стандартным слагаемым вида βV . Однако эта добавка содержит в знаменателе величину $\mathbf{C} \sim 1/a_v^2$ и возрастает при уменьшении плотности вихрей в решетке. Отсюда следует, что при переходе к уединенному вихрю, когда $\mathbf{C} \sim 1/a_v^2 \rightarrow 0$, показатель степени при V в зависимости $F(V)$ должен быть меньше трех.

Более стандартный результат получается, когда величина β конечна. В этом случае несложный, но громоздкий расчет интеграла в (10) показывает, что добавка к силе торможения линейна по V при малых скоростях:

$$\Delta F(V) = -(\Delta\beta_{3D})V,$$

$$\Delta\beta_{3D} = \frac{1}{a_v^4} C_{\text{imp}} \frac{\beta\pi\alpha^2}{4c_{44}^{1/2}c_{66}^{3/2}} \int dq_x dq_y |f(q_{\perp})|^2 \frac{q_x^2}{q_{\perp}}.$$

Поскольку $c_{66} \propto B \propto a_v^{-2}$ и $c_{44} \propto B^2 \propto a_v^{-4}$ [1] (B — значение индукции в сверхпроводнике), то, как и при $\beta = 0$, величина $\Delta\beta_{3D} \propto a_v$ и расходится при $(1/a_v^2) \rightarrow 0$. Следовательно, при уменьшении плотности вихрей добавка $\Delta F(V)$ становится более существенной. Анализ показал, что соответствующие вклады станут равными ($\Delta\beta_{3D} \sim \beta$) только при таких малых значениях плотности, при которых взаимодействием вихрей можно пренебречь и рассматривать их как независимые.

При переходе к случаю уединенного вихря в упомянутой выше формуле для $\Delta\beta_{3D}$ зависимость отвечает пределу $c_{66} \rightarrow 0$. При этом величина $\Delta\beta_{3D}$ формально расходится, поэтому зависимость $\Delta F(V)$ от V для уединенного вихря должна стать более сильной, чем линейная (следует ожидать, что $\Delta F(V) \sim V^\sigma$, $\sigma < 1$).

Расчет для двумерной решетки показал, что для 2D решетки справедливы такие же закономерности, как и для трехмерного случая. В частности, при малых скоростях и конечном β соответствующая добавка к силе торможения мала по сравнению с величиной βV . Поэтому мы не будем обсуждать детали, а перейдем к исследованию случая уединенного вихря, когда вклад $\Delta F(V)$ будет максимальным.

Торможение уединенного вихря

Для уединенного вихря в интеграле (10) нужно считать, что величины H , ρ относятся к единице длины вихря (см. (3)) и положить $\hat{C}_{1q} = \hat{C}_{2q} = \kappa q_z^2$, где κ — энергия единицы длины вихря. При этом зависимость подынтегрального выражения от \mathbf{q} сильно упрощается, и вычисление $Q(V)$ может быть проведено достаточно подробно. В частности, если пренебречь инерционными свойствами вихря (положить $\rho = 0$), то зависимость $Q(V)$ можно найти точно. При всех значениях скорости и любом соотношении между H и β дополнительная сила торможения пропорциональна $V^{-1/2}$:

$$F(V) = \eta V^{-1/2} = C_{\text{imp}} A \xi^{-1/2} \frac{\pi \alpha^2}{2\sqrt{2\kappa V}} \frac{1}{\sqrt{H^2 + \beta^2}} \times \\ \times \left[\left(\sqrt{H^2 + \beta^2} + H \right)^{1/2} + \left(\sqrt{H^2 + \beta^2} - H \right)^{1/2} \right] \quad (11)$$

и коэффициент η конечен как при $\beta \rightarrow 0$, $H \neq 0$, так и при $H \rightarrow 0$, $\beta \neq 0$.

Здесь введено обозначение $A \xi^{-1/2} = \int dq_x dq_y \times \sqrt{q_x} q_\perp^2 |f(q_\perp)|^2$, ξ — длина когерентности. Учти-

вая, что форм-фактор вихря $f(q_\perp)$ есть функция, локализованная в области $\xi q_\perp \leq 1$, $f(q_\perp) \sim \xi^2$ при $q_\perp \rightarrow 0$ и $f(q_\perp) \rightarrow 0$ при $\xi q_\perp \gg 1$ (см. [11]), получаем, что A — константа порядка единицы.

Анализ влияния инерционных свойств вихря проведем, считая, что $\beta \ll H$, но не предполагая справедливости каких-либо неравенств между другими параметрами задачи. В этом случае интеграл по q_z^2 вычислялся точно с использованием δ -функций и получается компактное выражение

$$Q(V) = \frac{C_{\text{imp}} \alpha^2}{\sqrt{\kappa}} \times \\ \times \int_0^\infty dq_x \int_{-\infty}^\infty dq_y q_\perp^2 f^2(q_\perp) \frac{q_x V}{\sqrt{H(q_x V) + \rho(q_x V)^2}} + \\ + 2 \frac{C_{\text{imp}} \alpha^2}{\sqrt{\kappa}} \int_{(H/\rho V)}^\infty dq_x \int_{-\infty}^{+\infty} dq_y q_\perp^2 f^2(q_\perp) \frac{q_x V}{\sqrt{\rho(q_x V)^2 - H(q_x V)}}. \quad (12)$$

Здесь первое слагаемое обусловлено возбуждением колебаний безактивационной моды, второе — активационной. При малых скоростях $V \ll H\xi/\rho$ интегрирование во втором интеграле проводится по области $q_x > 1/\xi$. В этой области функция $f(q_\perp)$ экспоненциально мала, поэтому вклад второго слагаемого мал. Однако первое слагаемое, обусловленное элементарными возбуждениями с безактивационным законом дисперсии, дает немалый вклад в $\Delta F(V) = Q(V)/V$ при сколь угодно малой скорости. Легко видеть, что этот вклад расходится при $V \rightarrow 0$. В предельном случае $\rho \ll H\xi/V$ мы, естественно, снова получаем формулу (11) для $\beta = 0$, в которой $F(V)$ не зависит от ρ . Инерционные свойства вихря проявляются только при $V > H\xi/\rho$, и тогда расходимость $F(V)$ более сильная, чем в (11): $F(V) \propto 1/V$. Но этот случай отвечает слишком большим скоростям, и мы не будем его обсуждать.

Таким образом, при произвольных соотношениях между динамическими параметрами уединенного вихря ρ , κ и β и малой скорости вихря, $V \ll H\xi/\rho$, величина добавочной силы торможения описывается формулой (11), т.е. $\Delta F(V) \propto V^{-1/2}$ и расходится при $V \rightarrow 0$. С учетом обычной вязкой силы торможения суммарная сила

равна $F(V) = \beta V + \eta/V^{1/2}$, где β — введенный в (2) коэффициент вязкости, η определена формулой (11). Отсюда следует, что при достаточно малых скоростях $V < V^*$ величина ΔF будет больше, чем βV , даже если коэффициент перед $V^{-1/2}$ весьма мал.

Оценим характерные скорости движения вихря, т.е. определим значения $H\xi/\rho$ и $V^* = (\eta/\beta)^{2/3}$. Величина $H\xi/\rho$ оказывается большей, чем обычные скорости движения вихревых решеток; V^* заведомо меньше, чем $H\xi/\rho$, хотя бы потому, что она содержит малые параметры C_{imp} и α . В соответствии с формулами (11) и (12) при малых скоростях и любом соотношении между β и H характерная скорость V^* определяется выражением

$$V^* = \left(\frac{AC_{\text{imp}}\alpha^2}{2\beta\sqrt{\kappa\xi} \max\{\beta, H\}} \right)^{2/3}, \quad (13)$$

где A — численный коэффициент порядка единицы; ξ — длина когерентности.

Возьмем для феноменологических параметров задачи их обычные выражения через микроскопические характеристики сверхпроводника (см., например, [1,11]). Запишем $\kappa = (\Phi_0/4\pi\lambda)^2$, где λ — глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводник; Φ_0 — квант потока. Для α примем $\alpha = (H_{c2}^2/8\pi)(\Delta T_c/T_{c0})a^3$, $H_{c2} = \Phi_0/2\pi\lambda\xi$ — термодинамическое критическое поле сверхпроводника; $\Delta T_c/T_c$ — относительное подавление критической температуры на дефекте; a^3 — объем, приходящийся на дефект (величина a порядка межатомного расстояния). Гирскопическая константа H определяется плотностью сверхпроводящих электронов n , $H = \pi\hbar n$, $n = mc^2/4\pi\lambda^2 e^2$, где \hbar — постоянная Планка; m и e — масса и заряд электрона; c — скорость света. Наконец, константа вязкости β обусловлена прежде всего проводимостью металла в нормальном состоянии ρ_n , поэтому для нее можно записать [1] $\beta = H_{c2}\Phi_0/c^2\rho_n$, где H_{c2} — второе критическое поле, $H_{c2} = \Phi_0/2\pi\xi^2$. В результате получаем

$$V^* = \frac{a^4 c^2 \rho_n}{64\pi^{5/3} \lambda^2 \xi} \left(\frac{C_{\text{imp}}}{2} \right)^{2/3} \left(\frac{\Delta T_c}{T_{c0}} \right)^{4/3} \quad \text{при } \beta \gg H, \quad (14)$$

$$V^* = \frac{a^4 c^2}{64\pi^2} \left(\frac{C_{\text{imp}} e \rho_n}{2\lambda^2 \xi^{5/2} \sqrt{m\hbar}} \right)^{2/3} \left(\frac{\Delta T_c}{T_{c0}} \right)^{4/3} \quad \text{при } \beta \ll H.$$

Если взять характерные величины для ВТСП типа YBCO: $\rho_n = 5 \cdot 10^{-15}$ с, $a = 10^{-8}$ см, $\xi =$

$= 10^{-7}$ см, $\lambda/\xi = 10^2$ и считать, что $\Delta T_c/T_{c0} \sim \sim 10^{-1}$, то для этих значений величина V^* не очень сильно различается при $\beta < H$ и $\beta > H$ и равна

$$V^* \sim [C_{\text{imp}}^{2/3}(10^{-11}-10^{-12})] \text{ см/с},$$

где значение C_{imp} измеряется в см^{-3} . При разумном значении $C_{\text{imp}} \sim 10^{15} \text{ см}^{-3}$, что соответствует, например, эквивалентной плотности дислокаций $C_{\text{disl}} \sim 10^{10} \text{ см}^{-2}$, величина $V^* \sim 10^{-1}-10^{-2} \text{ см/с}$, что даже больше обычных значений скорости вихрей в сверхпроводниках.

Обсуждение результатов

Таким образом, добавка к силе торможения вихря, обусловленная тем, что при движении вихря через систему дефектов возбуждаются коллективные моды, мала для плотной вихревой решетки, но имеет особенность $F(V) \propto 1/\sqrt{V}$ при $V \rightarrow 0$ для уединенного вихря. Причем зависимость силы торможения от скорости более сильная, чем найденная в работе [4]. Причина заключается в том, что мы исходим из реальной модели взаимодействия вихря с дефектами, а не используем, как в [4], модель случайной силы.

Немонотонная зависимость силы торможения от скорости может приводить к особенностям вынужденного движения вихрей. Сила торможения, действующая на движущийся вихрь, с учетом возбуждения собственных мод колебаний может быть представлена в виде

$$F = \beta V + \eta/\sqrt{V},$$

где первое слагаемое описывает «обычное» вязкое трение, величина η определяется формулой (11). При этом должны возникать особенности в зависимости скорости вынужденного движения вихря под действием силы F_e (транспортного тока), которая определяется уравнением $F_e = F(V)$. Легко видеть, что это уравнение имеет два решения, причем решение, соответствующее верхней ветви, существует только при скорости, большей введенного (см. (11)) характерного значения $V^* = (\eta/\beta)^{2/3}$.

Обычно при отрицательной дифференциальной подвижности, $(1/\beta)_{\text{dif}} = dV/dF_e$, стационарное движение неустойчиво [14]. Поскольку условие $dV/dF_e > 0$ выполняется только для верхней ветви зависимости $F(V)$, стационарное движение вихря возможно только при $V > V^*$. Таким образом, на зависимости $V(F_e)$, которая, по существу, совпадает с вольт-амперной характеристикой

сверхпроводника, эта особенность должна проявляться в виде резкого скачка.

Отметим также, что развитая теория не ограничена только вихрями в сверхпроводниках и может быть применена для вихреподобных объектов в любых упорядоченных средах. Нужно только, чтобы этот вихрь имел гироскопические свойства. Однако, как отмечалось выше, гироскопическая динамика характерна для многих моделей упорядоченных сред. Помимо уже приведенных выше примеров, отметим линии Блоха — специфические вихреподобные объекты, существующие в доменных стенках ферромагнетиков, характеризующиеся установленными экспериментально гироскопическими свойствами и перспективные как носители информации в запоминающих устройствах (см. [14]).

Мы благодарны В. Г. Барьяхтару, В. М. Пану и А. Л. Касаткину за полезные обсуждения работы.

1. G. Blatter, M. V. Feigel'man, V. B. Geshkenbein, A. I. Larkin, and V. M. Vinokur, *Rev. Mod. Phys.* **66**, 1125 (1994).
2. R. J. Donnelly, *Quantized Vortices in Helium II*, in: *Low Temperature Physics* **3**, A. M. Goldman, P. V. E. McClintock, and M. Springford (eds.), Cambridge University Press, Cambridge (1991).
3. O. K. C. Tsui, N. P. Ong, Y. Matsuda, Y. F. Yan, and J. B. Peterson, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 724 (1994).
4. A. E. Koshelev and V. M. Vinokur, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 3580 (1994).
5. P. G. de Gennes and J. Matricon, *Rev. Mod. Phys.* **36**, 45 (1964).
6. E. Šimánek, *Phys. Lett.* **A194**, 323 (1994); P. Ao and X.-M. Zhu, *Physica* **C282**, 367 (1997); E. Demircan, P. Ao, and Q. Niu, *Phys. Rev.* **B54**, 10027 (1996); Г. Е. Воловик, *Письма в ЖЭТФ* **65**, 201 (1997).

7. G. M. Wysin, *Phys. Rev.* **B54**, 15156 (1996); B. A. Ivanov, H. J. Schnitzer, F.-G. Mertens, and G. M. Wysin, *Phys. Rev.* **B58**, 8464 (1998).
8. B. A. Ivanov and D. D. Sheka, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 404 (1994).
9. N. B. Kopnin, A. V. Lopatin, E. B. Sonin, and K. B. Traito, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4527 (1995).
10. E. B. Sonin, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 3732 (1997).
11. П. Де Жен, *Сверхпроводимость металлов и сплавов*, Мир, Москва (1968).
12. А. В. Зуев, Б. А. Иванов, *ЖЭТФ* **82**, 1679 (1982).
13. B. A. Ivanov and S. N. Lyakhimets, *IEEE Trans. Magn.* **30**, 824 (1994).
14. V. G. Bar'yakhtar, M. V. Chetkin, B. A. Ivanov, and S. N. Gadetskii, *Dynamics of Topological Magnetic Solitons, Springer Tract in Modern Physics* **139**, Springer-Verlag Berlin (1993).

Vortex dynamics and retardation in a type II superconductor with weak defects

A. Yu. Galkin and B. A. Ivanov

The dynamics of an Abrikosov vortex lattice and a single vortex in a type II superconductor with weak defects is studied taking into account both inertial and gyroscopic (Hall) properties. The spectra of normal modes of vortices has two branches. In the limit of the small κ one of the branches is gapless and has a quadratic dispersion law, the other one possesses a finite gap. In the limit of the large κ the dispersion law of both branches becomes linear (acoustic). It is shown that due to interaction between defects and moving either the vortex lattice or the single vortex the oscillations excitation occur. This leads to appearance an additional dissipation channel of vortex translational motion energy. In the case of the single vortex corresponding retardation force diverges at $V \rightarrow 0$ as $V^{-1/2}$, i.e., in the limit of small velocities it prevails over regular viscous friction force.