

# Куперовское спаривание двумерных электронов в квантующем магнитном поле и дробный квантовый эффект Холла

Э. А. Пашицкий

*Институт физики НАН Украины, Украина, 252650, г. Киев, пр. Науки, 46*  
E-mail: pashitsk@iop.kiev.ua

Статья поступила в редакцию 2 марта 1999 г.

Дан краткий обзор современного состояния теории дробного квантового эффекта Холла (ДКЭХ) и высказано предположение о том, что экспериментально наблюдаемые особенности холловского сопротивления  $R_H$  двумерной ( $2D$ ) электронной системы в сильном квантующем магнитном поле при дробных значениях фактора заполнения нижайшего уровня Ландау  $\nu = q/(2n + 1)$  с  $q \geq 2$ , которые не описываются антисимметричной относительно парных перестановок частиц волновой функцией Лафлина, могут быть следствием куперовского спаривания  $2D$  электронов. Предполагается, что необходимое для куперовского спаривания межэлектронное притяжение может быть обусловлено взаимодействием  $2D$  электронов с поверхностными акустическими волнами ( $2D$  фононами) и поверхностными  $2D$  плазмонами, локализованными вблизи границ раздела кристаллов (гетеропереходов) в области инверсионных слоев в структурах металл–диэлектрик–полупроводник и гетероструктурах. Существование связанных электронных пар и неспаренных электронов в режиме ДКЭХ должно приводить к особенностям  $R_H$  при значениях  $\nu$ , определяющихся соотношением Гальперина, которое следует из симметричных свойств «смешанной» волновой функции пар (бозонов) и электронов (фермионов). Это соотношение, в принципе, позволяет описать все экспериментальные данные по ДКЭХ. С помощью суммирования расходящихся по степенному закону при  $T \rightarrow 0$  «лестничных» диаграмм получено уравнение для вершинной части (четырёхполосника) межэлектронного взаимодействия типа уравнения Бете–Солпитера для  $2D$  системы в квантующем магнитном поле с учетом процессов электрон-электронного и электрон-дырочного спаривания в куперовском и нуль-звуковом каналах. На основе этого уравнения вычислена критическая температура  $T_c$  фазового перехода в состояние со связанными куперовскими парами и показано, что  $T_c$  в ультраквантовом пределе не зависит от эффективной массы электронов, т.е. от  $2D$  плотности состояний. Построена фазовая диаграмма  $2D$  системы в зависимости от концентрации электронов и напряженности магнитного поля и показано, что область куперовского спаривания  $2D$  электронов при достаточно сильном притяжении практически совпадает с областью ДКЭХ при  $\nu < 1$ , тогда как область электрон-дырочного спаривания с образованием квантовых волн зарядовой плотности (ВЗП) вытесняется в сектор с  $\nu > 1$ , что согласуется с экспериментальными данными по наблюдению особенностей продольного сопротивления  $R_{xx}$  за счет ВЗП при  $\nu = (2n + 1)/2$  с  $n \geq 2$ .

Дан короткий огляд сучасного стану теорії дробового квантового ефекту Холла (ДКЕХ) і висловлено припущення, що експериментально спостережані особливості холлівського опору  $R_H$  у двовимірній ( $2D$ ) електронній системі, що знаходиться у сильному квантуючому магнітному полі, при дробових значеннях фактору заповнення найнижчого рівня Ландау  $\nu = q/(2n + 1)$  з  $q \geq 2$ , які не описуються антисиметричною відносно парних перестановок частинок хвильовою функцією Лафліна, можуть бути наслідком куперівського спарювання  $2D$  електронів. Припускається, що необхідне для куперівського спарювання міжелектронне притягання може бути обумовлено взаємодією  $2D$  електронів з поверхневими акустичними хвилями ( $2D$  фононами) та поверхневими  $2D$  плазмонами, що локалізовані поблизу меж поділу кристалів (гетеропереходів) в області інверсійних шарів в структурах метал–діелектрик–напівпровідник та гетероструктурах. Співіснування зв'язаних електронних пар та вільних електронів у режимі ДКЕХ повинно приводити до особливостей  $R_H$  при значеннях  $\nu$ , що визначаються співвідношенням Гальперіна, яке витікає з симетричних властивостей «змішаної» хвильової функції пар (бозонів) та електронів (ферміонів). Це співвідношення, в принципі, дозволяє описати усі експериментальні дані для ДКЕХ. За допомогою підсумування

розбіжних за степеневим законом при  $T \rightarrow 0$  «драбинчастих» діаграм одержано рівняння для верховинної частини (чотирьохполюсника) міжелектронної взаємодії типу рівняння Бете–Солпітера для  $2D$  систем у квантуючому магнітному полі з урахуванням процесів електрон–електронного та електрон–діркового спарювання у куперівському та нуль-звуковому каналах. На основі цього рівняння обчислено критичну температуру  $T_c$  фазового переходу у стан із зв'язаними куперівськими парами і показано, що  $T_c$  в ультраквантовій границі не залежить від ефективної маси електронів, тобто від  $2D$  густини станів. Побудовано фазову діаграму  $2D$  системи в залежності від концентрації електронів та напруги магнітного поля і показано, що область куперівського спарювання  $2D$  електронів при достатньо сильному притяганні практично співпадає з областю ДКЕХ при  $\nu < 1$ , тоді як область електрон–діркового спарювання з виникненням квантових хвиль зарядової густини (ХЗГ) виштовхується в сектор з  $\nu > 1$ , що узгоджується з експериментальними даними по спостереженню особливостей повздовжнього опору  $R_{xx}$  за рахунок ХЗГ при  $\nu = (2n + 1)/2$  з  $n \geq 2$ .

PACS: 73.20.Dx, 74.40.Gk, 73.40.Nm

## 1. Введение

В 1998 г. Нобелевская премия по физике была присуждена Цуи и Штермеру за экспериментальное открытие [1] и Лафлину за теоретическое объяснение [2] дробного квантового эффекта Холла (ДКЭХ) в двумерных ( $2D$ ) электронных системах, находящихся в квантующем магнитном поле (КМП). Теория Лафлина [2], основанная на антисимметричной относительно парных перестановок частиц (фермионов) вариационной волновой функции типа функции Джастрова [3], позволила объяснить существование особенностей (плато) в холловском сопротивлении  $R_H$ , когда фактор заполнения нижайшего уровня Ландау (УЛ), равный  $\nu = N_S/N_L$  (где  $N_S$  — число  $2D$  электронов, а  $N_L$  — кратность вырождения УЛ в расчете на единицу площади), принимает дробные значения  $\nu = 1/m$  с нечетными знаменателями  $m = 2n + 1$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), либо  $\nu = 1 - 1/m$  в силу электрон-дырочной симметрии спектра возбуждений.

Следует заметить, что использовавшаяся в [2] многоэлектронная волновая функция  $\Psi$  основного состояния  $2D$  системы в ультраквантовом пределе, содержащая произведения однородных полиномов степени  $m$  от разностей комплексных  $2D$  координат  $z_j$  и  $z_k$  электронов, впервые была сконструирована в работе Бычкова, Иорданского и Элиашберга [4] еще до открытия ДКЭХ.

Заслуга Лафлина заключается не только в том, что он независимо построил полиномиальную вариационную функцию  $\Psi \sim \prod_{j < k} (z_j - z_k)^m$  для описания «несжимаемой» квантовой жидкости  $2D$  электронов в КМП, но и, главным образом, в том, что он подметил замечательную аналогию между квадратом модуля  $\Psi$  и статистической суммой классической заряженной  $2D$  плазмы на

однородном компенсирующем фоне с логарифмическим законом кулоновского взаимодействия частиц с «зарядом»  $Q = m$ . Исходя из этой формальной аналогии Лафлин показал [2], что адиабатическое включение добавочного кванта магнитного потока  $\phi_0 = hc/e$  эквивалентно появлению фиктивного единичного «заряда», который должен полностью экранироваться вследствие перераспределения частиц плазмы с «зарядом»  $m$ . Но поскольку реальные частицы (электроны) в  $2D$  системе имеют заряд  $e$ , это означает, что каждый квант потока «экранируется» квазичастицей (квазидыркой) с дробным эффективным зарядом  $e^* = e/m$ . Размер квазичастиц определяется радиусом экранирования, который в ультраквантовом пределе равен по порядку величины магнитной квантовой длине  $l_H = \sqrt{\hbar c / eH}$ , а их эффективный заряд  $e^*$  связан с холловской проводимостью  $\sigma_H \equiv \sigma_{xy}$  условием калибровочной инвариантности [2], что приводит к дробным значениям  $\sigma_H = e^* e / h = e^2 / hm$  в области плато, где продольные компоненты тензоров проводимости  $\sigma_{xx}$  и сопротивления  $R_{xx}$  обращаются в нуль [1].

Волновая функция Лафлина [2] описывает основное состояние системы сильно взаимодействующих  $2D$  электронов, в котором на каждый электрон приходится  $m$  квантов магнитного потока. Это непосредственно следует из выражения для фактора заполнения нижайшего УЛ, если учесть, что  $N_L = 1/2\pi l_H^2 = H/\phi_0$ , так что  $\nu = N_S \phi_0 / H \equiv N_e / N_\phi$ , где  $N_e = N_S S$  — полное число электронов, а  $N_\phi = HS/\phi_0$  — полное число квантов потока в  $2D$  системе площадью  $S$ .

Однако последующие эксперименты [5–7] показали, что особенности  $\sigma_H$  и  $R_H$  наблюдаются также для факторов заполнения  $\nu = q/m$  с  $q \geq 2$ . В связи с этим Гальперин [8] высказал предположение, что дроби  $\nu = 2/m$  и  $\nu = 1 - 2/m$  могут быть результатом образования в  $2D$  системе достаточно компактных связанных электронных пар и сконструировал волновую функцию  $\Psi$  лафлиновского типа, которая симметрична относительно перестановок таких пар (бозонов), но сохраняет антисимметрию относительно перестановок электронов внутри каждой пары. Если при этом все электроны в  $2D$  системе связываются в пары, то особенности  $R_H$  и  $\sigma_H$  должны проявляться при  $\nu = 4/p$ , где  $p$  — произвольное четное число:  $p = 2(2n + 1)$  либо  $p = 4(n + 1)$ . При этом наряду с дробными значениями фактора заполнения  $\nu = 2/(2n + 1)$  с нечетными знаменателями возникают простые дроби  $\nu = 1/(n + 1)$  с произвольными, в том числе четными, знаменателями. В последующих работах [9,10] был проведен более детальный анализ структуры и энергии основного состояния  $2D$  системы при значениях  $\nu = 2/3, 2/5$  и  $2/7$ , а также для полуполого заполнения нижайшего УЛ при  $\nu = 1/2$ .

В [8] было также показано, что в том случае, когда в  $2D$  системе одновременно существуют связанные электронные пары и неспаренные электроны, особенности  $R_H$  и  $\sigma_H$  должны проявляться при факторах заполнения

$$\nu = \frac{4m + p - 4r}{mp - r^2}. \quad (1)$$

Здесь, как и в [2], показатель степени  $m$  полинома  $(z_k - z_j)^m$ , определяющего обменные корреляции между неспаренными электронами, является нечетным, в то время как индекс  $p$ , ответственный за корреляцию между связанными электронными парами, является четным, а индекс  $r$ , соответствующий корреляции типа электрон — пара, может иметь любую четность. Выражение (1) содержит широкий набор рациональных дробей и, в принципе, позволяет описать все экспериментально наблюдаемые особенности  $R_H$  в режиме ДКЭХ, а также пока не наблюдавшиеся особенности  $R_H$ , в частности дроби с четными знаменателями  $2n$ .

Более того, как было отмечено в [8], при условии, что  $2D$  электроны образуют связанные многочастичные комплексы ( $n$ -мультиплеты), волновая функция лафлиновского типа приводит к особенностям  $R_H$  при факторах заполнения  $\nu = n^2/k$ , где числа  $n$  и  $k$  должны иметь

одинаковую четность, что в общем случае соответствует любой рациональной дроби. Однако в работах [8, 9] не рассматривался какой-либо конкретный динамический механизм образования связанных пар или  $n$ -мультиплетов в  $2D$  системах в КМП.

В дальнейшем развитие теории ДКЭХ пошло по нескольким разным направлениям, связанным с фундаментальными топологическими свойствами  $2D$  пространства и взаимодействия между электронами в  $2D$  системах. Сюда относится, в частности, энионная модель ДКЭХ, основанная на перестановочных соотношениях  $P_{jk}\Psi = \exp(i\pi\alpha)\Psi$  с произвольным дробным статистическим параметром  $\alpha$  (вместо целочисленных значений  $\alpha = 0$  для бозонов и  $\alpha = 1$  для фермионов). Это соответствует так называемой промежуточной статистике для особых  $2D$  квазичастиц — энионов [11,12], причем значения  $\alpha = 1/m$  непосредственно приводят к дробным факторам заполнения  $\nu = 1/m$ . Однако для объяснения дробей  $\nu = q/m$  с  $q > 1$  приходится вводить специальную «иерархическую» теорию, в которой предполагается, что над газом возбуждений (энионов) с одним дробным статистическим параметром возникают возбуждения с другим дробным значением  $\alpha$ .

Заметим, что энионная модель рассматривается также в качестве одного из вариантов теории высокотемпературной сверхпроводимости (ВТСП) [11], однако степень двумерности электронного спектра в слоистых кристаллах купратных металлооксидных соединений (МОС), в которых наблюдается ВТСП [13,14], по-видимому, недостаточна для существования энионов. Кроме того, для объяснения ДКЭХ привлекались теоретико-полевые  $2D$  модели составных фермионов [15] и скирмионов [16]. Однако все эти теории характеризуются несколько формальным подходом и весьма сложным математическим аппаратом, за которым скрывается физический смысл явления ДКЭХ.

Между тем целый ряд особенностей ДКЭХ (в частности, появление дробных значений  $\nu = q/m$  с  $q > 1$ ) можно понять на основе сравнительно простых представлений, аналогичных тем, которые используются в стандартной теории сверхпроводимости (таких, как куперовское спаривание электронов, квантование магнитного потока и динамика вихрей Абрикосова в сверхпроводниках 2-го рода и др.).

В связи с этим кратко рассмотрим вопрос о сверхпроводимости в сильных магнитных полях.

Еще до открытия как ДКЭХ [1], так и целочисленного квантового эффекта Холла (ЦКЭХ) [17], в работе [18] рассматривалась задача о куперовском спаривании электронов в слоистых металлах и  $2D$  электронных системах за счет электрон-фононного взаимодействия (ЭФВ) в сильных КМП. В рамках приближения самосогласованного поля в [18] было показано, что критическая температура сверхпроводящего (СП) перехода  $T_c$  как функция напряженности магнитного поля  $H$  должна испытывать гигантские осцилляции с периодом  $\Delta H = H/N$ , где  $N$  — номер верхнего заполненного УЛ, и с провалами  $T_c$  почти до нуля при пересечении уровнем Ферми очередного УЛ. В работе [19] аналогичный результат был получен в квазиклассическом приближении в области сверхсильных КМП ( $H > 120$  Тл) для модуля СП параметра порядка  $\Delta_0(H)$  в слоистых кристаллах высокотемпературных сверхпроводников. Такого типа осцилляции  $T_c(H)$ , аналогичные осцилляциям де Гааза—Ван Альфена в нормальных металлах, рассматривались ранее теоретически в работах [20–22] для изотропных трехмерных ( $3D$ ) сверхпроводников 2-го рода вблизи верхнего критического поля  $H_{c2}$ , а затем в [23–25] для сильно анизотропных квазиодномерных сверхпроводников с открытой поверхностью Ферми. Экспериментально эффект де Гааза—Ван Альфена в слоистом сверхпроводнике  $NbSe_2$  как выше, так и ниже  $H_{c2}(T)$ , наблюдался в [26]. После открытия ЦКЭХ и ДКЭХ вопрос о куперовском спаривании электронов в  $2D$  системах обсуждался в [27].

Недавно в [28] сообщалось о возможном наблюдении сверхпроводимости при  $T < 1$  К в кремниевой структуре металл—диэлектрик—полупроводник (МДП) с аномально высокой подвижностью  $2D$  электронов. В [29] был предложен плазменный механизм такой сверхпроводимости за счет куперовского спаривания  $2D$  электронов благодаря их взаимодействию с собственными  $2D$  плазмонами, которые, как известно [30], обладают акустическим законом дисперсии  $\omega_q \sim q$  при  $q \rightarrow 0$  и имеют корневой спектр  $\omega_q = (2\pi e^2 N_S q / m_e^* \epsilon_0)^{1/2}$  при  $q \neq 0$  (где  $m_e^*$  — эффективная масса электронов, а  $\epsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость решетки). Однако такой механизм представляется маловероятным, поскольку фазовая скорость  $2D$  плазмонов при  $q \rightarrow 0$  аномально велика,  $\omega_q/q = c/\sqrt{\epsilon_0}$  (где  $c$  — скорость света в вакууме), и значительно превышает фермиевскую скорость

электронов  $v_F = \hbar k_F / m_e^*$  (где  $k_F = \sqrt{2\pi N_S}$ ). Более того, при  $q \geq k_F$  и  $\omega \leq \omega_q$  существует широкая область сильного квантового затухания Ландау за счет распада плазмонов на электрон-дырочные пары, в которой преобладает межэлектронное кулоновское отталкивание.

С другой стороны, как было ранее показано в [31], вблизи границы раздела (гетероперехода) между полупроводниками с «легкими» электронами и «тяжелыми» дырками (как, например, в гетероструктуре  $GaAs/AlGaAs$ ) могут существовать слабозатухающие поверхностные  $2D$  плазмоны с корневым законом дисперсии и относительно низкой частотой, взаимодействие с которыми может приводить к куперовскому спариванию вырожденных  $2D$  электронов. Кроме того, в слоистых полупроводниковых системах необходимо учитывать существование поверхностных  $2D$  фононов, локализованных на границах раздела кристаллов (см. ниже).

В настоящей работе обсуждается вопрос о возможном влиянии куперовского спаривания  $2D$  электронов в сильном КМП на особенности ДКЭХ. Поскольку ЭФВ вырожденных  $2D$  электронов в приповерхностных инверсионных слоях с объемными акустическими и оптическими фононами в полупроводниковых кристаллах мало по сравнению с кулоновским отталкиванием, в данной работе предполагается, что достаточно сильное межэлектронное притяжение, необходимое для куперовского спаривания  $2D$  электронов, может быть обусловлено более эффективным ЭФВ с поверхностными  $2D$  фононами на границе кристаллов полупроводника (Si) и диэлектрика ( $SiO_2$ ) в МДП структуре или на гетеропереходе между чистым и легированным полупроводниковыми кристаллами в гетероструктурах типа  $GaAs/Al_xGa_{1-x}As$ . В последнем случае дополнительным механизмом притяжения может быть взаимодействие «легких»  $2D$  электронов в кристалле  $GaAs$  с поверхностными  $2D$  плазмонами [31], существование которых связано с коллективными (плазменными) колебаниями «тяжелых» дырок в  $AlGaAs$ .

На основе уравнения для вершинной части (четыреполюсника) межэлектронного взаимодействия  $\Gamma_{ee}$ , аналогичного уравнению Бете—Солпитера и полученного путем суммирования расходящихся по степенному закону при  $T \rightarrow 0$  «лестничных» диаграмм с учетом процессов электрон-электронного и электрон-дырочного спаривания в куперовском и

нуль-звуковым каналах, вычислена критическая температура  $T_c$  перехода  $2D$  системы в состояние со связанными триплетными куперовскими парами электронов с параллельными спинами на нижайшем УЛ. Показано, что в ультраквантовом пределе  $T_c$  не зависит от эффективной массы  $2D$  электронов (т. е. от  $2D$  плотности состояний в параболической зоне  $g_{2D} = m_e^*/2\pi\hbar^2$ ), так что куперовское спаривание, в принципе, возможно даже при  $m_e^* \ll m_0$  (где  $m_0$  — масса свободного электрона), а размер куперовских пар порядка магнитной длины  $l_H$  и мал по сравнению со средним расстоянием между частицами при  $\nu = k_F^2 l_H^2 < 1$ .

Построена фазовая диаграмма  $2D$  системы в зависимости от концентрации  $2D$  электронов  $N_S$  и напряженности магнитного поля  $H$  и показано, что область куперовского спаривания электронов при достаточно сильном притяжении практически полностью совпадает с областью ДКЭХ при  $\nu < 1$ , тогда как область электрон-дырочного спаривания с образованием квантовых волн зарядовой плотности (ВЗП) [32] вытесняется в сектор ЦКЭХ с  $\nu > 1$ , что качественно согласуется с экспериментальными данными [33] по наблюдению особенностей сопротивления  $R_{xx}$  за счет ВЗП [34–36] при  $\nu = (2n + 1)/2$  с  $n \geq 2$ .

Существование связанных куперовских пар и неспаренных электронов ниже  $T_c$  должно приводить, согласно [8], к особенностям  $R_H$  и  $\sigma_H$  при значениях фактора заполнения  $\nu$ , определяющихся соотношением Гальперина (1). Это соотношение позволяет объяснить не описываемые теорией Лафлина [2] особенности ДКЭХ при  $\nu = q/(2n + 1)$  с  $q \geq 2$  [5–7]. В работе обсуждается существенное отличие состояния с локальными куперовскими парами в  $2D$  системах в КМП при  $\nu < 1$  от СП состояния обычных сверхпроводников с сильно перекрывающимися куперовскими парами [37].

## 2. Куперовское спаривание электронов в $2D$ сверхпроводниках в квантующем магнитном поле

Как отмечалось во введении, задача о куперовском спаривании электронов в двумерных сверхпроводниках типа слонстых диалькогенидов переходных металлов и в  $2D$  электронных системах (МДП структурах) за счет ЭФВ в сильных КМП ранее рассматривалась в работе [18] при условии, что циклотронная частота электронов  $\omega_c = eH/m_e^*c$  удовлетворяет условиям

$$k_B T_c \ll \hbar\omega_c \ll \hbar\bar{\omega}_{ph}, \quad (2)$$

где  $\bar{\omega}_{ph}$  — средняя (дебаевская) частота фононного спектра, а  $k_B$  — постоянная Больцмана. Поскольку в металлах энергия Ферми  $E_F \gg \hbar\bar{\omega}_{ph}$ , то число заполненных квантовых УЛ велико,  $N \approx E_F/\hbar\omega_c \gg 1$ . В связи с этим в [18] использовалось приближение самосогласованного поля, в рамках которого линейризованное при  $T \rightarrow T_c$  интегральное уравнение для пространственно неоднородного СП параметра порядка  $\Delta(r)$  имеет вид [37]

$$\Delta(r) = \int d^2r' K(r, r') \Delta(r'). \quad (3)$$

Здесь  $r, r'$  — продольные координаты в плоскости слоев  $(x, y)$ , а  $K$  — ядро нелокального электрон-электронного взаимодействия:

$$K(r, r') = \frac{1}{2} (\bar{V}_{ph} - \bar{V}_C) \times \\ \times \sum_{n, n'} \frac{\text{th}(\xi_n/2k_B T_c) + \text{th}(\xi_{n'}/2k_B T_c)}{\xi_n + \xi_{n'}} \times \\ \times \sum_{k_y, k'_y} \Psi_{nk_y}^*(r) \Psi_{n'k'_y}^*(r) \Psi_{nk_y}(r') \Psi_{n'k'_y}(r'), \quad (4)$$

где  $\bar{V}_{ph}$  и  $\bar{V}_C$  — усредненные по поперечному передаваемому импульсу  $q_z$  матричные элементы межэлектронного притяжения (за счет ЭФВ) и экранированного кулоновского отталкивания;  $\xi_n$  — энергия электрона на  $n$ -м УЛ, отсчитываемая от уровня Ферми:  $\Psi_{nk_y}(r)$  — волновая функция  $2D$  электрона в калибровке Ландау [38]:

$$\Psi_{nk_y}(r) = \frac{1}{\sqrt{L_y}} \exp(ik_y y) \Phi_n(x - k_y l_H^2), \quad (5)$$

соответствующая УЛ с энергией

$$E_n^{(\pm)} = (n + 1/2)\hbar\omega_c \pm 1/2g\mu_B H.$$

Здесь  $L_y$  — размер  $2D$  системы вдоль оси  $y$ ;  $g$  — гиромагнитное отношение;  $\mu_B$  — магнетон Бора;  $\Phi_n$  — собственные функции линейного осциллятора.

При условии  $k_B T_c \ll \hbar\omega_c$  основной вклад в сумму по  $n$  и  $n'$  в (4) вносит верхний УЛ, т. е. слагаемое с  $n = n' = N$ . Поэтому с точностью до малых членов порядка  $k_B T_c/\hbar\omega_c$  можно в (4) положить  $\xi_n = \xi_{n'} = \delta\mu(T_c)$ , где  $\delta\mu(T)$  — сдвиг уровня химического потенциала  $\mu(T)$

относительно верхнего УЛ при  $T \neq 0$ . С экспоненциальной точностью величина  $\delta\mu(T)$  определяется соотношением

$$\delta N_S = N_L [\exp \{ \delta\mu(T)/k_B T \} + 1]^{-1}. \quad (6)$$

Здесь  $\delta N_S$  — число  $2D$  электронов на верхнем УЛ. Вводя фактор заполнения верхнего уровня  $v_N = \delta N_S/N_L$ , из (6) получаем выражение

$$\delta\mu(T) = -k_B T \ln \left( \frac{1 - v_N}{v_N} \right), \quad (7)$$

которое справедливо при  $|\delta\mu| = \hbar\omega_c/2$  в области  $0 < v_N < 1$ . В результате с учетом (4) и (7) при  $L_y \rightarrow \infty$  уравнение (3) приводится к виду [18]

$$\Delta(x) = N_L (\bar{V}_{ph} - \bar{V}_C) \frac{\text{th} \left( \frac{1}{2} \ln |1 - 1/v_N| \right)}{k_B T_c \ln |1 - 1/v_N|} \times \int_{-L_x/2}^{L_x/2} dx' \Delta(x') f_N(x, x'), \quad (8)$$

где

$$f_N(x, x') = \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \Phi_N(x' + x_0) \Phi_N(x' - x_0) \times \Phi_N(x + x_0) \Phi_N(x - x_0); \quad (9)$$

$x_0 = k_y l_H^2$ , а  $L_x$  — размер  $2D$  системы вдоль оси  $x$  ( $L_x \gg l_H$ ). Поскольку по мере заполнения (или опустошения) очередного УЛ при изменении  $H$  фактор  $v_N$  изменяется периодически (от 0 до 1) с периодом

$$\Delta H = H/N \approx \hbar\omega_c/E_F \quad (N \gg 1), \quad (10)$$

величина  $T_c$ , согласно (8), также является осциллирующей функцией  $H$ , причем в точках  $v_N = 0$  и  $v_N = 1$ , когда уровень Ферми пересекает УЛ, существуют глубокие провалы  $T_c$  почти до нуля, а в точках  $v_N = 1/2$ , когда верхний УЛ заполнен наполовину,  $T_c$  как функция  $v_N$  имеет широкие максимумы, величина которых зависит от номера  $N$  верхнего заполненного УЛ и растет с уменьшением  $N$ , т.е. с ростом  $H$ .

Аналогичный результат был получен в работе [19] в квазиклассическом приближении для модуля СП параметра порядка  $\Delta_0(H)$  в

области сверхсильных КМП ( $H > 120$  Тл) для слоистых кристаллов ВТСП. Осцилляции  $T_c(H)$  и  $\Delta_0(H)$  в  $2D$  сверхпроводниках в КМП аналогичны осцилляциям де Гааза—Ван Альфена, которые наблюдались экспериментально в слоистых кристаллах  $\text{NbSe}_2$  [27] и в купратном соединении  $\text{YBaCuO}$  [39,40].

Обратим внимание на следующие два важных обстоятельства. Во-первых, согласно (8), величина  $T_c$  для  $2D$  системы в КМП не зависит от электронной плотности состояний (ПС), в отличие от обычных сверхпроводников [37,41]. Это означает, что при условии  $\bar{V}_{ph} > \bar{V}_C$  куперовское спаривание  $2D$  электронов в КМП возможно даже при  $m_e^* \ll m_0$ , когда в реально достижимых магнитных полях  $H \geq 10$  Тл может быть достигнут ультраквантовый предел  $\hbar\omega_c \geq E_F$ , т.е. реализуются условия для ДКЭХ при  $v = 2E_F/\hbar\omega_c < 1$ . Во-вторых, из уравнения (8) следует, что «лестничные» диаграммы в куперовском канале межэлектронного взаимодействия в  $2D$  системах в КМП при  $T \rightarrow 0$  расходятся степенным образом ( $\sim 1/T^n$ ), в отличие от логарифмической расходимости, характерной для изотропных  $3D$  сверхпроводников [41] (см. ниже).

Если перейти к ультраквантовому пределу, когда  $N = 0$  и  $v_0 = v = N_S/N_L$ , то для волновых электронных функций нижайшего УЛ  $\Phi_0(x) = 1/(\pi^{1/4} \sqrt{l_H}) \exp(-x^2/2l_H^2)$  интегралы по  $x_0$  и  $x'$  в (9) вычисляются в явном виде и значение  $T_c$  равно

$$T_c = N_L (\bar{V}_{ph} - \bar{V}_C)/2k_B. \quad (11)$$

При этом неоднородный параметр порядка  $\Delta(x)$  зависит от  $x$  по экспоненциальному (гауссову) закону  $\Delta(x) = \Delta_0 e^{-x^2/l_H^2}$ . Отсюда следует, что характерный размер связанных электронных пар равен  $l_H$  и при условии  $v = k_F^2 l_H^2 < 1$  меньше среднего расстояния между парами  $\bar{r} \geq (N_S/2)^{-1/2}$ . В связи с этим в данном случае в  $2D$  системе при  $T < T_c$  не образуется макроскопический когерентный конденсат куперовских пар, как в СП состоянии обычных сверхпроводников [41]. Если при этом зеемановское расщепление  $\Delta E = g\mu_B H \geq k_B T_c$ , то энергетически выгодным является триплетное куперовское спаривание  $2D$  электронов с параллельными спинами на нижайшем УЛ.

Однако следует иметь в виду, что в рамках приближения самосогласованного поля переход к ультраквантовому пределу, строго говоря, не корректен, поскольку  $2D$  электроны образуют сильно коррелированную несжимаемую

квантовую жидкость [2]. В этом случае куперовское спаривание может быть описано с помощью вариационной функции Шриффера [41]

$$|\tilde{\Psi}_S\rangle \sim \prod_k \exp\{g_k B_k^+\} |\Psi_L\rangle \approx \prod_k (1 + g_k B_k^+) |\Psi_L\rangle,$$

где  $B_k^+$  — оператор рождения куперовской пары;  $g_k$  — фурье-компонента волновой функции виртуальных фононов;  $|\Psi_L\rangle$  — волновая функция Лафлина [2], которая описывает основное состояние  $2D$  системы.

### 3. Условия для куперовского спаривания электронов в полупроводниковых $2D$ системах

Необходимым условием куперовского спаривания электронов за счет ЭФВ является, как известно, преобладание притяжения, обусловленного обменом виртуальными фононами, над экранированным кулоновским отталкиванием. В металлах при  $E_F \gg \hbar\omega_{ph}$  выполнение этого условия облегчается благодаря дополнительному ослаблению отталкивания из-за появления большого логарифма Боголюбова — Толмачева  $\ln E_F/\hbar\omega_{ph}$  в кулоновском «псевдопотенциале» Морела — Андерсона [41]. В полупроводниковых  $2D$  системах с  $E_F = \pi\hbar^2 N_S/m_e^* \leq \hbar\omega_{ph}$  такое ослабление отсутствует, и условие  $\bar{V}_{ph} > \bar{V}_C$  является весьма жестким.

Усредненное по поперечному передаваемому импульсу  $q_z$  выражение для матричного элемента  $\bar{V}_{ph}$ , описывающего запаздывающее притяжение между  $2D$  электронами вследствие обмена виртуальными объемными акустическими и оптическими фононами, в длинноволновом пределе (с учетом малости электронного ферми-импульса  $k_F \ll \pi/a$ ) может быть представлен в виде (см. [42])

$$\bar{V}_{ph} \cong \frac{a^2 d}{2L} [D_a^2/M_a S^2 + \gamma_0^2/\bar{M}_a \omega_0^2], \quad (12)$$

где  $a$  — постоянная решетки;  $d$  — средняя ширина области локализации  $2D$  электронов в инверсионном слое;  $L$  — толщина кристалла;  $M_a$  и  $\bar{M}_a$  — суммарная и приведенная массы атомов в элементарной ячейке;  $D_a$  — деформационный потенциал для акустических фононов с фазовой (звуковой) скоростью  $s$ ;  $\gamma_0$  — деформационная константа для неполярных оптических фононов с частотой  $\omega_0$ . Поскольку типичные значения  $d = 30\text{--}50 \text{ \AA}$  (см. [43]) гораздо меньше, чем  $L \approx$

$\approx 3\,000\text{--}5\,000 \text{ \AA}$ , эффективное притяжение между  $2D$  электронами за счет ЭФВ с объемными фононами мало и не может превысить кулоновское отталкивание, усредненный матричный элемент которого имеет вид

$$\bar{V}_C \cong 2\pi e^2/\epsilon_0(\bar{q}_{\parallel} + \kappa_e), \quad (13)$$

где  $\hbar\bar{q}_{\parallel}$  — средний продольный передаваемый импульс ( $\bar{q}_{\parallel} \approx k_F$ ), а  $\kappa_e$  — обратная электронная длина экранирования, которая при  $H = 0$  равна  $\kappa_e = 2/a_e^*$  (где  $a_e^* = \epsilon_0\hbar^2/m_e^*e^2$  — эффективный борковский радиус электрона, см. [30]), тогда как в ультраквантовом пределе  $\kappa_e = l_H$  (см. [2]). Действительно, подставляя в (12) оптическую константу  $\gamma_0 = D_0/2a$ , где  $D_0$  — оптический деформационный потенциал, который в кристалле GaAs аномально велик,  $D_0 \approx 42\text{--}48 \text{ эВ}$  [44,45], и, используя значения продольной и поперечной оптических фононных частот  $\omega_0 \approx 270\text{--}290 \text{ см}^{-1}$ , а также массы атомов Ga и As, при  $\epsilon \approx 13$ ,  $m_e^* \approx 0,068m_0$  и  $k_F \leq 2 \cdot 10^6 \text{ см}^{-1}$ , в предположении, что вклады всех оптических и акустических ветвей примерно одинаковы, с учетом (13) получаем оценку для отношения  $\bar{V}_{ph} = \bar{V}_C \leq 10^{-2}$ , которая, казалось бы, полностью исключает возможность куперовского спаривания  $2D$  электронов за счет ЭФВ.

Однако при этом не учитывалось то обстоятельство, что на границе раздела сред, в частности, на гетеропереходе между чистым кристаллом GaAs и легированным полупроводником  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  или на границе между полупроводником Si и диэлектриком  $\text{SiO}_2$  в МДП структуре должны существовать поверхностные акустические волны (ПАВ) и оптические «интерфейсные» фононы разных типов [46,47]. Взаимодействие  $2D$  электронов с такими ПАВ ( $2D$  фононами) может быть гораздо более эффективным, чем с объемными фононами. Действительно, если глубина проникновения ПАВ в объем кристалла  $\lambda$  порядка или больше ширины  $d$  области локализации  $2D$  электронов в инверсионных приповерхностных слоях, а фазовая скорость ПАВ вдоль поверхности  $\tilde{s}$  гораздо меньше скорости звука  $s$  в объеме кристалла, то матричный элемент ЭФВ за счет обмена виртуальными ПАВ по порядку величины равен

$$\tilde{V}_S \cong \frac{a^2 D_a^2}{2M_a \tilde{s}^2} \quad (14)$$

и может быть гораздо больше, чем  $\bar{V}_{ph}$  в (12), если  $D_a \cong D_0$ ,  $d \gg a$  и  $\tilde{s}^2 \gg s^2$ . Так, например,

фазовая скорость и обратная глубина проникновения сдвиговой ПАВ на границе двух кристаллов с разными модулями сдвига  $\mu_1 > \mu_2$  и плотностями  $\rho_1 > \rho_2$  равны

$$\begin{aligned} \tilde{s} &= \sqrt{(\mu_1^2 - \mu_2^2)/(\mu_1\rho_1 - \mu_2\rho_2)}; \\ \lambda_i^{-1} &= q_{\parallel} \sqrt{1 - \tilde{s}^2/s_{ti}^2}, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $s_{ti} = \sqrt{\mu_i/\rho_i}$  — скорость поперечного звука в  $i$ -м кристалле ( $i = 1, 2$ ). Отсюда следует, что  $\tilde{s}^2 \ll s_{ti}^2$ , если величины  $\Delta\mu = \mu_1 - \mu_2$  и  $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2$  удовлетворяют условиям

$$\Delta\mu \ll \mu_i; \quad \Delta\mu/\Delta\rho \ll \mu_i/\rho_i \quad (i = 1, 2), \quad (16)$$

а  $\lambda_i \geq d$ , если  $q_{\parallel} \cong k_F \leq 2 \cdot 10^6 \text{ см}^{-1}$ . Таким образом, в принципе, возможно выполнение условий  $\bar{V}_S \gg \bar{V}_{ph}$  и  $\bar{V}_S > \bar{V}_C$ .

Косвенным подтверждением существования достаточно сильного ЭФВ в Si-МДП структуре может служить сообщение [28] о наблюдении сверхпроводимости, которая подавляется продольным магнитным полем. В гетероструктуре GaAs/Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As дополнительным механизмом межэлектронного притяжения (кроме ПАВ) может служить обмен виртуальными поверхностными плазмонами, существование которых обусловлено большой разницей эффективных масс электронов ( $m_e^* = 0,068m_0$ ) и дырок ( $m_h^* = 0,6m_0$ ), локализованных по разные стороны от гетероперехода. Как было показано в [31], частота таких плазмонов при одинаковых диэлектрических проницаемостях кристаллов равна

$$\tilde{\omega}_q = \Omega_h \left(1 + \sqrt{1 + \kappa_e^2/q_{\parallel}^2}\right)^{-1/2}, \quad (17)$$

где  $\Omega_h$  — плазменная частота «тяжелых» дырок, так что при  $q_{\parallel} < \kappa_e$  получаем  $\tilde{\omega}_q = \Omega_h \sqrt{q_{\parallel}/\kappa_e}$ . Обмен поверхностными плазмонами совместно с медленными ПАВ, в принципе, может обеспечить необходимое для куперовского спаривания «легких» электронов условие  $\bar{V}_S + \bar{V}_{pl} > \bar{V}_C$ , где  $\bar{V}_{pl}$  — матричный элемент электрон-плазмонного взаимодействия.

Однако аномально малая величина эффективной массы вырожденных 2D электронов в GaAs и, следовательно, низкая ПС  $g_{2D} = m_e^*/2\pi\hbar$  практически исключает возможность сверхпроводимости при  $H = 0$  в гетероструктуре GaAs/AlGaAs, в отличие от Si-МДП структуры, в которой эффективная масса электронов в Si гораздо больше  $m_e^* \approx (0,19 - 0,96)m_0$ . К тому же кристалл кремния имеет

многодолинную зонную структуру, что также способствует усилению механизма куперовского спаривания вследствие эффективного повышения ПС и увеличения константы связи [48, 49].

Ситуация радикально изменяется в сильном КМП, поскольку в этом случае, как отмечалось выше (см. [18]), критическая температура СП перехода определяется такой комбинацией параметров, которая не зависит от величины  $m_e^*$ :  $T_c \sim N_L \equiv g_{2D}\hbar\omega_c$ . Поэтому даже для «легких» 2D электронов с  $m_e^* \ll m_0$  в GaAs, в принципе, возможно куперовское спаривание (см. ниже).

#### 4. Конкуренция между куперовским и электрон-дырочным спариванием в 2D системах в квантующем магнитном поле

В работе [18] в приближении самосогласованного поля [37], которое фактически соответствует суммированию «лестничных» диаграмм в куперовском канале [50], было показано, что в 2D системах в КМП критическая температура СП перехода  $T_c$  линейно зависит от константы электрон-электронного взаимодействия и не зависит от плотности состояний и эффективной массы 2D электронов (см. (8) и (11)).

Аналогичный результат был получен в работе [32] в приближении Хартри—Фока для электрон-дырочного спаривания под действием кулоновского притяжения в 2D системе в ультраквантовом пределе. Критическая температура фазового перехода II рода в состоянии со связанными электрон-дырочными парами (экситонами) и квантовой ВЗП с волновым вектором  $Q_0 = 1,568/l_H$  (т.е. с пространственным периодом  $L_0 = 2\pi/Q_0 \approx 4l_H$ ) не зависит от электронной ПС и равна

$$T_{CDW} = 0,557v(1 - v) e^2/\epsilon_0 l_H k_B. \quad (18)$$

В произвольном КМП эта задача может быть рассмотрена путем суммирования «лестничных» диаграмм в нуль-звуковом канале [50], простейшим элементом которых является поляризационный оператор 2D электронов, который определяется в приближении хаотических фаз выражением [18]



$$\Pi_e(x, x'; q_y, \omega) = 2 \sum_{n, n'} \frac{f(E_{n'}) - f(E_n)}{\hbar\omega - E_n + E_{n'}} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_y}{2\pi} \Phi_n(x - x_0) \Phi_n(x' - x_0) \times$$

$$\times \Phi_{n'}(x' - x_0 + y_0) \Phi_{n'}(x - x_0 + y_0) e^{i(2x_0 - y_0)(x - x')/l_H^2},$$

(19)

где  $f(E_n)$  — фермиевская функция распределения;  $y_0 = q_y l_H^2$ . В статическом пределе ( $\omega \rightarrow 0$ ) для верхнего УЛ ( $n = n' = N$ ) выражение (19) принимает вид

$$\Pi_e(x, x'; q_y, 0) = -2 N_L \frac{v_N(1 - v_N)}{k_B T} F_N(x, x', y_0),$$

(20)

где

$$F_N(x, x', y_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \Phi_N(x - x_0) \Phi_N(x' - x_0) \times$$

$$\times \Phi_N(x' - x_0 + y_0) \Phi_N(x - x_0 + y_0) \times$$

$$\times \cos [(2x_0 - y_0)(x - x')/l_H^2].$$

(21)

Из (20) следует, что «лестничные» диаграммы ряда теории возмущений для вершинной части электрон-дырочного взаимодействия  $\Gamma_{eh}$  расходятся степенным образом ( $\sim 1/T^n$ ) при  $T \rightarrow 0$ , как и в куперовском канале. Суммирование этих диаграмм приводит к уравнению Бете—Солпитера [51] для  $\Gamma_{eh}$  (рис. 1), полюсная часть которого определяет критическую температуру перехода  $T_{CDW}$  в пространственно неоднородное состояние с квантовой ВЗП. Такое уравнение рассматривалось в [35] для большого числа заполненных УЛ ( $N \gg 1$ ). В ультраквантовом пределе все интегралы по  $x$ ,  $x_0$  и  $x'$  (20) и (21) вычисляются в явном виде, в результате чего с учетом как кулоновского взаимодействия, так и ЭФВ, получаем

Рис. 1. Уравнение Бете—Солпитера для вершинной части электрон-дырочного взаимодействия.

$$T_{CDW} \cong 0,681 N_L (\bar{V}_C + \bar{V}_{ph}) \frac{v(1 - v)}{k_B} \exp \left( - \frac{Q_1^2 l_H^2}{2} \right),$$

(22)

где волновой вектор  $Q_1$  и период  $L_1 = 2\pi/Q_1$  для квадратной квантовой ВЗП определяется из условия  $L_1^2 = 2\pi l_H^2$  (см. [52]).

Из (18), (20) и (22) следует, что максимум  $T_{CDW}$  как функции полного фактора заполнения  $v = N_S/N_L$  достигается в точках  $v = (2n + 1)/2$ . Это находится в хорошем соответствии с предсказаниями особенностей транспортного  $R_{xx}$  (и, возможно, холловского  $R_{xy} = R_H$ ) сопротивлений в этих точках [34–36] (см. также [53]), которые наблюдались недавно в [33]. Заметим, что особенность при  $v = 5/2$  в  $R_H$  наблюдалась ранее для квантовой ямы GaSb–InAs–GaSb [54].

Следует подчеркнуть, что выражение (18) приводит к завышенной оценке  $T_{CDW} \approx 20$  К при  $H \approx 10$  Тл и  $N_S \approx 10^{11}$  см<sup>-2</sup> [32], тогда как реально особенности  $R_{xx}$ , связанные с ВЗП, наблюдались в [33] при  $T < 0,15$  К. Это относится и к выражению (22) и связано, по-видимому, с тем, что в приближениях Хартри—Фока и самосогласованного поля не учитываются сильные многочастичные корреляции между электронами и дырками в 2D «несжимаемой» квантовой жидкости Лафлина [2], которые приводят к разрушению электронно-дырочных пар (экситонов) при более высоких температурах (как будет видно из дальнейшего, это касается и куперовского спаривания).

Электрон-дырочное спаривание в 2D системах в КМП возникает только в том случае, когда экранированное кулоновское взаимодействие преобладает над ЭФВ ( $\bar{V}_C > \bar{V}_{ph}$ ). Однако если за счет взаимодействия 2D электронов с медленными ПАВ и (или) с поверхностными 2D плазмонами результирующее притяжение между электронами ( $\bar{V}_S + \bar{V}_{pl}$ ), обсуждавшееся в разд. 3, превышает экранированное кулоновское оттал-

Рис. 2. Уравнение для вершинной части электронного взаимодействия в 2D системе в КМП с дискретным электронным спектром, полученное путем независимого суммирования лестничных диаграмм в куперовском и нуль-звуковом каналах.

квивание  $\bar{V}_C$  (которое уменьшается с ростом магнитного поля, поскольку  $\kappa_e \approx l_H^{-1} \sim H$ ), то необходимо одновременно учитывать процессы куперовского и электрон-дырочного спаривания. В этом смысле ситуация для 2D систем в КМП, для которых «лестничные» диаграммы в куперовском и нуль-звуковом каналах взаимодействия имеют одинаковую (степенную) расходимость при  $T \rightarrow 0$ , во многом похожа на ситуацию в квазиодномерных (цепочечных) металлах, в которых соответствующие диаграммы также имеют одинаковую (логарифмическую) расходимость. Как известно, это приводит к необходимости использовать так называемое «паркетное» приближение [55–58].

Однако здесь, благодаря дискретности электронного спектра 2D системы в КМП, может быть использован более простой подход, основанный на уравнении типа Бете–Солпитера [51] для вершинной части (четыреполюсника) электрон-электронного взаимодействия  $\Gamma_{ee}$ , в котором проведено независимое суммирование «лестничных» диаграмм в куперовском и нуль-звуковом каналах (рис. 2). Полюсная часть этого уравнения определяет критическую температуру  $T_c$  перехода в состояние со связанными куперовскими парами с учетом конкуренции между электрон-электронным и электрон-дырочным механизмами спаривания. Ограничиваясь для простоты приближением точечного мгновенного взаимодействия, не зависящего от спинов, когда для затравочных вершин  $\Gamma_{ee}^{(0)}$  и  $\Gamma_{eh}^{(0)}$  справедливо выражение [50]

$$\Gamma^{(0)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = V \delta(x_1 - x_2) \delta(x_1 - x_3) \delta(x_1 - x_4), \quad (23)$$

можно привести уравнение, представленное в графическом виде на рис. 2 (в смешанном координатно-импульсном представлении) с учетом только полюсной части  $\Gamma_{ee}$ , к следующему виду:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \Gamma_{ee}(q_y, x) = \frac{N_L}{k_B T_c} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \Gamma_{ee}(q_y, x') \times \left\{ \tilde{f}_N(x') [\tilde{W}_{ee} - \tilde{V}_C(0)] \frac{\text{th} \left( \frac{1}{2} \ln |1 - 1/v_N| \right)}{\ln |1 - 1/v_N|} - \right.$$

$$\left. - v_N(1 - v_N) \tilde{F}_N(x', y_0) [\tilde{W}_{ee} + \tilde{V}_C(q_y)] \right\}. \quad (24)$$

Здесь функции  $\tilde{f}_N(x')$  и  $\tilde{F}_N(x', y_0)$  определяются как интегралы по  $x$  от выражений (9) и (21), а под величиной  $\tilde{W}_{ee} > 0$  подразумевается суммарное межэлектронное притяжение вследствие взаимодействия с медленными ПАВ и с поверхностными 2D оптическими фононами и 2D плазмонами (в последнем случае, возможно, следует учитывать влияние сильного магнитного поля на спектр плазменных колебаний «тяжелых» дырок). Из (24) следует, что  $T_c$  как функция  $v_N$  имеет минимум в точках  $v_N = 1/2$  и равна нулю при  $v_N = 0$  или 1. Переходя к ультраквантовому пределу ( $N = 0$ ) и полагая  $\Gamma_{ee}(x) \sim e^{-x^2/l_H^2}$  (по аналогии с  $\Delta(x) \sim e^{-x^2/l_H^2}$ ), для  $T_c$  получаем приближенное выражение

$$T_c \cong T_0 h \left[ \left( \beta - \frac{1}{\sqrt{h}} \right) \frac{\text{th} \left( \frac{1}{2} \ln |1 - h| \right)}{\ln |1 - h|} - \frac{0,681}{h} \left( 1 - \frac{1}{h} \right) e^{-2/h} \left( \beta + \frac{1}{2 + \sqrt{h}} \right) \right], \quad (25)$$

где

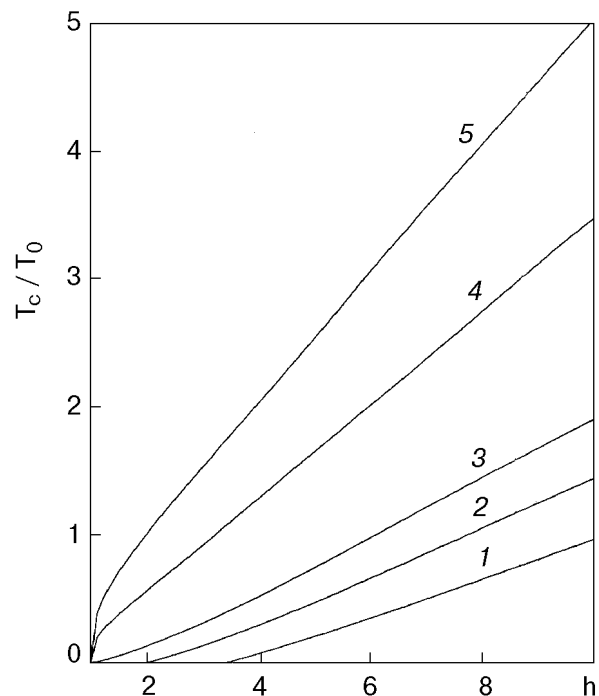


Рис. 3. Зависимость  $T_c$  от магнитного поля  $h = H/H_0$  для разных значений параметра  $\beta$ : 0,7 (1); 0,85 (2); 1,0 (3); 1,5 (4); 2,0 (5).

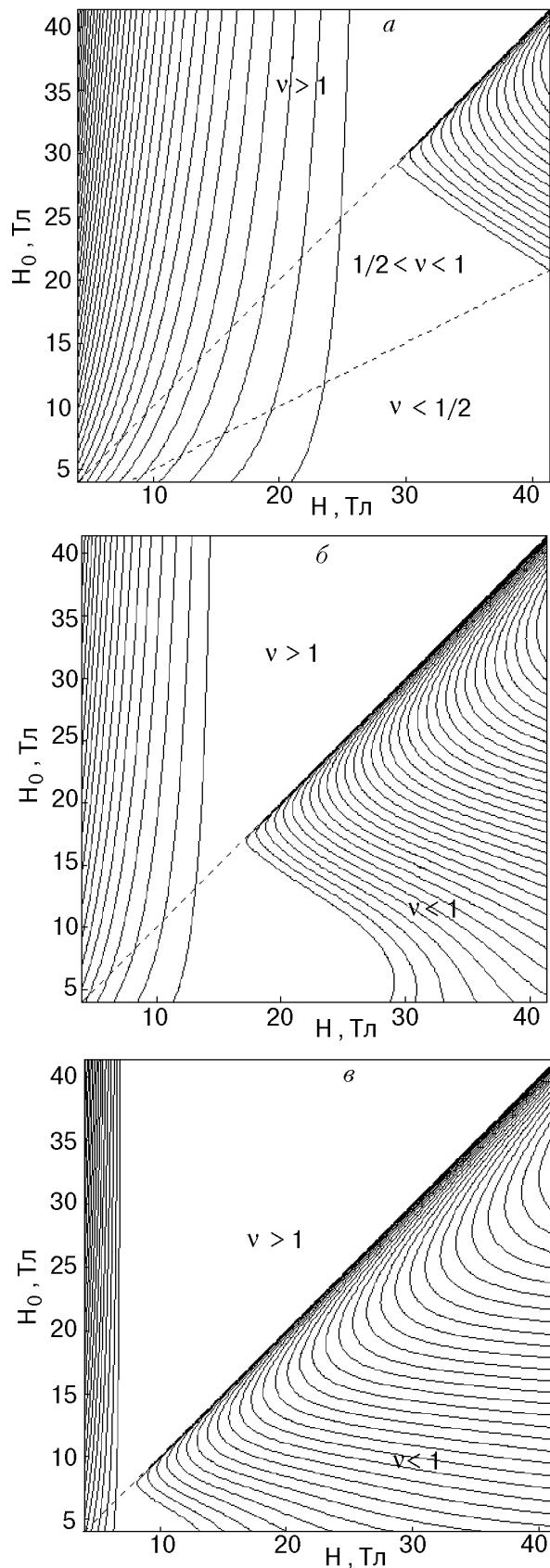


Рис. 4. Фазовые диаграммы на плоскости  $H-H_0$  для 2D системы в ультраквантовом пределе для разных значений параметра  $\alpha$ : 0,38 (а); 0,50 (б); 0,75 (в). При  $\alpha \leq 3,8$  состояние с  $\nu = 1/2$  может реализоваться только за счет электрон-дырочного спаривания в области  $\beta < \sqrt{\nu}$

$$T_0 = e^2 k_F / 2 \epsilon_0 k_B; \beta = \epsilon_0 k_F \bar{W}_{ee} / 2 \pi e^2;$$

$$h = 1/\nu = H/H_0, H_0 = \Phi_0 N_S.$$

Отсюда следует, что  $T_c > 0$ , если  $\beta > 1/\sqrt{h}$  (необходимое условие) и если первое слагаемое в квадратных скобках в правой части (25), которое описывает вклад куперовского канала, больше второго слагаемого, соответствующего вкладу нуль-звукового канала (достаточное условие).

На рис. 3 показаны вычисленные согласно (25) зависимости отношения  $T_c/T_0$  от безразмерного магнитного поля  $h = H/H_0$  для разных значений параметра  $\beta$ , который характеризует соотношение между эффективным притяжением  $\bar{W}_{ee}$  (за счет ЭФВ) и средним незранированным кулоновским отталкиванием  $2\pi e^2/\epsilon_0 k_F$  между вырожденными 2D электронами.

Как видим, при  $\beta \geq 1$  переход в состояние с куперовским спариванием в 2D системе возможен при  $H \geq H_0$ , если  $T < T_c$ , тогда как при  $\beta < 0,85$  такой переход возможен только в области полей  $H \geq 2H_0$  ( $h \geq 2$ ).

Заметим, что для кристалла GaAs с  $\epsilon_0 \approx 13$  при  $N_S \geq 10^{11} \text{ см}^{-2}$  и  $k_F = \sqrt{2\pi N_S} \geq 10^6 \text{ см}^{-1}$  величина  $T_0 \geq 65 \text{ К}$ , а поле  $H_0 \geq 4 \text{ Тл}$ . Это соответствует, по-видимому, сильно завышенным абсолютным значениям  $T_c \geq 20 \text{ К}$  (при  $h \geq 3$  и  $\beta \geq 1$ ), что связано с тем, что в приближении самосогласованного поля не учитываются сильные межэлектронные корреляции, способствующие разрушению куперовских пар. Однако, поскольку процессы куперовского и электрон-дырочного спаривания рассматриваются здесь в рамках одного и того же приближения, можно ожидать, что их относительное взаимное влияние учитывается достаточно последовательно.

На рис. 4 (а, б и в) справа показаны области куперовского спаривания ( $T_c > 0$ ) в зависимости от переменных «напряженность магнитного поля  $H$  — концентрация 2D электронов  $N_S$ » (в единицах поля  $H_0 = N_S \Phi_0$ ) для разных значений безразмерного параметра  $\alpha$ , связанного с  $\beta$  соотношением

$$\alpha = \beta \sqrt{H_{0\min}/H_0}; H_{0\min} = N_{S\min} \Phi_0, \quad (26)$$

где  $N_{S\min} \approx 10^{11} \text{ см}^{-2}$  и  $H_{0\min} \approx 4 \text{ Тл}$ . Как видим, с ростом  $\alpha$  область куперовского спаривания расширяется и при  $\alpha \geq 0,75$  заполняет почти весь сектор  $H > H_0$ , тогда как при  $\alpha \leq 0,38$  эта область вытесняется в сектор  $H_0 < H < 2H_0$  при  $H \leq 40 \text{ Тл}$  (т. е. в область  $1 < h < 2$ ). Это означает, что куперовское спаривание 2D

электронов возможно только в области  $1/2 < \nu < 1$ , а состояние с  $\nu = 1/2$  не реализуется (тогда как состояния с  $\nu < 1/2$  могут реализоваться в силу электрон-дырочной симметрии).

На рис. 4 слева (вертикальная штриховка) показана также область значений  $\beta \leq 1/\sqrt{h}$ , в которой возможно электрон-дырочное спаривание с возникновением ВЗП при  $T < T_{CDW}$ . Как видим, с ростом  $\alpha$  эта область быстро сужается и при  $\alpha \geq 0,75$  вытесняется практически полностью в сектор  $H < H_0$  (рис. 4, в). Последнее в силу соотношения  $h = 1/\nu$  качественно согласуется с наблюдавшимися при  $\nu = (2n + 1)/2$  с  $n \geq 2$  особенностями транспортного сопротивления  $R_{xx}$  в  $2D$  системах [33], которые связываются с квантовой ВЗП [34–36] с максимумом  $T_{CDW}$  при половинном заполнении верхнего УЛ.

### 5. Куперовское спаривание и ДКЭХ

Как следует из фазовой диаграммы на рис. 4, при достаточно сильном межэлектронном притяжении, когда параметр  $\alpha \sim 1$ , область куперовского спаривания  $2D$  электронов практически совпадает с областью ДКЭХ.

Однако следует подчеркнуть, что состояние  $2D$  системы ниже  $T_c$  в ультраквантовом пределе ( $\nu < 1$ ), когда среднее расстояние между куперовскими парами  $\bar{r} > \sqrt{2/N_S}$  гораздо больше размера пары  $l_H$ , существенно отличается от макроскопического когерентного СП состояния в обычных сверхпроводниках с сильно перекрывающимися волновыми функциями куперовских пар [37,41], для которых характерна бесконечная проводимость ( $\sigma \rightarrow \infty$ ) и незатухающие мейсснеровские токи ниже термодинамического  $H_c(T)$  или первого критического  $H_{c1}(T)$  магнитных полей для сверхпроводников 1-го или 2-го рода соответственно.

Локальные триплетные куперовские пары в  $2D$  системе при  $T < T_c$  в условиях ДКЭХ не перекрываются и ведут себя в транспортных явлениях, не зависящих от спина, практически так же, как и неспаренные «замангниченные» электроны. Именно этим обусловлены нулевые значения диагональных компонент тензоров магнитопротiwления ( $R_{xx} = 0$ ) и проводимости ( $\sigma_{xx} = 0$ ) в отсутствие рассеяния на дефектах в тех областях  $H$  и  $N_S$ , где холловские (недиагональные) компоненты сопротивления  $R_{xy} = R_H$  и проводимости  $\sigma_{xy} = \sigma_H$  имеют плато, соответствующие дискретным квантовым значениям  $\sigma_H = 1/R_H = e^2\nu/2\pi\hbar$ .

Итак, если межэлектронное притяжение (за счет взаимодействия с ПАВ и поверхностными  $2D$  плазмонами) достаточно велико ( $\alpha \geq 1$ ,  $\beta \geq 1$ ), то при  $T < T_c$  в  $2D$  системах могут сосуществовать связанные куперовские пары и неспаренные электроны. Для такого состояния в работе [8] была сконструирована смешанная волновая функция  $\Psi$  лафлиновского типа [2], которая является антисимметричной относительно перестановок неспаренных электронов и электронов внутри каждой пары и симметричной относительно перестановок пар. Такая многоэлектронная волновая функция основного состояния приводит к особенностям  $R_H$  и  $\sigma_H$  при факторах заполнения  $\nu$ , удовлетворяющих соотношению Гальперина (1).

Если в  $2D$  системе существует  $N_p$  связанных электронных пар и  $N_e$  несвязанных электронов (при полном числе электронов  $N_S = 2N_p + N_e$  на единицу площади), то из требования, чтобы электроны и пары занимали одну и ту же область  $2D$  пространства, вытекает следующее соотношение между  $N_p$  и  $N_e$  [8]:

$$\frac{N_p}{N_e} = \frac{2m - r}{p - 2r}, \quad (27)$$

где  $m$  — нечетное,  $p$  — четное, а число  $r$  может иметь любую четность.

При  $T \rightarrow 0$ , когда все электроны связываются в куперовские пары и  $N_e = 0$ , из (27) следует, что  $p = 2r$ , так что, согласно (1),  $\nu = 2/r$ , если  $r \neq 2m$ . При нечетных значениях  $r = 2n + 1$  это соответствует данным многочисленных экспериментов по наблюдению ДКЭХ [5–7] при следующих значениях фактора заполнения с учетом электрон-дырочной симметрии спектра возмущений:

$$\nu = \frac{2}{2n + 1}; \quad \nu = \frac{2n - 1}{2n + 1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (28)$$

Четные значения  $r = 4n$ , исключая случай  $r = 2(2n + 1)$ , соответствуют пока не наблюдавшимся простым дробям  $\nu = 1/2n$  с четными знаменателями (см. [10]).

Наоборот, при  $T \rightarrow T_c$ , когда число связанных куперовских пар  $N_p \rightarrow 0$ , из (27) следует, что  $r = 2m \equiv 2(2n + 1)$ . При этом фактор заполнения (1) для любых (четных) значений  $p$  равен  $\nu = 1/m \equiv 1/(2n + 1)$ , т. е. сводится, как и следовало ожидать, к простым лафлиновским дробям с нечетными знаменателями [2].

Однако не все значения  $\nu$  из (1) могут реализоваться в случае куперовского спаривания

$2D$  электронов, поскольку в области  $0 \leq T \leq T_c$  относительные числа свободных и спаренных электронов

$$v_e \equiv \frac{N_e}{N_e + 2N_p} = \frac{p - 2r}{4m + p - 4r}; \quad (29)$$

$$v_p \equiv \frac{2N_p}{N_e + 2N_p} = \frac{2(2m - r)}{4m + p - 4r}$$

зависят от  $T$  и изменяются от  $v_e = 0$  и  $v_p = 1$  при  $T = 0$  до  $v_e = 1$  и  $v_p = 0$  при  $T = T_c$  с сохранением полного числа частиц ( $v_e + v_p = 1$ ), что накладывает определенное ограничение на индексы  $m$ ,  $p$  и  $r$ .

В частности, всем значениям  $r = p/2$  (кроме  $r = 2m$ ) соответствуют значения  $v_e = 0$  и  $v_p = 1$ , которые реализуются только при  $T \rightarrow 0$ . Согласно (1), в этом случае  $v = 2/r = 4/p$  может содержать дроби с четными знаменателями ( $v = 1/2$  при  $p = 2r = 8$ ,  $v = 1/4$  при  $p = 2r = 16$  и т. д.). Наоборот, значениям  $r = 2m$  (но  $r \neq p/2$ ) соответствуют  $v_e = 1$  и  $v_p = 0$  при  $T \geq T_c$ . Но поскольку при  $T > 0$  (но  $T < T_c$ ) величины  $v_e$  и  $v_p$  должны быть положительными, то, согласно (1) и (29), следует ограничиться такими значениями  $r$  и  $p$  (при фиксированном  $m$ ), которые удовлетворяют неравенствам

$$r < p/2; \quad r < 2m; \quad r < m + p/4; \quad r < \sqrt{mp}. \quad (30)$$

Так, например, при  $m = 3$  в точке  $T = 0$ , когда  $v_e = 0$  и  $v_p = 1$ , из (1) получаем  $v = 2/3$  при  $p = 2r = 6$ ,  $v = 1/2$  при  $p = 2r = 8$  и  $v = 2/5$  при  $p = 2r = 10$ , тогда как в точке  $T = T_c$ , когда  $v_e = 1$  и  $v_p = 0$ , при  $r = 6$  для любых  $p$  (кроме  $p = 12$ ) получаем  $v = 1/3$ . Если учесть, что с повышением  $T$  относительное число спаренных электронов  $v_p$ , которое можно рассматривать как «параметр порядка», монотонно уменьшается (возможно, по закону, близкому к температурной зависимости щели в теории БКШ [41]), то можно выстроить следующую иерархию дробных значений  $v$  при  $m = 3$  для разных  $T$ , при которых должны наблюдаться соответствующие особенности  $R_H$ , начиная с низких  $T$ :

$$v_p = 5/6 (v_e = 1/6): \quad v = 2/11 \text{ при } r = 1 \text{ и } p = 4;$$

$$v_p = 4/5 (v_e = 1/5): \quad v = 5/7 \text{ при } r = 2 \text{ и } p = 6;$$

$$v_p = 2/3 (v_e = 1/3): \quad v = 3/5 \text{ при } r = 2 \text{ и } p = 8$$

либо  $v = 3/7$  при  $r = 4$  и  $p = 10$ ;

$$v_p = 1/2 (v_e = 1/2): \quad v = 4/7 \text{ при } r = 1 \text{ и } p = 12,$$

$v = 1/2$  при  $r = 2$  и  $p = 12$ ,

$v = 4/9$  при  $r = 3$  и  $p = 12$ ,

$v = 5/9$  при  $r = 4$  и  $p = 12$

либо  $v = 4/11$  при  $r = 4$  и  $p = 20$

или при  $r = 5$  и  $p = 12$ .

Аналогично могут быть получены наборы  $v$  при разных  $v_p$  (т. е. при разных  $T$ ) и для других значений  $m$ . Так, для  $m = 5$  при  $T = 0$ , когда  $v_p = 1$  ( $v_e = 0$ ) и  $r = p/2$ , помимо приведенных выше дробей ( $v = 2/3$ ,  $1/2$  и  $2/5$ ), находим дробные значения  $v = 1/3$  при  $p = 2r = 12$ ,  $v = 2/7$  при  $p = 2r = 14$ ,  $v = 1/4$  при  $p = 2r = 16$  и  $v = 2/9$  при  $p = 2r = 18$ . При  $T = T_c$ , когда  $v_p = 0$  ( $v_e = 1$ ), при  $r = 10$  для любых  $p$  (кроме  $p = 20$ ) получаем  $v = 1/5$ .

Для промежуточных температур ( $0 < T < T_c$ ) при  $m = 5$  имеем, согласно (1) и (29) с учетом (30), следующую иерархию:

$$v_p = 4/5 (v_e = 1/5): \quad v = 5/9 \text{ при } r = 2 \text{ и } p = 8;$$

$$v_p = 3/4 (v_e = 1/4): \quad v = 2/9 \text{ при } r = 2 \text{ и } p = 20$$

либо  $v = 4/11$  при  $r = 4$  и  $p = 12$ ;

$$v_p = 2/3 (v_e = 1/3): \quad v = 3/5 \text{ при } r = 0 \text{ и } p = 10$$

либо  $v = 3/7$  при  $r = 2$  и  $p = 12$ ;

$$v_p = 1/2 (v_e = 1/2): \quad v = 4/11 \text{ при } r = 1 \text{ и } p = 20,$$

$v = 2/9$  при  $r = 8$  и  $p = 20$

либо  $v = 2/5$  при  $r = 0$  и  $p = 20$ .

Для  $m = 7$  при  $T = 0$ , когда  $v_p = 1$  ( $v_e = 0$ ), получаем дополнительные дроби  $v = 2/11$  при  $p = 2r = 22$ ,  $v = 1/6$  при  $p = 2r = 24$  и  $v = 2/13$  при  $p = 2r = 26$ , а при  $T = T_c$ , когда  $v = 0$  ( $v_e = 1$ ), при  $r = 14$  для любых  $p$  (кроме  $p = 28$ )  $v = 1/7$ .

В области  $0 < T < T_c$ , согласно (1), (29) и (30), при  $m = 7$

$$v_p = 4/5 (v_e = 1/5): \quad v = 5/11 \text{ при } r = 2 \text{ и } p = 10;$$

$$v_p = 3/4 (v_e = 1/4): \quad v = 2/7 \text{ при } r = 8 \text{ и } p = 20;$$

$$v_p = 2/3 (v_e = 1/3): \quad v = 2/5 \text{ при } r = 2 \text{ и } p = 12,$$

$v = 1/3$  при  $r = 2$  и  $p = 16$ ,

$v = 3/11$  при  $r = 4$  и  $p = 18$

либо  $v = 1/5$  при  $r = 8$  и  $p = 22$ ;

$$v_p = 1/2 (v_e = 1/2): \quad v = 1/4 \text{ при } r = 2 \text{ и } p = 28,$$

$v = 2/9$  при  $r = 4$  и  $p = 28$ ,

$v = 1/5$  при  $r = 6$  и  $p = 28$

либо  $v = 1/6$  при  $r = 10$  и  $p = 28$ .

Если провести дополнительную антисимметризацию волновой функции Гальперина [8] для системы связанных электронных пар относительно перестановок электронов из разных пар и учесть, что перестановки электронов внутри каждой пары не играют роли при расчете энергии основного состояния, то можно исключить ненаблюдаемые в экспериментах дробные значения  $v$  с четными знаменателями. В этом случае индекс  $p$ , который определяет удвоенное число квантов потока, приходящихся на одну пару, равен

$$p = 2(2s + u + w), \quad (31)$$

где  $s$  и  $w$  — нечетные числа, соответствующие обменным корреляциям при всевозможных перестановках электронов,  $u$  — произвольное целое число ( $u \geq 0$ ), а четное число  $2u$  отвечает симметричности волновой функции при перестановках центров тяжести пар.

Если предположить, что минимум энергии соответствует минимальному значению  $u = 0$  (см. [8]), так что перестановки пар несущественны, то допустимые значения индекса  $p$  равны

$$p = 2 [2(2l + 1) + (2k + 1)]; \quad l, k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (32)$$

или  $p = 2(2n + 1) = 6, 10, 14, \dots$  (при  $n = 1, 2, 3, \dots$ ). При этом из соотношения (1) следуют дробные значения фактора заполнения только с нечетными знаменателями:  $\nu = q/(2n + 1)$ ,  $q \geq 1$ .

## 6. Заключение

Таким образом, высказанное в [18] предположение о возможности куперовского спаривания  $2D$  электронов в сильных КМП за счет ЭФВ, которое не зависит от величины эффективной массы  $m_e^*$  и плотности состояний, позволяет на основе предложенной Гальпериным [8] «смешанной» волновой функции связанных электронных пар и неспаренных электронов в ультраквантовом пределе объяснить практически все экспериментально наблюдаемые особенности холловского сопротивления  $R_H$  в полупроводниковых гетероструктурах в режиме ДКЭХ [1,5–7,43,59].

Необходимым условием куперовского спаривания является достаточно сильное притяжение между электронами, способное преодолеть экранированное кулоновское отталкивание. Такое притяжение не может быть обеспечено деформационным ЭФВ с объемными акустическими и оптическими фононами в полупроводниковых кристаллах GaAs и Si [44,45], в связи с чем эффект куперовского спаривания практически не рассматривался и не принимался во внимание при изучении свойств  $2D$  полупроводниковых систем в КМП и новой квантовой  $2D$  жидкости Лафлина [2,60] (исключение составляют работы [27,61]).

Однако при этом никогда не учитывалось то обстоятельство, что на границах раздела сред (гетеропереходах) в слоистых МДП и гетероструктурах могут существовать ПАВ ( $2D$  фононы) [46,47] и поверхностные плазмоны [31], взаимодействие с которыми  $2D$  электронов в приповерхностных слоях может быть гораздо

более эффективным, чем с объемными  $3D$  фононами. Существование таких поверхностных фононных мод в полупроводниковых  $2D$  системах подтверждается оптическими экспериментами по комбинационному рассеянию света (см., например, [62–64]). В данной работе предполагается, что взаимодействие именно с этими «интерфейсными» модами обеспечивает достаточно сильное притяжение и куперовское спаривание электронов в  $2D$  системах, косвенным подтверждением чего может служить наблюдавшаяся в Si-МДП структуре сверхпроводимость при  $T < 1$  К [28].

Размер образующихся при условии  $\nu = k_F^2 l_H^2 < 1$  связанных куперовских пар порядка магнитной длины  $l_H$  и мал по сравнению со средним расстоянием между парами  $\bar{r} > k_F^{-1}$ . В результате этого в  $2D$  системе в условиях ДКЭХ не образуется макроскопический когерентный квантовый СП конденсат, в отличие от обычных сверхпроводников с сильно перекрывающимися волновыми функциями куперовских пар [41]. Локальные пары ведут себя в транспортных процессах аналогично «замагниченным» электронам с волновыми функциями  $\psi_0(x) \sim e^{-x^2/2l_H^2}$ , чем и определяются нулевые значения продольных компонент проводимости  $\sigma_{xx} = \sigma_0 / (1 + \omega_c^2 \tau^2)$ , где  $\sigma_0 = e^2 N_S \tau / m_e^*$ , и удельного сопротивления  $\rho_{xx} = \sigma_{xx} / (\sigma_{xx}^2 + \sigma_H^2)$  при бесконечно больших временах релаксации ( $\tau \rightarrow \infty$ ) и при  $\sigma_H = 1/R_H = e^2 \nu / 2\pi \hbar$ , в отличие от СП состояния  $\sigma \rightarrow \infty$ .

Переход в СП состояние может реализоваться в более слабых магнитных полях, когда  $\nu = k_F^2 l_H^2 > 4\pi$ , так что на каждый квант потока приходится большое число электронов, а размер куперовских пар ( $\sim l_H$ ) становится больше среднего расстояния между ними ( $\bar{r} \approx \sqrt{2/N_S}$  при  $T \rightarrow 0$ ), т.е. возможно образование когерентного СП конденсата куперовских пар.

Наконец, в пределе  $\nu \rightarrow \infty$  кванты магнитного потока, экранированные мейсснеровскими СП токами макроскопически большого числа куперовских пар, превращаются в  $2D$  вихри Абрикосова, несущие полудельный квант потока  $\Phi_s = \Phi_0/2$ .

Целочисленные значения холловской проводимости  $\sigma_H = c\alpha_0 n$  (где  $\alpha_0 = e^2/2\pi \hbar c \approx 1/137$  — постоянная тонкой структуры) в режиме ЦКЭХ [17] обусловлены конечной кратностью вырождения уровней Ландау в  $2D$  системах  $N_L = 1/2 \pi l_H^2 = H/\Phi_0$ , так что при  $T \rightarrow 0$  заполнение (опустошение) следующего УЛ при изменении  $H$  или  $N_S$  начинается только после

того, как полностью заполнен (опустошен) предыдущий УЛ. Такие почти идеальные ступеньки  $R_H = 1/\sigma_H$  наблюдались в [65] при  $T = 8$  К.

С другой стороны, дробные значения  $\sigma_H = \alpha_0/m$  в режиме ДКЭХ [1] обусловлены «жесткостью» лафлиновской волновой функции [2], описывающей сильно коррелированную несжимаемую 2D жидкость. В такой «структурированной» жидкости число квантов магнитного потока  $m$ , приходящихся на один электрон в основном состоянии, строго фиксировано и остается постоянным до тех пор, пока возрастающее (убывающее) магнитное поле  $H$  не достигнет такого «критического» значения, при котором полный магнитный поток  $\Phi = HS$  через 2D систему соответствует возросшему (уменьшившемуся) на два числа квантов  $\Phi_0$  в расчете на один электрон. Можно сказать, что в области промежуточных полей существует «потенциальный барьер», препятствующий изменению числа квантов потока в основном состоянии. Однако при этом, как было показано в [2], возможны возбужденные состояния, соответствующие рождению или уничтожению одиночных квантов  $\Phi_0$ , что сопровождается таким пространственным перераспределением электронной плотности, которое соответствует появлению локализованного в области размером порядка  $l_H$  избыточного дробного заряда  $e^* = e/m$  (т. е. квазичастицы или квазидырки с эффективным зарядом  $\pm e^*$ ). В частности, при протекании диссипативного холловского тока (при нулевом транспортном токе в пределе  $\omega_c\tau \rightarrow \infty$ ) дополнительные кванты магнитного потока рождаются (входят) на одном краю 2D системы и дрейфуют в скрещенных электрическом  $\mathbf{E}$  и магнитном  $\mathbf{H}$  полях (вместе с «экранирующими» квазичастицами с дробным зарядом  $e^*$ ) к противоположному краю, где уничтожаются (выходят). Заметим, что аналогичным образом происходит движение квантовых вихрей Абрикосова в резистивном состоянии идеальных сверхпроводников 2-го рода в отсутствие центров пиннинга в магнитных полях  $H_{c1} < H < H_{c2}$  [37].

Таким образом, не существует принципиальной разницы между явлениями дробного и целочисленного КЭХ в 2D системах и сверхпроводниками 2-го рода благодаря единой калибровочной инвариантности квантовых систем, на важность которой указывалось в работах Лафлина [66] и Гальперина [67] еще до открытия ДКЭХ.

В условиях, когда в 2D системе куперовское спаривание преобладает над экситонным, в частности благодаря ослаблению экранированного кулоновского отталкивания с ростом магнитного поля  $H$  в ультраквантовом пределе (см. рис. 3 и 4), наряду с особенностями  $R_H$  и  $\sigma_H$  при дробных значениях  $\nu = q/(2n + 1)$  с нечетными знаменателями и с  $q \geq 1$ , но  $q < 2n + 1$  [5–7], согласно соотношению Гальперина (1), в области  $T < T_c$ , в принципе, могут наблюдаться также особенности  $R_H$  при значениях фактора заполнения  $\nu = 1/2n$  и  $\nu = 1 - 1/2n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Однако условие симметризации волновой функции куперовских пар позволяет исключить дроби с четными знаменателями. В целом предположение о куперовском спаривании 2D электронов в сочетании с суперпозицией связанных электронных пар и несвязанных электронов, которая описывается вариационной волновой функцией Гальперина [8], позволяет получить гораздо более богатый набор квантовых особенностей холловского сопротивления  $R_H$  и проводимости  $\sigma_H$ , чем другие модели ДКЭХ (см. [11,12,15,59,60]).

Выражаю искреннюю благодарность М. Я. Валаху за высококвалифицированную консультацию по физическим свойствам полупроводников типа GaAs и Si, А. Л. Касаткину за обсуждение вопросов, связанных с применимостью приближения самосогласованного поля и уравнения Бете—Солпитера для описания куперовского спаривания в 2D металлах в КМП, В. М. Локтеву, С. М. Рябченко и В. Б. Тимофееву за полезные стимулирующие дискуссии, а также Е. Г. Галкиной, А. Э. Пашицкому и В. И. Пентегову за компьютерные расчеты и помощь в оформлении статьи.

Данная статья приурочена к 80-летию академика Бориса Иеремиевича Веркина — создателя и первого директора уникального научно-исследовательского центра — Физико-технического института низких температур (ФТИНТ) НАН Украины. Работа посвящена тем вопросам, к которым Б. И. Веркин проявлял постоянный интерес: явлениям в сильных магнитных полях при низких температурах и механизмам сверхпроводимости (куперовского спаривания) в низкоразмерных системах.

1. D. C. Tsui, H. L. Störmer, and A. C. Gossard, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1559 (1982).
2. R. B. Laughlin, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1395 (1983); *Science* **242**, 525 (1988).
3. R. Justrow, *Phys. Rev.* **98**, 1479 (1955).

4. Ю. А. Бычков, С. В. Иорданский, Г. М. Элиашберг, *Письма в ЖЭТФ* **33**, 152 (1982).
5. H. L. Störmer, A. Chang, D. C. Tsui, J. C. M. Hwang, A. C. Gossard, and W. Wiegmann, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1953 (1983).
6. E. F. Mendez, M. Heiblum, L. L. Chang, and L. Esaki, *Phys. Rev.* **B28**, 4886 (1983).
7. A. M. Chang, P. Berglund, D. C. Tsui, H. L. Störmer, and J. C. Hwang, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 997 (1984).
8. B. I. Halperin, *Helv. Phys. Acta* **56**, 75 (1983).
9. R. Mort and B. I. Halperin, *Phys. Rev.* **B33**, 2221 (1986).
10. B. I. Halperin, P. A. Lee, and N. Read, *Phys. Rev.* **B47**, 7312 (1993).
11. F. Wilczek, *Fractional Statistics and Anyon Superconductivity*, Singapore, World Scientific (1990).
12. A. Lerda, *Anyons*, Springer-Verlag (1992).
13. J. G. Bednorz and K. A. Müller, *Z. Phys.* **B84**, 189 (1986).
14. *Высокотемпературные сверхпроводники*, Д. Нелсон, М. Уиттинхем, Т. Джордж (ред.), Мир, Москва (1988).
15. J. K. Jain, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 199 (1989).
16. S. L. Sondhi, A. Karlhede, S. A. Kivelson, and E. H. Rezayi, *Phys. Rev.* **B47**, (1993).
17. K. von Klitzing, C. Dorda, and M. Pepper, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 494 (1980).
18. А. Л. Касаткин, Э. А. Пашицкий, *УФЖ* **22**, 467 (1977).
19. T. Maniv, A. I. Rom, I. D. Vagner, and P. Wyder, *Phys. Rev.* **B46**, 8360 (1992).
20. A. R. Rajagopal and R. Vasudevan, *Phys. Lett.* **20**, 585 (1966); **23**, 539 (1966).
21. L. Gunter and L. W. Gruenberg, *Solid State Commun.* **4**, 329 (1966).
22. L. W. Gruenberg and L. Gunter, *Phys. Rev.* **176**, 606 (1968).
23. L. P. Gor'kov and A. G. Lebed', *J. Phys. (Paris)* **43**, L433 (1984).
24. А. Г. Лебедь, *Письма в ЖЭТФ* **44**, 89 (1986).
25. N. Dupuis, G. Montambaux, and C. A. R. Sa de Melo, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2613 (1993).
26. J. E. Grabner and M. Robbins, *Phys. Rev. Lett.* **36**, 422 (1976).
27. F. D. M. Haldane and E. Rezayi, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 956 (1988); *ibid.* **61**, 1985 (1988).
28. D. Simonyan, S. V. Kravchenko, M. P. Sarachik, and V. M. Pudalov, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2304 (1997).
29. P. Phillips, S. Knysh, and D. Davidovich, *Nature* **395**, 253 (1998).
30. Т. Андо, А. Фаулер, Ф. Стерн, *Электронные свойства двумерных систем*, Мир, Москва (1985).
31. Э. А. Пашицкий, *ЖЭТФ* **56**, 662 (1969).
32. H. Fukuyama, P. M. Platzman, and P. W. Anderson, *Phys. Rev.* **B19**, 5211 (1979).
33. P. M. Lilly, K. B. Cooper, J. P. Eisenstein, L. N. Pfeiffer, and K. West, *Preprint cond-mat/9808227*.
34. A. A. Koulov, M. M. Fogler, and B. I. Shklovskii, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 499 (1996).
35. R. Moessner and J. T. Chalker, *Phys. Rev.* **B54**, 5006 (1996).
36. M. M. Fogler and A. A. Koulov, *Phys. Rev.* **B55**, 9326 (1997).
37. П. де Жен, *Сверхпроводимость металлов и сплавов*, Мир, Москва (1968).
38. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, Москва (1974).
39. G. Kido, K. Komorita, H. Katayama-Yoshida, and T. Takahashi, *J. Phys. Chem. Solids* **52**, 465 (1991).
40. C. M. Fowler, B. I. Freeman, W. L. Hults, J. C. King, F. M. Mueller, and J. L. Smith, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 534 (1992).
41. Дж. Шриффер, *Теория сверхпроводимости*, Мир, Москва (1970).
42. В. Ф. Гантмахер, И. Б. Левинсон, *Рассеяние носителей тока в металлах и полупроводниках*, Наука, Москва (1984).
43. Э. И. Рашба, В. Б. Тимофеев, *ФТП* **20**, 977 (1986).
44. M. Cardona, H. Grimsditsch, and D. Olego, *Light Scattering in Solids*, J. L. Birman, H. Z. Cummins, and K. K. Rebane (eds.), N. Y., Plenum Press (1979).
45. P. Vogl and W. Potz, *Phys. Rev.* **B24**, 2025 (1981).
46. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория упругости*, Наука, Москва (1965).
47. *Поверхностные акустические волны*, А. Олинер (ред.), Мир, Москва (1981).
48. М. Козн, Г. Глэдстоун, М. Йенсен, Дж. Шриффер, *Сверхпроводимость полупроводников и переходных металлов*, Мир, Москва (1972).
49. Э. А. Пашицкий, А. С. Шпигель, *УФЖ* **23**, 669 (1978).
50. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Гос. изд-во физ.-мат. лит., Москва (1962).
51. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Релятивистская квантовая теория*, ч. 2, Наука, Москва (1971).
52. Ю. А. Бычков, Э. И. Рашба, *Письма в ЖЭТФ* **38**, 195 (1983).
53. Y. Kuramoto, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 866 (1983).
54. E. E. Mendez, L. L. Chang, C. A. Chang, L. F. Alexander, and L. Esaki, *Surface Sci.* **142**, 215 (1984).
55. Ю. А. Бычков, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *ЖЭТФ* **50**, 738 (1966).
56. И. Е. Дзялошинский, А. И. Ларкин, *ЖЭТФ* **61**, 791 (1971).
57. Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *ЖЭТФ* **67**, 397 (1974).
58. A. T. Zheleznyak, V. M. Yakovenko, and I. E. Dzyaloshinskii, *Phys. Rev.* **B55**, 3200 (1997).
59. T. Chakraborty and P. Pietilainen, *The Quantum Hall Effects: Integral and Fractional*, Springer Series in Solid State Science, v. 85, (1995).
60. *Perspective in Quantum Hall Effects: Novel Quantum Liquids in Low-Dimensional Semiconductor Structures*, Sanhar Das Sarma and Aron Pinczuk (reds.), John Wiley & Sons (1996).
61. G. Moore and N. Read, *Nucl. Phys.* **B360**, 362 (1991).
62. M. Nakayama, M. Ishida, and N. Sano, *Phys. Rev.* **B38**, 6348 (1988).
63. Z. V. Popovich, M. Cardona, E. Richter, D. Strauch, L. Tapfer, and K. Ploog, *Phys. Rev.* **B41**, 5904 (1990).
64. C. Trallero-Ginev, F. Garcia-Moliner, V. R. Velasco, and M. Cardona, *Phys. Rev.* **B45**, 11944 (1992).
65. G. Ebert, K. v. Klitzing, C. Probst, and K. Ploog, *Solid State Commun.* **44**, 95 (1982).
66. R. B. Laughlin, *Phys. Rev.* **B23**, 5632 (1981).
67. B. I. Halperin, *Phys. Rev.* **B25**, 2185 (1982).



---

## Cooper pairing of two-dimensional electrons in quantizing magnetic field and fractional quantum Hall effect

E. A. Pashitskii

The paper reviews briefly the current state of the theory of fractional quantum Hall effect (FQHE). It is suggested that the experimentally observed features of the Hall resistance  $R_H$  of the two-dimensional ( $2D$ ) electronic system in a strong quantizing magnetic field with a fractional filling of the lowest Landau level  $\nu = q/(2n + 1)$  ( $q \geq 2$ ), which cannot be described by the Laughlin antisymmetric wave function may be responsible for by the Cooper pairing of  $2D$  electrons. It is assumed that the electron-electron attraction necessary for the Cooper pairing may be resulted from the interaction of  $2D$  electrons with surface acoustic waves ( $2D$  phonons) and surface  $2D$  plasmons localized near the crystal interfaces (heterojunctions) in the vicinity of the inversion layers in MOS and heterostructures. The coexistence of electron pairs and unpaired electrons in the FQHE regime should lead to the features in  $R_H$  for the values of  $\nu$  described by the

Halperin relation. The latter is determined by the symmetry properties of the «mixed» wave function of pairs (bosons) and electrons (fermions), and allows, in principle, to describe all the experimental data on FQHE. Summation of the power-law diverging (at  $T \rightarrow 0$ ) ladder diagrams gives a Bethe-Solpeter-type equation for the vertex part of the electron-electron interaction in a  $2D$  system in the quantizing magnetic field, accounting for the electron-electron and electron-hole pairings in the Cooper and zero-sound channels. This equation provides a critical temperature  $T_c$  of the phase transition to a state with the Cooper pairs,  $T_c$  in the ultra-quantum limit being independent of the effective mass of the electrons, that is of the density of states. A phase diagram of the  $2D$  system is constructed for the variable electron concentration and magnetic field. It is shown that in the case of sufficiently strong attraction the region of Cooper pairing of  $2D$  electrons practically coincides with the region of FQHE for  $\nu < 1$ , while the region of electron-hole pairing, bringing about the quantum charge-density waves (CDW), is displaced to a region of  $\nu > 1$ , in agreement with the experimental data on the CDW-induced features of the longitudinal resistance  $R_{xx}$  for  $\nu = (2n + 1)/2$  with  $n \geq 2$ .