

УДК 539.3

МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ СТАТИЧНИХ І ДИНАМІЧНИХ НАПРУЖЕНЬ У ТІЛАХ З ПІДПОВЕРХНЕВИМИ ТРІЩИНАМИ

Г. С. КИТ, Р. М. КУШНІР, В. В. МИХАСЬКІВ, М. М. НИКОЛИШИН

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Проаналізовано аналітичні і числові методи розв'язування задач теорії тріщин, розташованих біля поверхні об'ємних і тонкостінних тіл за теплових і силових, статичних і динамічних навантажень. Описано ефекти впливу поверхні тіла чи поверхні поділу матеріалів на коефіцієнти інтенсивності статичних і динамічних напружень в околі дефектів.

Ключові слова: *пружно-пластична біматеріальна оболонка, пружний півпростір, пружний біматеріальний простір, підповерхнева тріщина, статичне, динамічне і температурне навантаження, коефіцієнт інтенсивності напружень, метод сингулярних інтегральних рівнянь.*

Строгі вимоги до міцності та надійності машин і споруд зумовлюють зацікавленість науково-технічних кіл механікою руйнування матеріалів і проблемою забезпечення цілісності конструкцій. Практика експлуатації усіх типів споруд і конструкцій показала, що побудова адекватних математичних моделей для розв'язування відповідних задач механіки неможлива без урахування неоднорідності будови та дефектності структури реальних конструкційних матеріалів і елементів. В останні десятиріччя ця міждисциплінарна галузь знань невинно розвивається, поповнюючись новими даними з математики, матеріалознавства, фізики та механіки руйнування матеріалів. Практичне втілення результатів лінійної та нелінійної механіки руйнування ускладнено через побудову адекватних теоретичних моделей і методів розв'язування задач про вплив статичного і динамічного навантажень, анізотропії та механічної неоднорідності матеріалу, температури та зумовлених нею напружень на міцність і надійність тіл з різнотипними концентраторами напружень, зокрема дефектами типу тріщин. Загалом тут передбачають розгляд три- і двовимірних задач для об'ємних структур, а також оболонкових елементів конструкцій. Нижче наведено огляд результатів про розв'язування нових класів таких задач про статичне навантаження кусково-однорідної циліндричної оболонки, термічне навантаження пружного півпростору та динамічне навантаження пружного біматеріального простору з підповерхневими тріщинами.

Кусково-однорідна циліндрична оболонка з ненаскрізною тріщиною за статичних навантажень. Розробці теорії і методів розв'язування задач про напружено-деформований стан оболонок з наскрізними тріщинами присвячено чимало праць вітчизняних і зарубіжних авторів. Досить повний їх перелік наведено в монографіях [1–4] та в оглядових статтях [5, 6]. Слід відзначити, що тут, як правило, розглядають задачі про пружну рівновагу ізотропних оболонок, послаблених наскрізними тріщинами. Винятком є трансверсально-ізотропні [7], спеціально-ортотропні [8] та ортотропні оболонки [9, 10] з тріщинами. Однак, як відомо з практики експлуатації деталей конструкцій і машин зі сталей сучасних марок, на поширення тріщин суттєво впливають пластичні деформації, що розвива-

ються біля їх вершин і передують руйнуванню [11]. Характерний лінійний розмір області біля тріщини, де розвиваються пластичні деформації, може бути сумірний з розмірами тріщини або характерними розмірами тіла. Тоді концепція Гріффітса–Ірвіна уже неправомірна [12, 13] і для оцінки опору матеріалу поширенню у ньому тріщин необхідно використовувати нелінійну механіку руйнування. Розв’язати пружно-пластичну задачу для оболонки з тріщиною складно. Тому М. Я. Леонов, В. В. Панасюк [14, 15] та Д. С. Дагдейл [16] для дослідження пружно-пластичних пластин запропонували δ_c -модель, а Ф. Ердоган [8] та Е. С. Фоліас [17] – її аналог для вивчення тонких пружно-пластичних пологих оболонок. Суть аналога δ_c -моделі полягає у тому, що зони пластичних деформацій, як і в пластинах, моделюють поверхнями розриву узагальнених переміщень, а реакцію пластичних зон на пружний об’єм, на відміну від пластин, – невідомими сталими зусиллями та моментами, які задовольняють відповідні умови пластичності тонких оболонок. Так розв’язано низку нових задач для пологих і непологих, ізотропних та анізотропних, однорідних і неоднорідних оболонок з наскрізними та поверхневими тріщинами. Досить повний аналіз цих розв’язків є в монографіях [18, 19]. Слід підкреслити, що досліджували оболонки, матеріали яких ідеально пружно-пластичні, тому що зусилля та моменти в пластичній зоні сталі. У працях [18, 20] для однорідних оболонок прийнято, що зусилля та моменти змінюються вздовж пластичної зони, відповідно, за квадратичним та кубічним законами, а нейтральна лінія – за лінійним. Це дає можливість досліджувати граничну рівновагу пружно-пластичних оболонок, яким притаманне зміцнення. Тут цю модель застосовано до кусково-однорідної циліндричної оболонки з приповерхневою тріщиною.

Розглянемо оболонку, що складається з двох зістикованих напівнескінчених оболонок з різних матеріалів. Одна з них послаблена поздовжньою ненаскрізною тріщиною $\beta = 0$, $|\alpha| \leq \alpha_0 = l_0/R$, $-h + 2d_2 \leq \gamma \leq h - 2d_1$ (див. рисунок). Центр тріщини знаходиться на віддалі l_1 від поверхні стику $\alpha = \alpha_1 = l_1/R$.

Оболонка перебуває під дією симетричних відносно тріщини зусиль і моментів. Згідно з аналогом δ_c -моделі замінимо смуги пластичних деформацій, що розвиваються біля тріщини, поверхнями розриву узагальнених пружних переміщень, а дію матеріалу пластичної зони на пружну – деякими зусиллями та моментами. Вважаємо, що в області $\beta = 0$, $\alpha \in [-\alpha_0; \alpha_0]$, $\gamma \in [-h; -h + 2d_2] \cup [h - 2d_1; h]$ діють сталі напруження $\sigma^0 = (\sigma_B + \sigma_T)/2$, де σ_B, σ_T – границі міцності та текучості матеріалу оболонки, в якій розміщена тріщина. У пластичних зонах біля тріщини l_p та l^p (див. рисунок) діють невідомі зусилля та згинні моменти N^1, N^2, M^1, M^2 , які змінюються вздовж пластичних зон за квадратичним та кубічним законами, і кожна пара з яких задовольняє умову пластичності Треска у вигляді пластичного шарніра

$$|N^s / (2h\sigma_0)|^2 + |M^s / (h^2\sigma_0)| = 1, \quad s = 1, 2. \quad (1)$$

Отже, в межах вибраної моделі тривимірною пружно-пластичною задачею для оболонки з внутрішньою тріщиною завдовжки $2l_0$ зведена до двовимірної пружної рівноваги оболонки з наскрізною тріщиною розміром $2l_d = 2l_0 + l_p + l^p$, на берегах якої виконуються умови

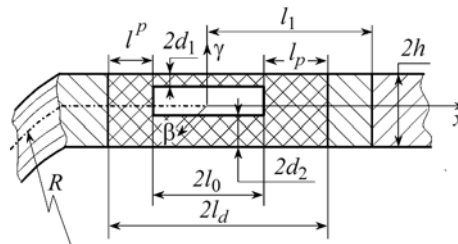


Схема підповерхневої тріщини.

Scheme of a sub-surface crack.

$$N_2(\alpha) = \begin{cases} N^2 - N_2^0, & -(\alpha_0 + \alpha^p) \leq \alpha \leq -\alpha_0, \\ N^\ell - N_2^0 + N^3, & |\alpha| < \alpha_0, \\ N^1 - N_2^0, & \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_0 + \alpha_p < \alpha_1; \end{cases}$$

$$M_2(\alpha) = \begin{cases} M^2 - M_2^0, & -(\alpha_0 + \alpha^p) \leq \alpha \leq -\alpha_0, \\ M^\ell - M_2^0 + M^3, & |\alpha| < \alpha_0, \\ M^1 - M_2^0, & \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_0 + \alpha_p < \alpha_1, \end{cases}$$

де $\alpha^p = l^p/R$; $\alpha_p = l_p/R$; $N^l = 2(d_1 + d_2)\sigma_0$; $M^l = 2\sigma_0(h - d_1 - d_2)(d_2 - d_1)$, N^3 і M^3 – зусилля і моменти, прикладені до берегів реальної тріщини; N^0 і M^0 – компоненти основного напруженого стану.

На основі запропонованої раніше методики [6] розглядувану задачу зведемо до системи шести сингулярних інтегральних рівнянь (СІР):

$$\begin{aligned} & \int_{-\alpha_d}^{\alpha_d} \{\Psi'_1(\xi)\mathbf{K}_{i1}(\xi, \alpha) + \Psi'_3(\xi)\mathbf{K}_{i3}(\xi, \alpha)\} d\xi + \\ & + \int_0^{2\pi} \sum_{j=5}^8 \Psi_j(\theta)\mathbf{K}_{ij}(\theta, \alpha) d\theta = 2\pi(E_1 h)^{-1} f_i(\alpha), \quad i = 1, 3, \\ & \int_{-\alpha_d}^{\alpha_d} \{\Psi'_1(\xi)\mathbf{K}_{i1}(\beta, \xi) + \Psi'_3(\xi)\mathbf{K}_{i3}(\beta, \xi)\} d\xi + \\ & + \int_0^{2\pi} \sum_{j=5}^8 \Psi_j(\theta)\mathbf{K}_{ij}(\theta, \beta) d\theta = \delta_{i8} A_1, \quad i = 5, 6, 7, 8, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{де } \mathbf{K}_{ij}(\xi, \alpha) = \frac{1}{2} a_{ij} \operatorname{cth}\left(\frac{\xi - \alpha}{2}\right) + \mathbf{K}_{ij}^0(\xi - \alpha) + \mathbf{K}_{ij}^*(\xi, \alpha), \quad i, j = 1, 3,$$

$$a_{11} = 1, \quad a_{13} = a_{31} = \tilde{c}_1^2(1 - \nu_1^2), \quad a_{33} = (3 + \nu_1)/(1 + \nu_1),$$

$$f_1(\alpha) = N_2(\alpha, 0), \quad f_3(\alpha) = M_2(\alpha, 0), \quad \alpha_d = l_d/R.$$

Тут E_1 та ν_1 – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона оболонки, яка містить тріщину; A_1 – стала інтегрування; $\mathbf{K}_{ij}^0(z)$ та $\mathbf{K}_{ij}^*(z)$ – неперервні функції; Ψ_j ($j = 1, 2, \dots, 8$) – шукані функції, які виражають через стрибки переміщень за переходу через лінію тріщини та лінію поділу матеріалів.

Перші два рівняння системи (2) сингулярні. У них, крім шуканих функцій Ψ_j , невідомі також межі інтегрування (l_p та l^p) і величини N^1, N^2, M^1, M^2 . Тому доповнюємо її умовами (1) та умовами обмеженості зусиль і моментів біля вершин наскрізної тріщини. Для цього достатньо, щоб дорівнювали нулю коефіцієнти інтенсивності нормального зусилля та згинного моменту:

$$K_N^s = 0, \quad K_M^s = 0, \quad s = 1, 2. \quad (3)$$

Запропоновано алгоритм числового розв'язування системи СІР (2) разом з умовою пластичності (1) та умовами обмеженості напружень (3). Аналіз розрахунків показав, що приповерхнева тріщина в різних матеріалах оболонки неоднаково впливає на її міцність. Її розкриття в довільній точці фронту мало залежить

від вигляду функції (лінійна, квадратична чи кубічна) зміцнення, якщо $d_1 = d_2$. Ця залежність росте зі збільшенням різниці між d_1 та d_2 .

З допомогою δ_c -моделі досліджено ослаблені приповерхневими тріщинами неоднорідні по товщині оболонки, зокрема, виготовлені з функціонально градієнтних матеріалів [21, 22]. Показано [23, 24], що відношення модулів пружності вихідних матеріалів значно більше впливає на розкриття тріщини, ніж закон розподілу модуля пружності та коефіцієнта Пуассона по товщині оболонки.

Термопружний стан півпростору з підповерхневими тріщинами. Стационарний термопружний стан півбезмежних і кусково-однорідних тіл з теплоізолюваними тріщинами для плоскої деформації вивчали багато дослідників. При цьому з використанням інтегральних подань комплексних потенціалів температури та напружень задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності зводили до СІР з ядром Коші та регулярним ядром, яке враховує взаємодію тріщини з межею півплощини або з включенням. СІР записували для замкнених (межі включень) та розімкнених (тріщини) контурів і розв'язували методом механічних квадратур [25]. Визначенню коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) у півплощині, зумовлених збуренням однорідного теплового потоку теплоізолюваною прямолінійною тріщиною, присвячені праці [26, 27], а дослідженню плоского термопружного стану в околі внутрішніх і крайових тріщин у півпросторі під дією фрикційного нагрівання його межі – публікації [25, 28–30].

Значно менше інформації про просторові задачі термопружності для півбезмежних тіл з підповерхневими тріщинами. Це можна пояснити відсутністю єдиного достатньо загального методу розв'язування мішаних тривимірних задач теплопровідності та термопружності, зокрема такого, як метод комплексних потенціалів Колосова–Мусхелішвілі для плоскої задачі теорії пружності. Досліджуючи осесиметричний напружений стан тіла з теплоактивною круговою тріщиною (на якій задані температура або тепловий потік), використовували метод інтегрального перетворення Ганкеля і дуальних інтегральних рівнянь. Для півбезмежного тіла з паралельною до його межі круговою тріщиною, на якій задані стала температура або спрямований у бік межі однорідний тепловий потік, задача розв'язана у працях [31, 32].

У монографії [33] під час розв'язування тривимірних задач стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіл з тріщинами розробили метод двовимірних СІР, використовуючи теорію ньютонівських потенціалів простого та подвійного шарів. При цьому густини потенціалів мають простий фізичний сенс: для задач теплопровідності – це потужність джерел і диполів тепла на місці розташування тріщин, а для задач термопружності – це стрибки переміщень протилежних поверхонь тріщин.

Цим методом у три етапи розв'язали низку задач для півбезмежного тіла з перпендикулярною або паралельною до його межі тріщинами: визначали температурне поле; встановлювали зумовлений цим полем напружений стан в суцільному тілі; обчислювали КІН в околі тріщин.

Метод розв'язування стаціонарної задачі теплопровідності для півбезмежного тіла з паралельною або перпендикулярною до його межі дисковою теплоактивною областю S (в якій задано температуру або тепловий потік) наведено у праці [34]. На межі тіла підтримуємо нульову температуру або теплоізоляцію. Виберемо декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ з початком у центрі круга S , спрямувавши вісь Ox_3 перпендикулярно до нього. Стаціонарне температурне поле подамо через гармонічний потенціал простого шару з густиною $w_k(x_1, x_2)$, який описує потужність теплових джерел в області S :

$$T_k(x^*) = \frac{1}{4\pi\lambda} \iint_S w_k(\xi) \left[\frac{1}{R(x^*, \xi)} + \frac{(-1)^k}{R_l(x^*, \xi)} \right] d_\xi S, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2),$$

$$\begin{aligned}
R(x^*, \xi) &= \sqrt{\omega_1^2(x, \xi) + x_3^2}, \quad R_1(x^*, \xi) = \sqrt{\omega_1^2(x, \xi) + (x_3 - 2h)^2}, \\
R_2(x^*, \xi) &= \sqrt{\omega_2^2(x, \xi) + x_3^2}, \quad \omega_1^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2, \\
\omega_2^2 &= (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 + \xi_2 - 2h)^2, \quad x^* = (x_1, x_2, x_3),
\end{aligned} \tag{4}$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності; h – віддаль центра області S від межі тіла; $k = 1$ відповідає нульовій температурі межі, а $k = 2$ – її теплоізоляції. Для паралельної області $i = 1$, а для перпендикулярної $i = 2$. При $x_3 = 0$ із подання (4) одержали інтегральне рівняння для визначення потужності джерел тепла, коли в області S задана температура.

Напружений стан у суцільному півпросторі, зумовлений температурним полем (4), визначали через потужність теплових джерел $w_k(x_1, x_2)$ у працях [35, 36].

За наявності у півпросторі тріщини для обчислення КІН розв'язуємо СІР [37–39]

$$\iint_S \frac{\alpha_3(\xi)}{R^3(x, \xi)} d_\xi S - \iint_S \alpha_3(\xi) \Omega(x, \xi) d_\xi S = \frac{1-\nu}{G} \sigma_{33}(x), \quad x \in S, \tag{5}$$

де $4\lambda\alpha_3(x) = u_3^-(x) - u_3^+(x)$ – стрибок нормальних переміщень поверхонь тріщини; ν – коефіцієнт Пуассона; G – модуль зсуву; $\sigma_{33}(x)$ – нормальні до області S напруження у суцільному півпросторі на місці розташування тріщини, зумовлені температурним полем (4). Регулярне ядро $\Omega(x, \xi)$ враховує взаємодію тріщини з межею півпростору.

Для безмежного тіла з тріщиною, на якій задані тиск $p(x)$ і температура $T(x)$, задачу про визначення КІН з урахуванням СІР (5) при $\Omega(x, \xi) = 0$ зведено до розв'язування інтегрального рівняння

$$\iint_S \frac{\alpha_3(\xi)}{R^3(x, \xi)} d_\xi S = \frac{1-\nu}{G} p(x) - (1+\nu)\alpha_t T(x), \tag{6}$$

де α_t – коефіцієнт лінійного теплового розширення. Для кругової тріщини за сталих $p(x) = p_0$ і $T(x) = T_0$ рівняння (6) має точний розв'язок і КІН визначає формула

$$K_1(a) = 2(p_0 - DT_0)\sqrt{a/\pi}.$$

З виразу (6) випливає, що дія заданої на тріщині у безмежному тілі температури рівносильна певному силовому навантаженню. Але для вільного півпростору за силового і теплового навантажень напружений стан в околі перпендикулярної до його межі тріщини якісно відрізняється. У першому випадку КІН є більші, ніж у безмежному тілі, і досягають максимуму від межі півпростору. У другому випадку вони максимальні в протилежній від межі точці тріщини і менші, ніж для безмежного тіла.

У разі паралельної до межі півпростору теплоактивної тріщини на ній виникають нормальні і дотичні напруження. Тоді необхідно розв'язувати систему трьох взаємозв'язаних СІР, щоб знайти стрибки переміщень поверхонь тріщини $\alpha_i(\xi)$ ($i = 1, 2, 3$), через які визначають КІН [40, 41].

Тривимірне кусково-однорідне тіло з підповерхневими тріщинами за динамічних навантажень. Динамічне деформування складених тіл із тріщинами супроводжується розсіянням пружних хвиль на дефектах, їх відбиттям і заломленням на поверхні поділу матеріалів. Сумісно згенеровані хвилі проявляються в околі тріщин напруженнями, відмінними, ніж в однорідному тілі за аналогічних

динамічних збурень, що необхідно враховувати, оцінюючи міцнісні властивості композитних структур. Важливу роль тут відіграють часові профілі навантаження, умови контакту та дисперсність пружних модулів фаз, форма дефектів та глибина їх залягання відносно поверхні поділу матеріалів.

На прикладах тріщин в однорідному тілі [42–49] та міжфазних тріщин [50–52] показано, що дослідження їх поведінки за динамічного навантаження ефективно методом граничних інтегральних рівнянь (ГІР) у різних модифікаціях. З метою охоплення якнайширшого спектра частот коливань запропоновано аналітичні (асимптотичні) [48, 51] та числові (гранично-елементні) [42, 44, 49, 52] алгоритми розв'язання отриманих рівнянь та визначення коефіцієнтів інтенсивності динамічних напружень (КІДН) у таких тілах з узагальненням [42, 47] на нелінійні моделі динамічного контакту поверхонь тріщини від гармонічних навантажень. Щодо нестационарних задач, то ці підходи поєднували з покроковим творенням часових залежностей на основі рівномірних [44, 45] і нерівномірних [46] різнице-вих апроксимацій інерційних складників рівнянь або відновленням часових залежностей із розв'язків спектральних задач у просторі трансформант Фур'є чи Лапласа за часом [43, 50].

Перенесення методу ГІР на задачі теорії пружності для кусково-однорідних тіл з підповерхневими тріщинами пов'язане з необхідністю задоволення різно-типних крайових умов на декількох, у загальному випадку нахилених, поверхнях: контактних умов на поверхні поділу матеріалів і умов існування стрибків переміщень на поверхні розташування дефекту (розкриття тріщини). Уникнути цього можна, використовуючи у гранично-інтегральних формулюваннях функції Гріна для пружних шаруватих тіл, за допомогою яких умови з'єднання матеріалів задовольняють тотожно. Так приходимо до ГІР, що відрізняються від таких для однорідного тіла з тріщиною лише регулярними ядрами впливу поверхні поділу матеріалів на дефект. Вказаним підходом досліджено коефіцієнти інтенсивності статичних напружень у тривимірних пружних шаруватих тілах з підповерхневими тріщинами [53–56]. Аналіз поширено на двовимірні динамічні задачі для ізотропних і анізотропних кусково-однорідних тіл з тріщинами в умовах антиплоскої і плоскої деформації [57, 58]. Для тривимірних динамічних задач результати вдалось отримати завдяки запису ядер ГІР у придатній до числового розрахунку формі як для ідеального [59–62], так і неідеального [63, 64] динамічного контакту складників біматеріального тіла з підповерхневою тріщиною (тріщинами).

Класично тривимірне кусково-однорідне тіло моделюють двома з'єднаними пружними півпросторами A і B , нехай також у півпросторі A по області S розташована внутрішня плоска тріщина. Позначимо через c_1^D і c_2^D швидкості поширення в матеріалі D ($D = A, B$) поздовжніх і поперечних хвиль; N і ω – амплітуду і циклічну частоту прикладених до поверхонь дефекту гармонічних навантажень (трансформанту і параметр перетворення Фур'є за часом нестационарних навантажень); $\omega_{jD} = \omega/c_j^D$ ($j = 1, 2$) – хвильові числа. Надалі аналізуватимемо амплітуди (Фур'є-трансформанти) показників усталеного (нестационарного) процесу.

Для загальності розглянемо різні способи з'єднання півпросторів: за їх до-сконалого контакту (варіант 1) для компонент переміщень u_j^D ($D = A, B$) і напру-жень σ_{jk}^D ($D = A, B$) на поверхні $x_3 = 0$ поділу матеріалів матимемо $u_j^A = u_j^B$, $\sigma_{j3}^A = \sigma_{j3}^B$ ($j = 1, 2, 3$); за гладкого (ковзного) (варіант 2) – $u_3^A = u_3^B$, $\sigma_{33}^A = \sigma_{33}^B$, $\sigma_{j3}^A = \sigma_{j3}^B = 0$ ($j = 1, 2$); за контакту через тонкий прошарок (варіант 3) – $\sigma_{j3}^A =$

$= \sigma_{j3}^B = G_j(u_j^A - u_j^B) / h$ ($j = 1, 2, 3$), де G_j – відомі коефіцієнти жорсткості прошарку у поперечному і поздовжньому напрямках, h – його товщина ($\omega_{2D}h \ll 1$).

Гранично-інтегральне формулювання задач здійснили шляхом подань розв'язків у кожному з півпросторів комбінаціями потенціалів Гельмгольца, які у півпросторі A просумували також з відомими інтегральними поданнями, що відповідають динамічному розкриттю тріщини в однорідному тілі. Введені потенціали описують внесок у хвильове поле відбитих та заломлених на поверхні поділу матеріалів хвиль. Тоді через тотожне виконання умов ідеального (варіант 1) чи неідеального (варіанти 2 і 3) контактів півпросторів встановили зв'язок густин потенціалів Гельмгольца з функціями динамічного розкриття тріщини. Для визначення цих функцій отримали систему ГР шляхом задоволення так сконструйованими поданнями розв'язків крайових умов дії динамічних зусиль на поверхні дефекту. Зокрема, за симетричної задачі для перпендикулярної до поверхні поділу матеріалів тріщини під нормальним навантаженням система ГР вироджується у рівняння

$$\iint_S \Delta u(\xi) [R(|\mathbf{x} - \xi|) - \bar{R}(\mathbf{x}, \xi)] dS_\xi = N(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S, \quad (7)$$

де Δu – стрибок нормальних переміщень поверхонь тріщини або її розкриття; N – компонента заданих нормальних зусиль на тріщині; ядро R з особливістю потенціалу Гельмгольца таке ж, як і для тріщини в однорідному тілі з пружними сталими матеріалу півпростору A [43, 49]; ядро \bar{R} , що описує взаємодію тріщини з поверхнею поділу матеріалів через відбиті від неї пружні хвилі, має вигляд

$$\bar{R}(\mathbf{x}, \xi) = R(|\bar{\mathbf{x}} - \xi|) + \int_0^\infty \frac{\tau}{F_{St}(\tau)} P(\mathbf{x}, \xi, \tau) d\tau. \quad (8)$$

Тут точка $\bar{\mathbf{x}}$ – симетричне відображення точки \mathbf{x} у півпростір B ; функцію P виражено через функції Бесселя різних порядків, радикали і експоненціальні функції просторових координат із загасанням з глибиною залягання дефекту; F_{St} – класична для ідеально з'єднаних півпросторів і модифікована для неідеально з'єднаних функція Стоунлі. Для кожного із описаних вище варіантів контактування півпросторів із тріщиною явні вирази цих функцій наведено у працях [59–64].

Додаткове ядро \bar{R} у ГР (7) не вимагає спеціальних процедур числових розрахунків через його регулярність та спадну поведінку підінтегрального виразу у співвідношенні (8) за зростання параметра інтегрування τ , що дає можливість обмежитись достатньо великою кінцевою межею інтегрування. Як результат маємо ефективну застосовність розроблених раніше гранично-елементних алгоритмів для визначення динамічного розкриття тріщини, а за ним – КІДН в околі дефекту, коли тріщина межує з поверхнею поділу матеріалів.

Числовий аналіз виконано для кругової й еліптичної тріщин у пружному біматеріалі за гармонічних і нестационарних навантажень та для різних варіантів з'єднання складників тіла [59–61, 63, 64], результати узагальнено також на множинні кругові тріщини, розташовані як по один, так і по обидва боки від поверхні поділу матеріалів (у другому випадку ГР вміщують також ядра, що відповідають за взаємодію тріщини з цією поверхнею через заломлені на ній пружні хвилі) [62].

Отже, за низькочастотного гармонічного навантаження амплітудні значення КІДН відриву для тріщини у менш жорсткому (більш жорсткому) матеріалі кусково-однорідного тіла менші (більші), ніж для тріщини в однорідному тілі, тобто реалізується аналогічне до статичного зміцнення (послаблення) тріщини. Вказаний ефект виразніший для контрастніших модулів пружності біматеріалу та еліптичної тріщини з більшим ексцентриситетом. В області вищих хвильових чисел

виявлено діапазони з протилежними закономірностями як вздовж частини, так і всього контуру дефекту. Те ж саме зафіксовано і для певних профілів та часових діапазонів нестационарних навантажень тріщини у біматеріалі. Тому наповнення матеріалу жорсткими вставками не гарантує блокування розвитку тріщин у ньому за динамічного навантаження. Втрата ідеального з'єднання матеріалів також супроводжується неоднозначним динамічним впливом на тріщину: КІДН можуть як зменшуватись, так і збільшуватись залежно від частотного чи часового діапазонів.

Описані підходи можна поширити для аналізу полів пружних хвиль у тривимірних багатошарових композитах з тріщинами та оцінки цілісності таких структур засобами ультразвукового діагностування [65] і акустичної емісії [66].

РЕЗЮМЕ. Сделан обзор аналитических и численных методов решения задач теории трещин, расположенных вблизи поверхности объемных и тонкостенных тел при тепловых и силовых, статических и динамических нагрузках. Описаны эффекты влияния поверхности тела или поверхности разделения материалов на коэффициенты интенсивности статических и динамических напряжений в окрестности дефектов.

SUMMARY. The review of the analytical and numerical methods for the solution of crack theory problems, when the cracks are situated near a surface of volumetric and thin-walled solids under thermal and force, static and dynamic loading, is given. The effects of the influence of solid surface and interface on the static and dynamic stress intensity factors in the crack vicinity are described.

1. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
2. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
3. Осадчук В. А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. – К.: Наук. думка, 1985. – 224 с.
4. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: в 2-х т. Пер. с англ. / Под ред. Ю. Мураками. – М.: Мир, 1990. – 448 с.
5. Осадчук В. А., Подстригач Я. С. Напряженное состояние и предельное равновесие оболочек с трещинами // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. – 1986. – **18**. – С. 3–52.
6. Кушнір Р. М., Николишин М. М. Напружений стан і гранична рівновага кусково-однорідних циліндричних оболонок з тріщинами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 1. – С. 60–74.
7. Осадчук В. А., Николишин М. М. Напряженное состояние замкнутой трансверсально-изотропной цилиндрической оболочки и бесконечной пластины с трещинами // Там же. – 1976. – Вып. 3. – С. 30–36.
8. Erdogan F. E., Ratwani M., and Yuceoglu U. On the effect of orthotropy in a cracked cylindrical shell // Int. J. Fract. – 1974. – **10**, № 3. – P. 369–374.
9. Шевченко В. П., Довбня Е. Н. Метод граничних інтегральних рівнянь у задачах статички пологих ортотропних оболонок з розрізами й отворами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 1. – С. 47–59.
10. Фильштинский Л. А., Любчак В. А. Упругое поведение полубесконечных анизотропных пластин и оболочек под действием сосредоточенных нагрузок // Динамика и прочность машин. – 1981. – Вып. 33. – С. 11–15.
11. Кирьян В. И. Методика оценки сопротивления конструкционных сталей вязким разрушениям // Автомат. сварка. – 1984. – № 11. – С. 1–6.
12. Вычислительные методы в механике разрушения / Под ред. С. Алтури. – М.: Мир, 1990. – 391 с.
13. Николишин М. М., Швабюк В. И., Фецул Ю. П. Предельное равновесие замкнутой трансверсальной изотропной сферической оболочки с двумя поверхностными трещинами // Прикл. механика. – 2009. – **45**, № 4. – С. 109–115.

14. *Леонов М. Я., Панасюк В. В.* Розвиток найдрібніших тріщин в твердому тілі // Там же. – 1959. – **5**, № 4. – С. 391–401.
15. *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1968. – 246 с.
16. *Dugdale D. S.* Yielding of steel sheets containing slits // *J. Mech. and Phys. Solids.* – 1960. – **8**, № 2. – P. 100–104.
17. *Folias E. S.* On the theory of fracture of curved sheets // *Eng. Fract. Mech.* – 1970. – **2**, № 2. – P. 151–164.
18. *Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А.* Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: Сполом, 2003. – 320 с.
19. *Кир'ян В. І., Осадчук В. А., Николишин М. М.* Механіка руйнування зварних з'єднань металоконструкцій. – Львів: Сполом, 2007. – 318 с.
20. *Осадчук В. А., Николишин Т. М.* Математична модель внутрішньої тріщини в пружно-пластичній циліндричній оболонці // *Мат. методи і фіз.-мех. поля.* – 1998. – **41**, № 2. – С. 111–116.
(*Osadchuk V. A. and Nykolyshyn T. M.* Mathematical model of an internal crack in an elastoplastic cylindrical shell // *J. Math. Sci.* – 2000. – **99**, № 5. – P. 1648–1654.)
21. *Kim K. C. and Noda N. A.* Green's function approach to the deflection of a FGM plate under transient thermal loading // *Arch. Appl. Mech.* – 2002. – **72**. – P. 127–137.
22. *Shao Z. S., Fan L. F., and Wang T. J.* Analytical solutions of stresses in functionally graded circular hollow cylinder with finite length // *Key Eng. Mater.* – 2004. – **76**. – P. 261–263.
23. *Кушнір Р. М., Николишин Т. М., Ростун М. Й.* Гранична рівновага виготовленої з функціонально градієнтного матеріалу циліндричної оболонки з поверхневою тріщиною // *Машинознавство.* – 2006. – № 5. – С. 3–7.
24. *Кушнір Р. М., Николишин Т. М., Ростун М. Й.* Гранична рівновага неоднорідної за товщиною сферичної оболонки з поверхневою тріщиною // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2007. – **43**, № 3. – С. 5–11.
(*Kushnir R. M., Nykolyshyn T. M., and Postun M. I.* Limiting Equilibrium of a Spherical Shell Nonuniform Across the Thickness and Containing a Surface Crack // *Materials Science.* – 2007. – **43**, № 3. – P. 291–299.)
25. *Саврук М. П., Зеленьяк В. М.* Двовимірні задачі термопружності для кусково-однорідних тіл з тріщинами. – Львів: Растр-7, 2009. – 212 с.
26. *Sekine H.* Thermal stresses near tips of an insulated line crack in a semi-infinite medium under uniform heat flow // *Eng. Fract. Mech.* – 1977. – **9**. – P. 499–507.
27. *Tweed J. and Love S.* The thermoelastic problem for a half-plane with an internal line crack // *Int. J. Eng. Sci.* – 1979. – **17**. – P. 357–363.
28. *Sekine H.* Crack problem for a semi-infinite solid with heated bounding surface // *Trans. ASME: J. Appl. Mech.* – 1977. – **44**, № 4. – P. 637–643.
29. *Matysjak S., Yevtushenko A., and Zelenjak V.* Frictional heating of a half-space with cracks. 1. Single or periodic system of subsurface cracks // *Tribology Int.* – 1999. – **32**, № 5. – P. 237–243.
30. *Матисяк С. Й., Євтушенко О. О., Зеленьяк В. М.* Нагрівання півпростору з включенням і тріщиною // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2004. – **40**, № 4. – С. 34–40.
(*Matysiak S. I., Evtushenko O. O., and Zeleniak V. M.* Heating of a Half Space Containing an Inclusion and a Crack // *Materials Science.* – 2004. – **40**, № 4. – P. 466–474.)
31. *Srivastava K. N. and Palaiya R. M.* The distribution of thermal stress in a semi-infinite elastic solid containing a penny-shaped crack // *Int. J. Eng. Sci.* – 1969. – **7**, № 7. – P. 647–666.
32. *Srivastava K. N. and Singh K.* The effect of penny-shaped crack on the distribution of stress in a semi-infinite solid // *Ibid.* – 1969. – **7**, № 5. – P. 469–490.
33. *Кім Г. С., Хай М. В.* Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1989. – 283 с.
34. *Кім Г. С., Сушко О. П.* Стационарное температурное поле у півбезмежному тілі з теплоактивним або теплоізолююваним дисковим включенням // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* – 2011. – Вип. 13. – С. 67–80.

35. Kim G. S., Suiko O. P. Напружений стан півбезмежного тіла при тепловиділенні в перпендикулярній до його межі дисковій області // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2007. – Вип. 5. – С. 122–126.
36. Kim G. S., Suiko O. P. Напряженное состояние полубесконечного тела при тепловыделении в параллельной к его границе дисковой области // Теорет. и прикл. механика. – 2007. – Вип. 43. – С. 3–8.
37. Kim G. S., Suiko O. P. Термопружний стан півпростору з перпендикулярною до його краю теплоактивною круговою тріщиною // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2005. – **41**, № 2. – С. 16–22.
(Kit H. S. and Sushko O. P. Thermoelastic State of a Half Space Containing a Thermally Active Circular Crack Perpendicular to Its Edge // Materials Science. – 2005. – **41**, № 2. – P. 150–157.)
38. Kim G. S., Suiko O. P. Термопружний стан півпростору з перпендикулярною до його межі теплоактивною еліптичною тріщиною // Там же. – 2006. – **42**, № 2. – С. 45–52.
(Kit H. S. and Sushko O. P. Thermoelastic state of a half space containing a thermally active elliptic crack perpendicular to its boundary // Materials Science. – 2006. – **42**, № 2. – P. 189–199.)
39. Kim G. S., Suiko O. P. Взаимодействие теплоактивной эллиптической трещины с границей полупространства // Теорет. и прикл. механика. – 2006. – Вип. 42. – С. 45–51.
40. Kit H. and Sushko O. The distribution of thermal stresses in a semi-infinite solid containing a thermally active crack // Materialy III Sympozjum Mechaniki Zniszczenia Materialow i Konstrukcji. – Bialystok, 2005. – P. 141–144.
41. Kim G. S., Suiko O. P. Термоупругое состояние полупространства с параллельной к его границе теплоактивной трещиной // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 4. – С. 46–54.
(Kit H. S. and Sushko O. P. Thermoelastic state of a half-space having a thermally active crack parallel to its boundary // Int. Appl. Mech. – 2007. – **3**, № 4. – P. 395–402.)
42. Гузь А. Н., Зозуля В. В. Хрупкое разрушение материалов при динамических нагрузках. – К.: Наук. думка, 1993. – 237 с.
43. Kim G. S., Михаськів В. В., Хай М. В. Метод потенціалів у тривимірних статичних і динамічних задачах теорії тріщин // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1996. – **32**, №1. – С. 22–32.
(Kit H. S., Mykhas'kiv V. V., and Khaj M. V. Method of potentials in three-dimensional static and dynamical problems of the theory of cracks // Materials Science. – 1996. – **32**, № 1. – P. 14–24.)
44. Zhang Ch. and Gross D. On Wave Propagation in Elastic Solids with Cracks. – Southampton: Computational Mechanics Publication, 1998. – 248 p.
45. Application of mapping theory to boundary integral formulation of 3D dynamic crack problems / J. Sladek, V. Sladek, V. V. Mykhas'kiv, and V. Z. Stankevych // Eng. Analysis with Boundary Elements. – 2003. – **27**, № 3. – P. 203–213.
46. Саврук М. П. Новий метод розв'язування динамічних задач теорії пружності та механіки руйнування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – **39**, № 4. – С. 7–11.
(Savruk M. P. New Method for the Solution of Dynamic Problems of the Theory of Elasticity and Fracture Mechanics // Materials Science. – 2003. – **39**, № 4. – P. 465–471.)
47. Гузь А. Н., Зозуля В. В., Меньшиков А. В. Пространственная контактная динамическая задача для эллиптической трещины при нормальном падении гармонической волны растяжения-сжатия // Прикл. механика. – 2003. – **39**, № 12. – С. 74–77.
48. Михаськів В. В., Бутрак І. О. Концентрация напряжений в окрестности сфероидной трещины при произвольном направлении падения на нее гармонической волны // Прикл. механика. – 2006. – **42**, № 1. – С. 70–77.
(Mikhas'kiv V. V. and Butrak I. O. Stress concentration around a spheroidal crack caused by a harmonic wave incident at an arbitrary angle // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, № 1. – P. 61–66.)
49. A frequency domain BEM for 3-D non-synchronous crack interaction analysis in elastic solids / V. V. Mykhas'kiv, Ch. Zhang, J. Sladek, and V. Sladek // Eng. Analysis with Boundary Elements. – 2006. – **30**, № 3. – P. 167–175.
50. Вайсфельд Н. Д. Нестационарные задачи дифракции упругих волн на дефектах в сферически слоистых средах // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2005. – № 3. – С. 74–86.

51. *Куріляк Д. Б., Назарчук З. Т., Войтко М. В.* Поле напружень за опромінення плоскою SH-хвилею тріщини на межі поділу матеріалів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – **43**, № 4. – С. 18–30.
(*Kurylyak D. B., Nazarchuk Z. T., and Voitko M. V.* Stress Field in a Crack on the Interface of Materials Irradiated with SH-Waves // Materials Science. – 2003. – **39**, № 4. – P. 464–478.)
52. Коэффициенты интенсивности напряжений для материалов с межслоевыми трещинами при гармоническом нагружении / А. Н. Гузь, И. А. Гузь, А. В. Меньшиков, В. А. Меньшиков // Прикл. механика. – 2010. – **46**, № 10. – С. 3–13.
53. *Kuo C. H. and Keer L. M.* Three-dimensional analysis of cracking in a multilayered composite // Trans. ASME: J. Appl. Mech. – 1995. – **62**, № 2. – P. 273–281.
54. *Хай М. В., Степанюк О. І.* Взаємодія паралельних тріщин через межу розділу матеріалів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1999. – **35**, № 2. – С. 12–20.
(*Khay M. V. and Stepanyuk O. I.* Interaction of Parallel Cracks across the Interface of Materials // Materials Science. – 1999. – **35**, № 2. – P. 157–165.)
55. *Noda N. A., Ohzono R., and Chen M. C.* Analysis of an elliptical crack parallel to a bimaterial interface under tension // Mechanics of Materials. – 2003. – **35**, № 11. – P. 1059–1076.
56. Stress intensity factors for penny-shaped cracks perpendicular to graded interfacial zone of bonded bi-materials / Н. Т. Xiao, Z. Q. Yue, L. G. Tham, and Y. R. Chen // Eng. Fract. Mech. – 2005. – **72**, № 1. – P. 121–143.
57. *Shul C. W. and Lee K. Y.* Dynamic response of subsurface interface crack in multi-layered orthotropic half-space under anti-plane shear impact loading // Int. J. of Solids and Structure. – 2001. – **38**, № 20. – P. 3563–3574.
58. *Lei J., Wang Y. S., and Gross D.* Dynamic interaction between a sub-interface crack and the interface in a bi-material: time-domain BEM analysis // Archive of Appl. Mech. – 2003. – **73**, № 3–4. – P. 225–240.
59. *Mykhas'kiv V. V. and Stepanyuk O. I.* Boundary integral analysis of the symmetric dynamic problem for an infinite bimaterial solid with an embedded crack // Meccanica. – 2001. – **36**, № 4. – P. 479–495.
60. О концентрации напряжений возле эллиптической трещины на границе раздела упругих тел при установившихся колебаниях / В. В. Михаськів, Я. Сладек, В. Сладек, А. И. Степанюк // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 6. – С. 81–89.
(Stress concentration near an elliptic crack in the interface between elastic bodies under steady-state oscillations / V. V. Mikhas'kiv, J. Sladek, V. Sladek, and O. I. Stepanyuk // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, № 6. – P. 664–671.)
61. *Михаськів В. В., Жбядинський І. Я.* Розв'язування нестационарних задач для складеного тіла з тріщиною методом інтегральних рівнянь // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – **43**, № 1. – С. 33–42.
(*Mykhas'kiv V. V. and Zhabdynskiy I. Ya.* Solution of nonstationary problems for composite bodies with cracks by the method of integral equations // Materials Science. – 2007. – **43**, № 1. – P. 27–37.)
62. *Mykhas'kiv V., Zhabdynskiy I., and Zhang Ch.* Elastodynamic analysis of multiple crack problem in 3-D bi-materials by a BEM // Int. J. for Numerical Methods in Biomedical Eng. – 2010. – **26**, № 12. – P. 1934–1946.
63. 3-D dynamic interaction between a penny-shaped crack and a thin interlayer joining two elastic half-spaces / V. Mykhas'kiv, V. Stankevych, I. Zhabdynskiy, and Ch. Zhang // Int. J. of Fract. – 2009. – **159**, № 2. – P. 137–149.
64. Динамічні напруження у складеному тілі з круговою тріщиною за ковзного контакту його компонент / В. В. Михаськів, В. З. Станкевич, Є. В. Глушков, Н. В. Глушкова // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 1. – С. 80–87.
65. Механіка руйнування і міцність матеріалів: Довідн. пос. / Під заг. ред. В. В. Панасюка. Т. 5: Неруйнівний контроль і технічна діагностика / З. Т. Назарчук, В. В. Кошовий, В. Р. Скальський та ін. Під ред. З. Т. Назарчука. – Львів: Фіз.-мех. ін-т, 2001. – 1134 с.
66. *Андрейків О. Є., Скальський В. Р., Сулим Г. Т.* Теоретичні основи методу акустичної емісії в механіці руйнування. – Львів: Сполом, 2007. – 480 с.

Одержано 06.04.2011