УДК 519.7

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОГРАНИЧЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Н.Н. ДИДУК

Показано, что понятие простого подпространства пространства неопределенности, построенное формальными методами теории математических структур Н. Бурбаки, не является решением *задачи ограничения*, поскольку не удовлетворяет требованию преемственности в развитии математического аппарата неопределенности. Для получения конструкции подпространств, удовлетворяющих этому требованию, к простым подпространствам применяется аппарат *равномерных версий*. Рассмотрены примеры равномерных подпространств.

В работе [1] была сформулирована так называемая *задача ограничения* пространств неопределенности (ПН), смысл которой состоит в нахождении метода, позволяющего *исключать из рассмотрения* некоторые точки произвольного ПН. Важность решения этой задачи следует из того, что пространства неопределенности, представляющие собой *формальные* конструкции, используются для описания *ситуаций неопределенности*, с которыми мы *реально* сталкиваемся в процессе практической деятельности или при необходимости принимать какие-либо решения. А во время наших действий ситуация неопределенности, в которой мы находимся, может меняться. Самым простым примером подобного изменения ситуации является получение сведений о том, что некоторые из *состояний природы* (относительно которых существует неопределенность) не могут реально осуществиться, и, следовательно, их можно исключить из рассмотрения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Цель настоящей статьи состоит в нахождении решения *задачи ограничения*. Пусть задано ПН (X,S) (где S — *критерий свертывания* (КС) по множеству X, т.е. $\mathsf{S}\in\mathsf{T}(X)$) и пусть A — непустое подмножество множества X. В работе [1] было показано, что задача ограничения пространства (X,S) на множество A состоит в построении некоторого нового ПН вида (A,S^A), где КС S^A (по множеству A) должен быть получен в результате *преобразования* критерия S. Таким образом, *общее* решение задачи ограничения для пространств неопределенности вида (X,S) сводится к нахождению *семейства преобразований*, каждое из которых имеет вид

$$F_A \underset{df}{=} \mathsf{S} \mapsto \mathsf{S}^A, \tag{1}$$

где $\mathsf{S} \in \mathsf{T}(X)$, $\varnothing \neq A \subset X$, $\mathsf{S}^A \in \mathsf{T}(A)$ (причем, преобразование F_A не обязательно должно быть применимо ко всем S из $\mathsf{T}(X)$).

В работе [1] было также сформулировано *требование преемственности* в развитии аппарата неопределенности, которое в данном случае может быть использовано для уточнения задачи ограничения. Смысл требования преемственности состоит в том, что разрабатываемый новый аппарат неопределенности не должен вступать в противоречие с уже имеющимся аппаратом (для вероятностных ситуаций неопределенности). А поскольку *погружение* вероятностного типа неопределенности привело к *шенноновским пространствам* [2, с.130], проверка согласованности нового аппарата со старым фактически сводится к ответу на вопрос, получаются ли одни и те же результаты после применения нового и старого аппарата к шенноновским пространствам.

Итак, пусть (для непустого подмножества $A \subset X$) задано некоторое преобразование F_A вида (1). Для того чтобы выяснить, удовлетворяет ли это преобразование F_A требованию преемственности, достаточно выполнить следующее:

1. В качестве исходного ПН (X,S) взять *шенноновское* пространство [2, с.130] вида (X, Σ_p), где p — распределение вероятностей (РВ) на множестве X, и выяснить необходимые и достаточные условия применимости преобразования F_A к критерию свертывания Σ_p.

2. Найти результат $F_A(\Sigma_p)$ применения к критерию Σ_p преобразования F_A (для тех случаев, когда последнее применимо). Выполнение этого шага равносильно построению нового пространства неопределенности вида $(A, F_A(\Sigma_p))$ (где $F_A(\Sigma_p)$ есть КС по множеству A).

3. Построить ограничение p_A распределения вероятностей p на множество A в соответствии с правилами теории вероятностей. Известно, что эти правила применимы тогда и только тогда, когда имеет место неравенство

$$\overline{p}(A) \underset{df}{=} \sum_{x \in A} p(x) > 0. \tag{2}$$

В этом случае новое РВ p_A характеризуется дефиницией

$$p_A \underset{df}{=} x \mapsto \frac{p(x)}{\overline{p}(A)} \lozenge A. \tag{3}$$

4. Перейти к новому шенноновскому пространству вида (A, Σ_{p_A}). Необходимое и достаточное условие существования пространства (A, Σ_{p_A})

совпадает с условием существования распределения p_A (и сводится к выполнению неравенства $\overline{p}(A) > 0$).

Требование же преемственности к преобразованию F_A состоит из двух *частей*:

1) преобразование F_A должно быть *применимо* к критерию свертывания $\sum_p$ тогда и только тогда, когда имеет место неравенство $\overline{p}(A) > 0$ (в этом случае совпадут необходимые и достаточные *условия существования* пространств неопределенности $(A,\ F_A(\sum_p))$ и $(A,\ \sum_{p_A})$);

2) сами пространства неопределенности $(A,\ F_A(\sum_p))$ и $(A,\ \sum_{p_A})$ (при условии, что оба они существуют) должны *совпасть* (для этого *необходимо*, чтобы пространство $(A,\ F_A(\sum_p))$ оказалось шенноновским).

Если обе эти части требования преемственности выполнены для каждого непустого подмножества $A \subset X$, то семейство преобразований вида F_A может рассматриваться как (удовлетворительное) решение задачи ограничения пространств неопределенности вида (X, S).

2. ПРОСТЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА НЕ ВЫДЕРЖИВАЮТ ИСПЫТАНИЯ

В работе [1] показано, как с помощью формальных методов *теории математических структур* Н. Бурбаки [3, гл. IV] построить *подпространство* $(A,\ \mathrm{S}_A)$ заданного ПН (X, S) на множестве A. Подпространства, построенные таким способом, названы *простыми*. Критерий свертывания S_A простого подпространства $(A,\ \mathrm{S}_A)$ характеризуется следующим условием: для произвольной функции $g \in \overline{\mathbf{R}}_+^A$ выполняется равенство

$$\mathrm{S}_A(g) = \mathrm{S}\,(g \uparrow X) = \underset{x \in X}{\mathrm{S}} \big(g(x) :\ x \in A \big|\, 0\big), \tag{4}$$

т.е. результат $\mathrm{S}_A(g)$ применения функционала S_A к функции g совпадает с результатом применения функционала S к другой функции $g \uparrow X$ (определенной на множестве X), которая совпадает с функцией g на множестве A, а за его пределами принимает значение 0 [1, разд. 9, выражение (44)].

Замечание. Следует обратить внимание на тот случай, когда множество A оказывается *областью безразличия* пространства (X, S) [4, разд. 7], состоящей из тех точек x множества X, в которых значение $f(x)$ *каждой* функции $f \in \overline{\mathbf{R}}_+^X$ *не влияет* на результат $\mathrm{S}(f)$ применения функционала S к функции f. Если мы столкнулись именно с такой ситуацией (т.е. множество A действительно есть область безразличия), то КС S_A простого подпространства $(A,\ \mathrm{S}_A)$ оказывается *постоянным* функционалом вида

$$\mathrm{S}_A = g \mapsto \mathrm{S}\langle 0\rangle \ \Diamond\ \overline{\mathbf{R}}_+^A, \tag{5}$$

где $\mathsf{S}\langle 0\rangle$ — результат применения функционала S к постоянной функции $f_0 = x \mapsto 0 \ \Diamond \ X$ [5, разд. 1]. Как нетрудно понять, в этом случае простое подпространство $\left(A, \mathrm{S}_A\right)$ полностью теряет черты исходного пространства $\left(X, \mathrm{S}\right)$. ■

Легко видеть, что построение простых подпространств может быть формально представлено в виде семейства преобразований типа (1). Действительно, для каждого непустого подмножества $A \subset X$ выражение (4) фактически задает преобразование

$$F_A \underset{df}{=} \mathrm{S} \mapsto \mathrm{S}_A\,, \tag{6}$$

которое переводит любой КС S по множеству X в КС $F_A(\mathrm{S}) = \mathrm{S}_A$ простого подпространства $\left(A, \mathrm{S}_A\right)$. Тем не менее мы покажем, что простые подпространства *не являются* решением задачи ограничения пространств неопределенности, так как семейство преобразований F_A $(\varnothing \neq A \subset X)$, характеризуемых дефиницией (6), не удовлетворяет требованию преемственности (причем не удовлетворяет ни первой, ни второй части этого требования).

Рассмотрим сначала условие применимости преобразования F_A к шенноновскому ПН вида $\left(X, \Sigma_p\right)$ и выясним, совпадает ли оно с условием $\overline{p}(A) > 0$. Как следует из выражения (4), построение простого подпространства $\left(A, \mathrm{S}_A\right)$ пространства $\left(X, \mathrm{S}\right)$ на непустом подмножестве $A \subset X$ возможно *всегда*. Это значит, что какими бы ни были РВ p на множестве X и непустое подмножество A, преобразование F_A *можно* применить к шенноновскому пространству $\left(X, \Sigma_p\right)$ (в результате чего будет получено его простое подпространство $\left(A, (\Sigma_p)_A\right)$). И для этого *не требуется*, чтобы выполнялось неравенство $\overline{p}(A) > 0$. Отсюда следует, что рассматриваемое преобразование F_A не удовлетворяет первой части требования преемственности.

Покажем, что оно не удовлетворяет и второй части этого требования. Конструкция критерия $(\Sigma_p)_A$ (для любого $A \subset X$) уже была найдена в работе [1]. Так, для каждой функции $g \in \overline{\mathbf{R}}_+^A$ имеем

$$F_A(\Sigma_p)(g) = (\Sigma_p)_A(g) = \sum_{x \in X} p(x) \odot \left(g(x) \colon x \in A \,\middle|\, 0\right) = \sum_{x \in A} p(x) \odot g(x) \tag{7}$$

(где $\odot$ — операция умножения на $\overline{\mathsf{R}}_+$, удовлетворяющая соглашению $0 \odot \infty = \infty \odot 0 = 0$ [1, разд. 10, выражение (46)]. Это значит, что простое подпространство $\left(A, (\Sigma_p)_A\right)$, вообще говоря, *не будет* шенноновским ПН, и, следовательно, нельзя утверждать, что оно совпадет с пространством $\left(A, \Sigma_{p_A}\right)$. Действительно, сужение $p \downarrow A$ распределения p на множество A, вообще говоря, не является распределением вероятностей. Так что простые подпространства шенноновских пространств относятся не к пространствам Шеннона, а к более общему типу ПН $\left(X, \Sigma_\alpha\right)$ (где α может быть произвольным отображением X в $\mathbf{R}_+$), которые были рассмотрены в работе [6, разд. 3]. Следовательно, не удовлетворяется и вторая часть требования преемственности.

Таким образом, мы должны сделать вывод, что простые подпространства ПН не могут считаться решением задачи ограничения. Однако эта неудача является временной, так как выясняется, что: 1) для пространств неопределенности возможен еще один вид подпространств (который удовлетворит требованию преемственности); 2) для получения подпространства второго вида необходимо сначала построить простое подпространство.

3. ПОНЯТИЕ РАВНОМЕРНОГО ПОДПРОСТРАНСТВА ПН

Интересующая нас вторая разновидность подпространств — *равномерные подпространства* — существует не всегда, а только в тех случаях, когда соответствующее простое подпространство является *усредняющим* [5, разд. 3, определение 2]. Это не слишком сильное ограничение, так как почти все интересные ПН (кроме *сингулярных* [7]) могут быть усредняющими (при тех или иных условиях). А каждое усредняющее ПН обладает *равномерной версией* [5, разд. 6, предложение 4, определение 4].

Согласно результатам, полученным в работе [5], построение равномерных подпространств можно кратко описать следующим образом. Пусть задано ПН (X,S), и из него было построено простое подпространство (A, S_A). Если подпространство (A, S_A) является усредняющим, то можно построить его *равномерную версию* $(A, \langle \mathrm{S}_A \rangle)$, где КС $\langle \mathrm{S}_A \rangle$ описывается дефиницией

$$\langle \mathrm{S}_A \rangle \underset{df}{=} g \mapsto \tilde{g}[\mathrm{S}_A] \lozenge \overline{\mathbf{R}}_+^A, \tag{8}$$

а $\tilde{g}[\mathrm{S}_A]$ есть *среднее значение* функции g относительно усредняющего критерия S_A (там же, разд. 4).

Замечание. Может случиться, что пространство (X,S) — усредняющее, а его простое подпространство (A, S_A) — нет. А может быть и наоборот. Первая ситуация возникнет, например, в том случае, если множество A является *областью безразличия* усредняющего ПН (X,S). Как следует из замечания второго раздела, тогда пространство (A, S_A) не будет усредняющим, так как КС S_A окажется постоянным функционалом (и, следовательно, его *шкала* не может быть инъективной).

Пример второй ситуации можно получить в предположении, что ПН (A, S_A) *сингулярно* в единственной точке $y \in X$ на некотором уровне $r > 0$ [7, разд. 1, определение 1]. Легко понять, что сингулярные пространства (любых разновидностей) не могут быть усредняющими. Пусть теперь точка y не принадлежит множеству A. Тогда простое подпространство (A, S_A) не будет сингулярным и вполне может оказаться усредняющим. ■

Определение. Пусть заданы: ПН (X,S) и непустое подмножество A множества X. Тогда если простое подпространство (A, S_A) является усредняющим, то ПН $(A, \langle S_A \rangle)$ будем называть **равномерным подпространством** пространства (X, S). ■

Если $(A, \langle S_A \rangle)$ есть равномерное подпространство пространства (X, S), то, как следует из дефиниции (8), а также из выражения (27) в работе [5], для любой функции $g \in \overline{\mathbf{R}}_+^A$ получим

$$\langle S_A \rangle (g) = \tilde{g}[S_A] = \left(\, ¦ S_A ¦^{-1} \circ S_A \right)(g) = \, ¦ S_A ¦^{-1} \left(S_A(g) \right), \tag{9}$$

где $¦ S_A ¦^{-1}$ — *обратная шкала* критерия S_A [5, разд. 3]. А если в (9) подставить выражение (4), то для каждой функции $g \in \overline{\mathbf{R}}_+^A$ окончательно получим

$$\langle S_A \rangle (g) = \, ¦ S_A ¦^{-1} \left(\underset{x \in X}{\mathrm{S}} \left(g(x) : \, x \in A \,|\, 0 \right) \right). \tag{10}$$

Итак, мы полностью выяснили структуру равномерного подпространства $(A, \langle S_A \rangle)$ пространства неопределенности (X, S) (где $A \subset X$).

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОГРАНИЧЕНИЯ

Теорема. Понятие равномерного подпространства является удовлетворительным решением задачи ограничения для пространств неопределенности. ■

Доказательство. Достаточно показать, что если задать преобразование

$$F_A \underset{df}{=} S \mapsto \langle S_A \rangle \tag{11}$$

для каждого непустого подмножества $A \subset X$, для которого КС $\langle S_A \rangle$ существует, то мы получим понятие подпространства, удовлетворяющее требованию преемственности. Для того чтобы это показать (или убедиться, что это не так), достаточно применить понятие равномерного подпространства к вероятностному типу неопределенности, т.е. к шенноновским пространствам.

Итак, пусть снова (X, Σ_p) — шенноновское пространство (где p — РВ на множестве X). И пусть A — непустое подмножество множества X. Построим равномерное подпространство $(A, \langle (\Sigma_p)_A \rangle)$ пространства (X, Σ_p). Но прежде всего выясним, при каких условиях равномерное подпространство $(A, \langle (\Sigma_p)_A \rangle)$ будет существовать, или (что то же самое) при каких условиях простое подпространство $(A, (\Sigma_p)_A)$ будет усредняющим. Согласно определению 2 из работы [5, разд. 3] для этого необходимо и достаточно, чтобы шкала $¦ (\Sigma_p)_A ¦$ простого подпространства $(A, (\Sigma_p)_A)$ была инъективным отображением множества $\overline{\mathbf{R}}_+$ в множество $\overline{\mathbf{R}}$.

Построим шкалу $¦ (\Sigma_p)_A ¦$. Как было показано выше, пространство $(A, (\Sigma_p)_A)$ является частным случаем пространств вида (A, Σ_α), где функция α представляет собой сужение распределения вероятностей p на множество A:

$$\alpha \underset{df}{=} p\downarrow A = x \mapsto p(x) \lozenge A. \tag{12}$$

Замечание. Подчеркнем, что *сужение* $p\downarrow A$ распределения p на множество A и его *ограничение* p_A на A (выражение (3)) — это не одно и то же. ■

Так что для нахождения шкалы $\text{¦}(\Sigma_p)_A\text{¦}$ пространства $(A, (\Sigma_p)_A)$ можно воспользоваться выражением (13) из работы [5]:

$$\text{¦}\,\Sigma_\alpha\,\text{¦} = r \mapsto r \odot \Sigma(\alpha) \lozenge \overline{\mathbf{R}}_+ . \tag{13}$$

В результате получим

$$\text{¦}\,(\Sigma_p)_A\,\text{¦} = r \mapsto \overline{p}(A) \odot r \lozenge \overline{\mathbf{R}}_+ , \tag{14}$$

где $\overline{p}(A)$ характеризуется выражением (2).

Из выражения (14) непосредственно видно, что шкала $\text{¦}(\Sigma_p)_A\text{¦}$ будет инъективным отображением множества $\overline{\mathbf{R}}_+$ в множество $\overline{\mathbf{R}}$, а пространство $(A, (\Sigma_p)_A)$ — усредняющим тогда и только тогда, когда выполнится условие $\overline{p}(A) > 0$. А выше уже было показано, что это же условие является необходимым и достаточным для существования шенноновского пространства (A, Σ_{p_A}). Таким образом, равномерные подпространства удовлетворяют первой части требования преемственности.

Для доказательства того, что выполняется и вторая часть требования, сначала необходимо построить *обратную шкалу* $\text{¦}(\Sigma_p)_A\text{¦}^{-1}$ простого подпространства $(A, (\Sigma_p)_A)$ (при условии, что выполнено неравенство $\overline{p}(A) > 0$). Из выражения (14) непосредственно следует, что обратная шкала (при условии $\overline{p}(A) > 0$) имеет вид

$$\text{¦}\,(\Sigma_p)_A\,\text{¦}^{-1} = r \mapsto \frac{r}{\overline{p}(A)} \lozenge \overline{\mathbf{R}}_+ . \tag{15}$$

Так что в силу (14) для каждой функции $g \in \overline{\mathbf{R}}_+^A$ можем написать

$$F_A(\Sigma_p)(g) = \langle(\Sigma_p)_A\rangle(g) = \text{¦}\,(\Sigma_p)_A\,\text{¦}^{-1}\big((\Sigma_p)_A(g)\big) = \frac{1}{\overline{p}(A)} \cdot (\Sigma_p)_A(g) . \tag{16}$$

А воспользовавшись выражением (4), получим (для той же функции g) следующее:

$$\langle(\Sigma_p)_A\rangle(g) = \frac{1}{\overline{p}(A)} \cdot \sum_{x\in X}\big(p(x) \odot g(x) : x \in A \big| 0\big) = \frac{1}{\overline{p}(A)} \cdot \sum_{x\in A} p(x) \odot g(x) . \tag{17}$$

Теперь необходимо сравнить выражение (17) с аналогичным выражением, описывающим результат применения к функции $g \in \overline{\mathbf{R}}_+^A$ шенноновского КС Σ_{p_A}. В силу (3) и выражения (1) из работы [2] получим

$$\Sigma_{p_A}(g) = \sum_{x \in A} p_A(x) \odot g(x) = \frac{1}{\overline{p}(A)} \cdot \sum_{x \in A} p(x) \odot g(x) = \langle (\Sigma_p)_A \rangle (g) \, . \quad (18)$$

Таким образом, критерии свертывания $\langle (\Sigma_p)_A \rangle$ и Σ_{p_A} совпадают (при условии $\overline{p}(A) > 0$, а следовательно, совпадают и пространства $(A, \langle (\Sigma_p)_A \rangle)$ и (A, Σ_{p_A}).

Мы показали, что выполнится и вторая часть требования преемственности. Теорема доказана. ■

Замечания. 1. Следует еще раз подчеркнуть, что равномерное подпространство $(A, \langle S_A \rangle)$ пространства (X, S) существует *не всегда*, а только тогда, когда его простое подпространство (A, S_A) является усредняющим. Но то же самое утверждение справедливо и для пространств Шеннона.

2. *Общий способ* построения равномерного подпространства $(A, \langle S_A \rangle)$ заданного ПН (X, S) оказался довольно сложным. В самом деле, для этого необходимо сделать следующее: а) построить простое подпространство (A, S_A); б) найти его шкалу; в) выяснить условия, при которых простое подпространство (A, S_A) будет усредняющим (они же являются условиями существования обратной шкалы); г) найти обратную шкалу простого подпространства (A, S_A) (при условии, что она существует); д) построить равномерное подпространство $(A, \langle S_A \rangle)$.

3. Сложность общего способа построения равномерных подпространств не означает, что для конкретных *частных* типов неопределенности способ перехода к равномерному подпространству тоже будет сложным. Действительно, для каждого интересного с практической точки зрения типа неопределенности можно раз и навсегда получить свой *короткий* способ перехода к равномерным подпространствам. А для этого весь упомянутый длинный путь перехода нужно будет применить *только один раз*. ■

5. ПРИМЕРЫ РАВНОМЕРНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ

1. Пространства Шеннона. Один пример мы уже имеем — это подпространства шенноновских пространств. Смысл доказанной выше теоремы состоит в том, что равномерное подпространство $(A, \langle (\Sigma_p)_A \rangle)$ шенноновского пространства (X, Σ_p) (где $A \subset X$) совпадает (при условии $\overline{p}(A) > 0$) с шенноновским пространством (A, Σ_{p_A}), где p_A — ограничение на множество A распределения вероятностей p.

Замечание. При рассмотрении других типов неопределенности, отличных от вероятностного, необходимо помнить, что в нашем распоряжении имеется *два* понятия подпространства ПН — *простое* подпространство и *равномерное*. Возникает вопрос, в каких случаях должно применяться первое из них, а в каких — второе. Хотя из нашего требования преемственности следует, что равномерные подпространства должны играть в теории неопределенности особую роль, легко, тем не менее, указать случаи, когда более подходящими окажутся простые подпространства. Этот вопрос еще требует изучения. Однако кажется логичным, что если, например, исходное ПН *не является равномерным*, то для него вряд ли уместным будет построение равномерных подпространств. ■

2. Пространства Заде. В качестве второго примера построим равномерное подпространство *пространства Заде*. Напомним, что пространствами Заде названы ПН вида $(X,\ \mathsf{SUP}_{\mu})$, которые были получены в результате *погружения нечетких множеств* [2, с. 131]. Напомним также, что пространство Заде $(X,\ \mathsf{SUP}_{\mu})$ соответствует нечеткому подмножеству множества X, такому, что $\mu \in [0,1]^X$ есть функция принадлежности этого подмножества. Критерий SUP_{μ} пространства $(X,\ \mathsf{SUP}_{\mu})$ характеризуется выражением

$$\mathsf{SUP}_{\mu} \underset{df}{=} f \mapsto \sup_{x\in X} \mu(x) \odot f(x) \lozenge \overline{\mathbf{R}}_{+}^{X} \qquad (19)$$

(здесь имеется в виду верхняя грань в множестве $\overline{\mathsf{R}}$, которая существует всегда, какими бы ни были функции $\mu \in [0,1]^X$ и $f \in \overline{\mathbf{R}}_{+}^{X}$).

Как следует из последнего **замечания**, для того чтобы имело смысл строить равномерное подпространство пространства Заде $(X,\ \mathsf{SUP}_{\mu})$, последнее само должно быть равномерным. Ввиду выражения (16) из работы [5], шкала пространства $(X,\ \mathsf{SUP}_{\mu})$ имеет вид

$$\mathrel{\vdots} \mathsf{SUP}_{\mu} \mathrel{\vdots} = r \mapsto r \odot \sup_{x\in X} \mu(x) \lozenge \overline{\mathsf{R}}_{+}\,. \qquad (20)$$

Из выражения же (20) непосредственно следует, что, для того чтобы пространство $(X,\ \mathsf{SUP}_{\mu})$ было равномерным, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\sup_{x\in X} \mu(x) = 1\,. \qquad (21)$$

Итак, предположим, что условие (21) выполнено. И пусть задано (непустое) подмножество A множества X. Построим равномерное подпространство $(A,\ \langle(\mathsf{SUP}_{\mu})_A\rangle)$ пространства $(X,\ \mathsf{SUP}_{\mu})$. Для этого сначала необходимо построить простое подпространство $(A,\ (\mathsf{SUP}_{\mu})_A)$. Но мы воспользуемся тем, что оно уже было построено в работе [1, разд. 9]. Согласно выражению (49) из [1] для каждой функции $g \in \overline{\mathbf{R}}_{+}^{A}$ можем написать

$$(\mathsf{SUP}_{\mu})_A(g) = \mathsf{SUP}_{\mu}(g\uparrow X) = \sup_{x\in X} \mu(x) \odot \big(g(x):\ x\in A \big|\, 0\big) = \sup_{x\in A} \mu(x) \odot g(x).\ (22)$$

Шкала подпространства $(A,\ (\mathsf{SUP}_{\mu})_A)$ в силу (22) должна характеризоваться выражением

$$\mid (\mathrm{SUP}_{\mu})_A \mid \; = \; r \mapsto r \odot \sup_{x \in A} \mu(x) \lozenge \overline{\mathbf{R}}_+ . \tag{23}$$

Как мы уже знаем, для существования равномерной версии простого подпространства $\big(A,\ (\mathrm{SUP}_{\mu})_A\big)$ необходимо и достаточно, чтобы его шкала $\mid (\mathrm{SUP}_{\mu})_A \mid$ была инъекцией. А ввиду выражения (23) для этого необходимо и достаточно выполнения условия

$$\sup_{x \in A} \mu(x) > 0 . \tag{24}$$

Если оно выполняется, то должна существовать и обратная шкала пространства $\big(A,\ (\mathrm{SUP}_{\mu})_A\big)$, которая в таком случае будет иметь вид

$$\mid (\mathrm{SUP}_{\mu})_A \mid^{-1} \; = \; r \mapsto r \odot \left(1 \Big/ \sup_{x \in A} \mu(x) \right) \lozenge \overline{\mathbf{R}}_+ . \tag{25}$$

Теперь у нас есть все необходимое для нахождения конструкции равномерного КС $\langle (\mathrm{SUP}_{\mu})_A \rangle$ и, следовательно, — способа построения равномерного подпространства $\big(A,\ \langle (\mathrm{SUP}_{\mu})_A \rangle\big)$. Действительно, ввиду соотношения (10) для каждой функции $g \in \overline{\mathbf{R}}_+^A$ можем написать

$$\langle (\mathrm{SUP}_{\mu})_A \rangle (g) = \mid (\mathrm{SUP}_{\mu})_A \mid^{-1} \big((\mathrm{SUP}_{\mu})_A (g) \big) . \tag{26}$$

А затем, используя выражения (22) и (25), вместо (26) для той же функции g получаем

$$\langle (\mathrm{SUP}_{\mu})_A \rangle (g) = \left(1 \Big/ \sup_{y \in A} \mu(y) \right) \cdot \sup_{x \in A} \mu(x) \odot g(x) . \tag{27}$$

Из выражения (27) следует, что построенное таким образом равномерное подпространство $\big(A,\ \langle (\mathrm{SUP}_{\mu})_A \rangle\big)$ пространства Заде $\big(X,\ \mathrm{SUP}_{\mu}\big)$ само является (равномерным) пространством Заде вида $\big(A,\ \mathrm{SUP}_{\mu_A}\big)$, где μ_A есть функция принадлежности нечеткого подмножества множества A, характеризуемая дефиницией

$$\mu_A \underset{df}{=} x \mapsto \left(1 \Big/ \sup_{y \in A} \mu(y) \right) \cdot \mu(x) \lozenge A . \tag{28}$$

3. Бесструктурные пространства. Рассмотрим теперь частный случай пространства Заде, когда исходная функция принадлежности $\mu \in [0,1]^X$ нечеткого подмножества множества X постоянна и имеет вид

$$\mu = x \mapsto 1 \lozenge X . \tag{29}$$

Известно, что этот случай соответствует описанию на языке нечетких множеств самого множества X (рассматриваемого как «обычное» множество).

А соответствующее этому случаю ПН $(X,\ \mathrm{SUP}_\mu)$ (названное *бесструктурным пространством*) обозначается $(X,\ \mathrm{SUP}_X)$.

Легко видеть, что бесструктурное пространство $(X,\ \mathrm{SUP}_X)$ равномерно. Причем, как показывают выражения (51) и (52) из работы [1], его простое подпространство $(A,\ (\mathrm{SUP}_X)_A)$ тоже равномерно и имеет вид $(A,\ \mathrm{SUP}_A)$. Поэтому искать равномерную версию $(A, \langle \mathrm{SUP}_A \rangle)$ простого подпространства $(A,\ \mathrm{SUP}_A)$ незачем, поскольку она совпадет с подпространством $(A,\ \mathrm{SUP}_A)$. Таким образом, для бесструктурного пространства $(X,\ \mathrm{SUP}_X)$ обе разновидности подпространств (простое и равномерное) совпадают (так что в этом случае достаточно одного обозначения $(A,\ \mathrm{SUP}_A)$). Подпространство же $(A,\ \mathrm{SUP}_A)$ представляет собой описание множества A (рассматриваемого как «обычное» множество). Этот частный случай пространств Заде можно рассматривать как дополнительное косвенное свидетельство того, что аппарат построения подпространств работает правильно.

4. «Экспоненциальные» суммирующие пространства. Так же, как и в работе [1], в качестве последнего примера рассмотрим более сложный случай — построим равномерное подпространство «экспоненциального» суммирующего ПН вида (X, Σ_p^*), критерий свертывания Σ_p^* которого описывается выражением

$$\Sigma_p^* \underset{df}{=} f \mapsto \sum_{x \in X} p(x) \odot 2^{\,f(x)} \ \lozenge\ \overline{\mathbf{R}}_+^X \tag{30}$$

(где, по-прежнему, p есть РВ на множестве X).

Имея в виду последнее **замечание**, мы начнем рассмотрение этого примера не с того, что возьмем в готовом виде полученное в работе [1] простое подпространство $(A, (\Sigma_p^*)_A)$ пространства (X, Σ_p^*), а рассмотрим сначала вопрос о равномерности самого исходного пространства (X, Σ_p^*). Как показано в работе [5], пространство (X, Σ_p^*) *не равномерно*. Но оно является усредняющим, и, следовательно, существует его равномерная версия $(X, \langle \Sigma_p^* \rangle)$. А КС $\langle \Sigma_p^* \rangle$ его равномерной версии характеризуется следующим условием: для каждой функции $f \in \overline{\mathbf{R}}_+^X$ имеет место равенство

$$\langle \Sigma_p^* \rangle (f) = \log_2 \sum_{x \in X} p(x) \odot 2^{\,f(x)} \tag{31}$$

[5, разд. 6, выражение (50)]. Поэтому для получения осмысленного результата в этом примере нужно отправляться не от простого подпространства $(A, (\Sigma_p^*)_A)$ исходного ПН (X, Σ_p^*), а от простого подпространства $(A, \langle \Sigma_p^* \rangle_A)$ его равномерной версии $(X, \langle \Sigma_p^* \rangle)$.

Для построения простого подпространства $(A, \langle \Sigma_p^* \rangle_A)$ воспользуемся выражением (44) из работы [1, разд. 9]. Тогда в силу (31) и учитывая выражение (55) из работы [1], для каждой функции $g \in \overline{\mathbf{R}}_+^A$ получаем

$$\langle \Sigma_p^* \rangle_A (g) = \langle \Sigma_p^* \rangle (g \uparrow X) = \log_2 \Big(\sum_{x \in A} p(x) \odot 2^{g(x)} + \overline{p}(X \setminus A) \Big), \qquad (32)$$

где

$$\overline{p}(X \setminus A) = \sum_{x \in X \setminus A} p(x). \qquad (33)$$

На основании выражения (32), а также выражения (2) из работы [5], для произвольного числа $r \in \overline{\mathbf{R}}_+$ получим

$$\langle \Sigma_p^* \rangle_A \langle r \rangle = \langle \Sigma_p^* \rangle_A \big(x \mapsto r \between A \big) = \log_2 \big(2^r \cdot \overline{p}(A) + \overline{p}(X \setminus A) \big) \qquad (34)$$

(где $\overline{p}(A)$ определяется из выражения (2)). Отсюда следует, что шкала простого подпространства $(A, (\Sigma_p^*)_A)$ имеет вид

$$\vdots \langle \Sigma_p^* \rangle_A \vdots = r \mapsto \log_2 \big(2^r \cdot \overline{p}(A) + \overline{p}(X \setminus A) \big) \between \overline{\mathbf{R}}_+ \qquad (35)$$

и, таким образом, является инъекцией тогда и только тогда, когда выполняется уже знакомое неравенство $\overline{p}(A) > 0$. Нетрудно также найти (при выполнении этого условия) область значений шкалы $\vdots \langle \Sigma_p^* \rangle_A \vdots$. Она равна

$$\mathrm{Val} \vdots \langle \Sigma_p^* \rangle_A \vdots = \overline{\mathbf{R}}_+. \qquad (36)$$

Как следует из определения 2 в работе [5, разд. 3], это же неравенство $\overline{p}(A) > 0$ является необходимым и достаточным условием того, чтобы простое подпространство $(A, \langle \Sigma_p^* \rangle_A)$ было усредняющим. Так что при этом условии существует и обратная его шкала, которая ввиду (34) и (36) должна иметь вид

$$\vdots \langle \Sigma_p^* \rangle_A \vdots^{-1} = r \mapsto \log_2 \frac{2^r - \overline{p}(X \setminus A)}{\overline{p}(A)} \between \overline{\mathbf{R}}_+. \qquad (37)$$

Таким образом, мы фактически нашли конструкцию равномерного подпространства $(A, \langle \langle \Sigma_p^* \rangle_A \rangle)$ равномерного пространства $(X, \langle \Sigma_p^* \rangle)$. В самом деле, для того чтобы вычислить результат $\langle \langle \Sigma_p^* \rangle_A \rangle (g)$ применения критерия $\langle \langle \Sigma_p^* \rangle_A \rangle$ к произвольной функции $g \in \overline{\mathbf{R}}_+^A$, достаточно сначала найти значение $\langle \Sigma_p^* \rangle_A (g)$ с помощью выражения (32), а затем к этому значению применить (как к аргументу) обратную шкалу $\vdots \langle \Sigma_p^* \rangle_A \vdots^{-1}$ (выражение (37)). Выполнив все эти действия, для функции $g \in \overline{\mathbf{R}}_+^A$ получим

$$\langle\langle \Sigma_p^* \rangle_A\rangle(g) = \log_2 \Big(\frac{1}{\overline{p}(A)} \cdot \sum_{x \in A} p(x) \odot 2^{g(x)} \Big). \qquad (38)$$

Полученное выражение интересно сравнить с выражением (55) из работы [1] для простого подпространства $\big(A, (\Sigma_p^*)_A\big)$ исходного ПН $\big(X, \Sigma_p^*\big)$.

ВЫВОДЫ

Итак, в статье было сделано следующее:

1. Показано, что понятие простого подпространства ПН [1] не является решением задачи ограничения [1], поскольку не удовлетворяет *требованию преемственности* в развитии аппарата неопределенности.
2. Построено понятие *равномерного подпространства* ПН с помощью аппарата равномерных версий [5].
3. Показано, что равномерные подпространства ПН удовлетворяют требованию преемственности и, следовательно, являются удовлетворительным решением задачи ограничения.
4. Рассмотрены примеры построения равномерных подпространств.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дидук Н.Н.* Прообразы пространств неопределенности. Простые подпространства // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2005. — № 1 — С. 127–142.
2. *Дидук Н.Н.* Пространства неопределенности и изоморфизм // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2002. — № 4. — С. 128–143.
3. *Бурбаки Н.* Теория множеств. — М.: Мир, 1965. — 456 с.
4. *Дидук Н.Н.* Система морфизмов для пространств неопределенности и ее применение // Системні дослідження та інформаційні технології. — 2003. — № 1. — С. 34–47.
5. *Дидук Н.Н.* Понятие шкалы пространства неопределенности и его применение // Там же. — 2004. — № 3. — С. 115–127.
6. *Дидук Н.Н.* Примеры вероятностной семантики основной теоремы кодирования для пространств неопределенности // Кибернетика и системный анализ. — 1994. — № 4. — С. 129–140.
7. *Дидук Н.Н.* Сингулярные пространства неопределенности и сингулярные преобразования // Кибернетика и системный анализ. — 1997. — № 5 — С. 16–29.

Поступила 29.06.2004