

АДАПТИВНІ РІЗНИЦЕВІ СІТКИ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ДВОВИМІРНОЇ ТЕПЛОВОЇ ХВИЛІ

С.О. ЛУК'ЯНЕНКО, І.Б. НІМЧУК

Розглянуто обчислювальний метод розв'язування двовимірного квазілінійного рівняння теплопровідності з використанням змінної нерівномірної різницевої сітки. Наведено результати його застосування до задачі про розповсюдження теплової хвилі.

ВСТУП

При дослідженні фізичних процесів горіння, високотемпературної плазми, фільтрації рідини через пористе середовище використовують квазілінійне рівняння теплопровідності, у якому коефіцієнти теплоємності та теплопровідності залежать від температури [1,2]. Розв'язування таких задач за допомогою наближених методів істотно ускладнюється внаслідок наявності нелінійностей та великих градієнтів шуканої функції. Для одержання розв'язку у таких випадках доводиться використовувати різницеву сітку з дуже малим кроком, що значно збільшує потрібний машинний час, тому доцільно застосовувати адаптивну сітку, яка змінюється у процесі обчислень у залежності від поведінки шуканої функції. Існуючі методи побудови адаптивних сіток [3,4] передбачають розв'язання на кожному часовому кроці деякої допоміжної задачі із суттєвими відмінностями від основної. Це може бути, наприклад, мінімізація деякого функціоналу, розв'язання додаткового рівняння Лапласа, що значною мірою ускладнює програму та збільшує витрати машинного часу на перебудову сітки. У даній роботі розглядається алгоритм, який будує змінну нерівномірну сітку на основі додаткових розрахунків основної задачі, що спрощує програмне забезпечення.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо адаптивний алгоритм на прикладі двовимірної тестової задачі розповсюдження теплової хвилі [1], яка описується квазілінійним рівнянням теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_1(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_2(u) \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad k_\alpha(u) = \chi_\alpha u^{\sigma_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (1)$$

При значеннях параметрів $\sigma_1 = 4$; $\chi_1 = 4$; $\sigma_2 = 2$; $\chi_2 = 0,25$ одним з його розв'язків є функція

$$u(x, y, t) = \begin{cases} 0,5\sqrt{-1 + \sqrt{1 + 16(t - x - 2y)}} & \text{при } t \geq x + 2y, \\ 0 & \text{при } t \leq x + 2y. \end{cases} \quad (2)$$

Цей точний розв'язок будемо використовувати для порівняння наближених розв'язків, одержаних різними алгоритмами. З нього випливають початкові та крайові умови задачі. Розв'язок являє собою температурну хвилю, що переміщується зі сталою швидкістю (рис. 1).

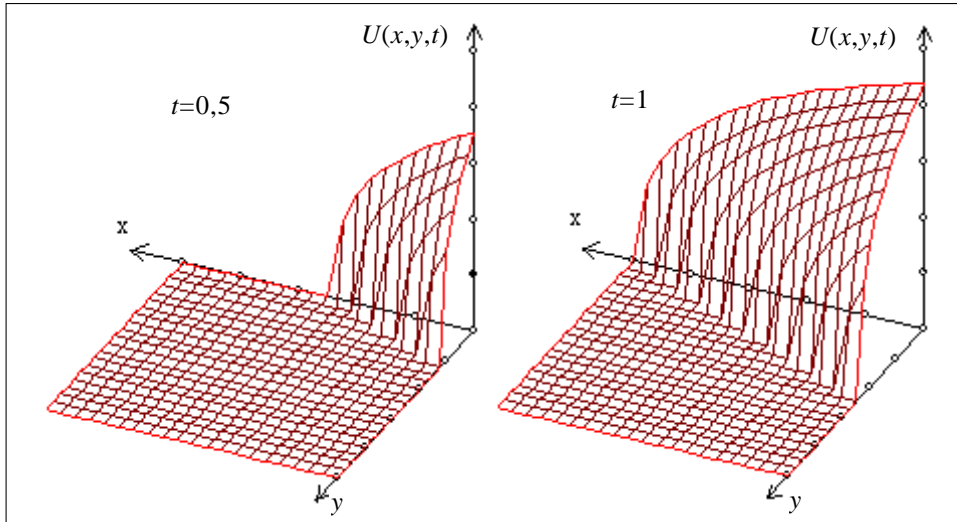


Рис. 1. Графік розв'язку для моментів часу $t=0,5$ та $t=1$

Розглянемо, як зміняться різницеві рівняння при використанні нерівномірної сітки, наведемо метод їх розв'язання, викладемо алгоритм побудови адаптивної сітки та дослідимо його ефективність порівняно із фіксованою рівномірною сіткою.

РІЗНИЦЕВІ РІВНЯННЯ ДЛЯ НЕРІВНОМІРНОЇ СІТКИ

Похідні розв'язку задачі (1), (2) у точках, розташованих на майже вертикальному фронті, близькі до нескінченності. Тому для її розв'язання доцільно використовувати неявні схеми. Вони є стійкими та монотонними за будь-яких кроків, хоча і вимагають розв'язання на кожному часовому кроці системи нелінійних алгебраїчних рівнянь (СНАР). Застосуємо для дискретизації вихідної задачі метод балансу. Його рівняння з метою забезпечення економічності алгоритму будемо розв'язувати методом змінних напрямків. Для розв'язання СНАР, що при цьому виникають, використаємо метод Ньютона (має високу швидкість збіжності), а для систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), які утворюються на кожній ітерації метода Ньютона, — модифікований для тридіагональних матриць метод Гаусса.

Введемо по координаті x нерівномірну сітку з вузлами x_i ($i = 0, 1, \dots, n$) та кроками $h_{1,i} = x_i - x_{i-1}$, по координаті y — з вузлами y_j ($j = 0, 1, \dots, m$) та кроками $h_{2,j} = y_j - y_{j-1}$, по часу t — з вузлами t_k ($k = 0, 1, \dots$) та змінними кроками τ . Позначимо $u_{i,j}^k$ величину, що відповідає наближеному розв'язку в точці (x_i, y_j, t_k) , а $U = U_{ij}^k$ — точному. Нагадаємо, що у методі змінних напрямків спочатку здійснюється перехід з шару t_k на полуцілий шар $t_{k+\frac{1}{2}} = t_k + \frac{\tau}{2}$, причому $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ апроксимується на шарі $t_{k+\frac{1}{2}}$, а $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ — на шарі t_k , тобто перший етап є неявним по змінній x . На другому етапі виконується перехід із полуцілого шару $t_{k+\frac{1}{2}}$ на шар $t_{k+1} = t_k + \tau$, а апроксимація похідних здійснюється навпаки, явно по x на шарі $t_{k+\frac{1}{2}}$ та неявно по y на t_{k+1} . Позначимо $h_{1,c}, h_{2,c}$ середнє арифметичне двох сусідніх кроків для вузла (x_i, y_j) : $h_{1,c} = \frac{h_{1,i} + h_{1,i+1}}{2}$, $h_{2,c} = \frac{h_{2,j} + h_{2,j+1}}{2}$. Для спрощення виразів значення функції на k -му часовому шарі позначимо $u_{ij} = u_{ij}^k$, на проміжному — \bar{u}_{ij} , на $(k+1)$ -му — \hat{u}_{ij} .

Різницеві рівняння першого півкроку, одержані на основі методу балансу, мають вигляд

$$\frac{\bar{u}_{ij} - u_{ij}}{\frac{\tau}{2}} = \frac{\mathfrak{N}_{1,i+\frac{1}{2}} \frac{(\bar{u}_{i+1,j} - \bar{u}_{ij})}{h_{1,i+1}} - \mathfrak{N}_{1,i-\frac{1}{2}} \frac{(\bar{u}_{ij} - \bar{u}_{i-1,j})}{h_{1,i}}}{h_{1,c}} +$$

$$+ \frac{\mathfrak{N}_{2,j+\frac{1}{2}} \frac{(u_{i,j+1} - u_{ij})}{h_{2,j+1}} - \mathfrak{N}_{2,j-\frac{1}{2}} \frac{(u_{ij} - u_{i,j-1})}{h_{2,j}}}{h_{2,c}}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad j = 1, \dots, m-1,$$

де

$$\mathfrak{N}_{1,i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [k_1(u_{ij}) + k_1(u_{i+1,j})]; \quad \mathfrak{N}_{1,i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [k_1(u_{i-1,j}) + k_1(u_{ij})];$$

$$\mathfrak{N}_{2,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [k_2(u_{ij}) + k_2(u_{i,j+1})]; \quad \mathfrak{N}_{2,j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [k_2(u_{i,j-1}) + k_2(u_{ij})].$$

Для спрощення цього рівняння помножимо його на $\frac{\tau}{2}$ та, позначивши

$$\sigma_1 = \frac{\tau}{2h_{1,c}h_{1,i}h_{1,i+1}}, \quad \sigma_2 = \frac{\tau}{2h_{2,c}h_{2,j}h_{2,j+1}}, \quad \text{одержимо}$$

$$f_{ij} \equiv \bar{u}_{ij} - u_{ij} - \sigma_1 \left[\bar{\mathfrak{S}}_{1,i+\frac{1}{2}} (\bar{u}_{i+1,j} - \bar{u}_{ij}) h_{1,i} - \bar{\mathfrak{S}}_{1,i-\frac{1}{2}} (\bar{u}_{ij} - \bar{u}_{i-1,j}) h_{1,i+1} \right] - \\ - \sigma_2 \left[\mathfrak{S}_{2,j+\frac{1}{2}} (u_{i,j+1} - u_{ij}) h_{2,j} - \mathfrak{S}_{2,j-\frac{1}{2}} (u_{ij} - u_{i,j-1}) h_{2,j+1} \right] = 0. \quad (3)$$

Ця рівність повинна виконуватися для усіх внутрішніх вузлів ($i=1, \dots, (n-1), j=1, \dots, (m-1)$), тому породжується система з $(n-1)(m-1)$ нелінійних алгебраїчних рівнянь. Оскільки значення невідомої функції в граничних вузлах відомі з граничних умов 1-го роду, то кількість невідомих у цій системі співпадає з кількістю рівнянь. У кожному рівнянні фігурують на шарі з номером $\left(k + \frac{1}{2}\right)$ три сусідніх точки у напрямку ОХ, тому систему можна розділити на $(m-1)$ незалежних систем, кожна з яких відповідає ряду точок x_i для фіксованого j :

$$\begin{cases} f_{1j} = 0, \\ \dots \\ f_{n-1,j} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Кожне з рівнянь j -ї системи, крім першого та останнього, містить три невідомих величини: $\bar{u}_{i-1,j}, \bar{u}_{ij}, \bar{u}_{i+1,j}$. Застосуємо для її розв'язання метод Ньютона. На s -й ітерації цього методу необхідно розв'язати СЛАР відносно приривів $\Delta \bar{u}_{ij}^{(s)} = \bar{u}_{ij}^{(s)} - \bar{u}_{ij}^{(s-1)}$ невідомих

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_{1j}^{(s-1)}}{\partial \bar{u}_{1j}} & \frac{\partial f_{1j}^{(s-1)}}{\partial \bar{u}_{2j}} \\ \frac{\partial f_{2j}^{(s-1)}}{\partial \bar{u}_{1j}} & \frac{\partial f_{2j}^{(s-1)}}{\partial \bar{u}_{2j}} & \frac{\partial f_{2j}^{(s-1)}}{\partial \bar{u}_{3j}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_{n-2,j}^{(s-1)}}{\partial \bar{u}_{n-3,j}} & \frac{\partial f_{n-2,j}^{(s-1)}}{\partial \bar{u}_{n-2,j}} & \frac{\partial f_{n-2,j}^{(s-1)}}{\partial \bar{u}_{n-1,j}} \\ \frac{\partial f_{n-1,j}^{(s-1)}}{\partial \bar{u}_{n-2,j}} & \frac{\partial f_{n-1,j}^{(s-1)}}{\partial \bar{u}_{n-1,j}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \bar{u}_{1j}^{(s)} \\ \Delta \bar{u}_{2j}^{(s)} \\ \dots \\ \Delta \bar{u}_{n-2,j}^{(s)} \\ \Delta \bar{u}_{n-1,j}^{(s)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -f_{1j}^{(s-1)} \\ -f_{2j}^{(s-1)} \\ \dots \\ -f_{n-2,j}^{(s-1)} \\ -f_{n-1,j}^{(s-1)} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Отже, i -е рівняння СЛАР для j -ї системи має структуру

$$\frac{\partial f_{ij}^{(s-1)}}{\partial \bar{u}_{i-1,j}} \Delta \bar{u}_{i-1,j}^{(s)} + \frac{\partial f_{ij}^{(s-1)}}{\partial \bar{u}_{ij}} \Delta \bar{u}_{ij}^{(s)} + \frac{\partial f_{ij}^{(s-1)}}{\partial \bar{u}_{i+1,j}} \Delta \bar{u}_{i+1,j}^{(s)} = -f_{ij}^{(s-1)}, \quad i = 2, \dots, n-2.$$

Перше та останнє рівняння СЛАР (5) містять по дві невідомі. Матриця цієї СЛАР є тридіагональною, а кількість рядків якобіану визначається кількістю внутрішніх точок по просторовій змінній x . Частинні похідні $\frac{\partial f_{ij}}{\partial \bar{u}_{i-1,j}}$, $\frac{\partial f_{ij}}{\partial \bar{u}_{ij}}$, $\frac{\partial f_{ij}}{\partial \bar{u}_{i+1,j}}$, необхідні для формування матриці Якобі, одержимо з (3).

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{ij}}{\partial \bar{u}_{i-1,j}} &= -\sigma_1 h_{1,i+1} \left(\bar{\aleph}_{1,i-1/2} - \frac{\partial \bar{\aleph}_{1,i-1/2}}{\partial \bar{u}_{i-1,j}} (\bar{u}_{ij} - \bar{u}_{i-1,j}) \right), \\ \frac{\partial f_{ij}}{\partial \bar{u}_{ij}} &= 1 + \sigma_1 \left[\bar{\aleph}_{1,i+1/2} h_{1,i} + \bar{\aleph}_{1,i-1/2} h_{1,i+1} - \frac{\partial \bar{\aleph}_{1,i+1/2}}{\partial \bar{u}_{ij}} (\bar{u}_{i+1,j} - \bar{u}_{ij}) h_{1,i} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \bar{\aleph}_{1,i-1/2}}{\partial \bar{u}_{ij}} (\bar{u}_{ij} - \bar{u}_{i-1,j}) h_{1,i+1} \right], \\ \frac{\partial f_{ij}}{\partial \bar{u}_{i+1,j}} &= -\sigma_1 h_{1,i} \left(\bar{\aleph}_{1,i+1/2} + \frac{\partial \bar{\aleph}_{1,i+1/2}}{\partial \bar{u}_{i+1,j}} (\bar{u}_{i+1,j} - \bar{u}_{ij}) \right). \end{aligned}$$

На першій ітерації методу Ньютона як початкове наближення до \bar{u}_{ij} береться значення з попереднього, k -го часового кроку.

Різницеві рівняння другого півкроку методу змінних напрямків одержимо аналогічно. Вони мають вигляд

$$\frac{\hat{u}_{ij} - \bar{u}_{ij}}{\frac{\tau}{2}} = \frac{\bar{\aleph}_{1,i+1/2} \frac{(\bar{u}_{i+1,j} - \bar{u}_{ij})}{h_{1,i+1}} - \bar{\aleph}_{1,i-1/2} \frac{(\bar{u}_{ij} - \bar{u}_{i-1,j})}{h_{1,i}}}{h_{1,c}} +$$

$$+ \frac{\hat{\mathcal{S}}_{2,j+\frac{1}{2}} \frac{(\hat{u}_{i,j+1} - \hat{u}_{ij})}{h_{2,j+1}} - \hat{\mathcal{S}}_{2,j-\frac{1}{2}} \frac{(\hat{u}_{ij} - \hat{u}_{i,j-1})}{h_{2,j}}}{h_{2,c}}, \quad i=1, \dots, n-1, \quad j=1, \dots, m-1$$

або

$$f_{ij} \equiv \hat{u}_{ij} - \bar{u}_{ij} - \sigma_1 \left[\bar{\mathcal{S}}_{1,i+\frac{1}{2}} (\bar{u}_{i+1,j} - \bar{u}_{ij}) h_{1,i} - \bar{\mathcal{S}}_{1,i-\frac{1}{2}} (\bar{u}_{ij} - \bar{u}_{i-1,j}) h_{1,i+1} \right] - \\ - \sigma_2 \left[\hat{\mathcal{S}}_{2,j+\frac{1}{2}} (\hat{u}_{i,j+1} - \hat{u}_{ij}) h_{2,j} - \hat{\mathcal{S}}_{2,j-\frac{1}{2}} (\hat{u}_{ij} - \hat{u}_{i,j-1}) h_{2,j+1} \right] = 0. \quad (6)$$

Ця рівність повинна виконуватися для всіх внутрішніх вузлів ($i=1, \dots, (n-1)$, $j=1, \dots, (m-1)$), тому знову породжується система з $(n-1) \times (m-1)$ нелінійних алгебраїчних рівнянь. У кожному рівнянні фігурують на $(k+1)$ -му шарі три сусідніх точки у напрямку OY , тому систему можна розділити на $(n-1)$ незалежних систем, кожна з яких відповідає ряду точок y_i для фіксованого i

$$\begin{cases} f_{i1} = 0, \\ \dots \\ f_{i,m-1} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Кожне з рівнянь i -ї системи, крім першого та останнього, містить три невідомі величини $\hat{u}_{i,j-1}, \hat{u}_{ij}, \hat{u}_{i,j+1}$. Знову застосуємо для розв'язання СНАР метод Ньютона. На s -й ітерації цього методу необхідно розв'язати СЛАР відносно приривів $\Delta \hat{u}_{ij}^{(s)} = \hat{u}_{ij}^{(s)} - \hat{u}_{ij}^{(s-1)}$ невідомих. Отже, j -е рівняння СЛАР матиме структуру

$$\frac{\partial f_{ij}^{(s-1)}}{\partial \hat{u}_{i,j-1}} \Delta \hat{u}_{i,j-1}^{(s)} + \frac{\partial f_{ij}^{(s-1)}}{\partial \hat{u}_{ij}} \Delta \hat{u}_{ij}^{(s)} + \frac{\partial f_{ij}^{(s-1)}}{\partial \hat{u}_{i,j+1}} \Delta \hat{u}_{i,j+1}^{(s)} = -f_{ij}^{(s-1)}, \quad j=2, \dots, m-2. \quad (8)$$

Матриця СЛАР є тридіагональною, кількість рядків якобіану визначається кількістю внутрішніх точок по просторовій змінній y . Використовуючи (6), знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial \hat{u}_{i,j-1}} = -\sigma_2 h_{2,j+1} \left(\hat{\mathcal{S}}_{2,j-1/2} - \frac{\partial \hat{\mathcal{S}}_{2,j-1/2}}{\partial \hat{u}_{i,j-1}} (\hat{u}_{ij} - \hat{u}_{i,j-1}) \right), \\ \frac{\partial f_{ij}}{\partial \hat{u}_{ij}} = 1 + \sigma_2 \left[\hat{\mathcal{S}}_{2,j+1/2} h_{2,j} + \hat{\mathcal{S}}_{2,j-1/2} h_{2,j+1} - \frac{\partial \hat{\mathcal{S}}_{2,j+1/2}}{\partial \hat{u}_{ij}} (\hat{u}_{i,j+1} - \hat{u}_{ij}) h_{2,j} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \hat{S}_{2,j-1/2}}{\partial \hat{u}_{ij}} (\hat{u}_{ij} - \hat{u}_{i,j-1}) h_{2,j+1} \right],$$

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial \hat{u}_{i,j+1}} = -\sigma_2 h_{2,j} \left(\hat{S}_{2,j+1/2} + \frac{\partial \hat{S}_{2,j+1/2}}{\partial \hat{u}_{i,j+1}} (\hat{u}_{i,j+1} - \hat{u}_{ij}) \right),$$

що дозволить сформулювати СЛАР для ітерацій Ньютонна.

АДАПТИВНИЙ АЛГОРИТМ

При збільшенні кількості вузлів різницевої сітки підвищується точність, але зростає розмірність алгебраїчних систем та, відповідно, час обчислень. Тому кількість вузлів повинна бути мінімальною для скорочення затрат машинного часу, але забезпечувати наперед задану точність. Очевидно, що точність різницевого розв'язку для рівномірної сітки залежить від поведінки шуканої функції, а саме, зменшується у зонах великих її градієнтів, тому застосовують скупчування вузлів у таких зонах. Але побудова нерівномірної сітки до початку розрахунків, коли враховуються можливі зони великих градієнтів, є непридатною у випадках, коли ці зони з часом змінюють своє положення у просторі. Тут доцільно застосовувати адаптивні алгоритми, які у процесі розв'язування задачі аналізують поведінку функції, контролюють похибку та будують змінну за часом та нерівномірну різницеву сітку. Такі алгоритми скупчують вузли сітки у зонах різкої зміни шуканої функції та розташовують їх рідко там, де функція змінюється плавно. Вони автоматично пересувають скупчення вузлів одночасно зі зміною положення у просторі зони великих градієнтів. Це дозволяє скоротити розмірність систем алгебраїчних рівнянь без погіршення точності та час обчислень.

Для адаптивності методу необхідно на кожному часовому кроці для кожного вузла (x_i, y_j) оцінювати точність одержаних результатів,

наприклад, порівнювати локальну похибку e_{ij} з допустимою $e_{\text{доп}}$, та на основі цього змінювати величини кроків $h_{1,i}$, $h_{2,j}$ в околі даної точки, а також величину кроку за часом τ .

Покажемо, як можна визначити локальну похибку e_{ij} . Обраний метод змінних напрямків має похибку апроксимації $O(\tau^2 + h_1^2 + h_2^2)$, тобто різницю між точним та наближеним розв'язками на $(k+1)$ -му часовому шарі за умови, що значення для k -го шару обчислено точно, можна представити для кожного вузла у вигляді

$$e_{ij} = U_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k+1} = \tau(C_1\tau^2 + C_2h_1^2 + C_3h_2^2).$$

Для визначення коефіцієнтів C_1, C_2, C_3 скористаємося методом Рунге (подвійного перерахунку), тобто перехід з k -го на $(k+1)$ -й часовий шар виконаємо декілька разів з різними величинами кроків, а саме: 1) h_1, h_2, τ ; 2) $\frac{h_1}{2}, h_2, \tau$; 3) $h_1, \frac{h_2}{2}, \tau$; 4) $h_1, h_2, \frac{\tau}{2}$. Одержимо систему чотирьох рівнянь з чотирма невідомими U, C_1, C_2, C_3 .

$$U - u_{h_1, h_2, \tau} = C_1 \tau^3 + C_2 h_1^2 \tau + C_3 h_2^2 \tau,$$

$$U - u_{\frac{h_1}{2}, h_2, \tau} = C_1 \tau^3 + C_2 \frac{h_1^2}{4} \tau + C_3 h_2^2 \tau,$$

$$U - u_{h_1, \frac{h_2}{2}, \tau} = C_1 \tau^3 + C_2 h_1^2 \tau + C_3 \frac{h_2^2}{4} \tau,$$

$$U - u_{h_1, h_2, \frac{\tau}{2}} = C_1 \frac{\tau^3}{4} + C_2 h_1^2 \tau + C_3 h_2^2 \tau.$$

Її розв'язок дає можливість оцінити локальну похибку, уточнити результат та визначити нові кроки сітки. Дійсно, якщо ми виберемо нові кроки за формулами $\tau_{\text{нов}} = \alpha \tau_{\text{стар}}$, $h_{1,\text{нов}} = \beta h_{1,\text{стар}}$, $h_{2,\text{нов}} = \gamma h_{2,\text{стар}}$, то одержимо результат з похибкою $e_{\text{нов}}$, яка не повинна перевищувати $e_{\text{доп}}$.

$$\begin{aligned} e_{\text{нов}} &= (\alpha \tau) [C_1 (\alpha \tau)^2 + C_2 (\beta h_1)^2 + C_3 (\gamma h_2)^2] = \\ &= C_1 (\alpha \tau)^3 + C_2 (\beta h_1)^2 (\alpha \tau) + C_3 (\gamma h_2)^2 (\alpha \tau) \leq e_{\text{доп}}. \end{aligned}$$

З цієї рівності можна одержати коефіцієнти $\alpha, \beta_{ij}, \gamma_{ij}$ зміни кроків та побудувати нову сітку, яка враховує особливості поведінки функції [5].

Наведемо алгоритм даного адаптивного методу. Нехай відомі значення функції $U(x, y, t)$ при $t = t_k$. Для переходу на наступний часовий шар $t_{k+1} = t_k + \tau$ необхідно виконати такі дії:

1. Обчислити по обраній різницевій схемі з кроками $h_{1,i}, h_{2,j}, \tau$ значення $u_{h_1, h_2, \tau}$ для кожного вузла $(k+1)$ -го шару.

2. Обчислити з кроками $\frac{h_{1,i}}{2}, h_{2,j}, \tau$ значення $u_{\frac{h_1}{2}, h_2, \tau}$. Щоб одержати на k -му шарі значення опорної функції з кроками $\frac{h_{1,i}}{2}, h_{2,j}$, застосувати інтерполяцію по відомим значенням функції у вузлах з кроками $h_{1,i}, h_{2,j}$ або початкову умову у випадку першого кроку.

3. Обчислити з кроками $h_{1,i}, \frac{h_{2,j}}{2}, \tau$ значення $u_{h_1, \frac{h_2}{2}, \tau}$.
4. Обчислити з кроками $h_{1,i}, h_{2,j}, \frac{\tau}{2}$ значення $u_{h_1, h_2, \frac{\tau}{2}}$, застосувавши різницевий метод двічі.
5. Для кожного вузла за формулою $e_{ij} = U_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k+1} = \tau(C_1\tau^2 + C_2h_1^2 + C_3h_2^2)$ обчислити похибку e_{ij} та вибрати найбільшу з них — e .
6. За формулами $C_1 = \frac{4}{3\tau^3}(u_{h_1, h_2, \frac{\tau}{2}} - u_{h_1, h_2, \tau})$, $k_\tau = 0,33$, $\alpha_{ij} = 3\sqrt{\frac{k_\tau e_{\text{доп}}}{|C_1|\tau^3}}$, $\alpha = \min_{i,j} \alpha_{ij}$ обчислити коефіцієнт α зміни часового кроку.
7. За формулами $C_2 = \frac{4}{3h_1^2\tau}\left(u_{\frac{h_1}{2}, h_2, \tau} - u_{h_1, h_2, \tau}\right)$, $k_\beta = 0,5$, $e_1 = \frac{e_{\text{доп}}}{\alpha\tau} - C_1(\alpha\tau)^2$, $\beta_{ij} = \frac{1}{h_1}\sqrt{\frac{k_\beta e_1}{|C_2|}}$ для кожного вузла обчислити коефіцієнт β_{ij} зміни просторового кроку. Якщо $e_{ij} > e_{\text{доп}}$ та $h_{1,i} > h_{\text{мін}}$ або $h_{1,i+1} > h_{\text{мін}}$, то β_{ij} зменшити вдвічі та сформуванати прикмету відмови. Знайти для кожного вузла x_i мінімальне значення β_{ij} .
8. Сформуванати нову нерівномірну сітку у напрямку OX на $(k+1)$ -му шарі.
9. Для кожного вузла обчислити коефіцієнт γ_{ij} за формулами $C_3 = \frac{4}{3h_2^2\tau}\left(u_{h_1, \frac{h_2}{2}, \tau} - u_{h_1, h_2, \tau}\right)$, $e_2 = \frac{e_{\text{доп}}}{\alpha\tau} - C_1(\alpha\tau)^2 - C_2(\beta h_1)^2$, $\gamma_{ij} = \frac{1}{h_2}\sqrt{\frac{e_2}{|C_3|}}$ та сформуванати нову нерівномірну сітку у напрямку OY .
10. Якщо $e \leq e_{\text{доп}}$ або $e > e_{\text{доп}}$ при мінімальних значеннях кроків, крок приймається. За формулою $U = -3u_{h_1, h_2, \tau} + \frac{4}{3}u_{\frac{h_1}{2}, h_2, \tau} + \frac{4}{3}u_{h_1, \frac{h_2}{2}, \tau} + \frac{4}{3}u_{h_1, h_2, \frac{\tau}{2}}$ уточнити результат. Збільшити час, запам'ятати результати, одержані для $(k+1)$ -го часового шару. На $(k+1)$ -му шарі створюється опорна функція для нової сітки. Прийняти $k = k+1$.
11. Якщо $e > e_{\text{доп}}$ та кроки не мінімальні, результати анулюються, крок τ зменшується вдвічі, на k -му шарі створюється нова опорна функція з ущільненою сіткою.
12. Якщо модельний час не перевищує кінцевого значення, перейти до п.1.

РЕЗУЛЬТАТИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТЕСТОВОЇ ЗАДАЧІ

Для експериментальної перевірки алгоритму було взято такі значення параметрів методу: початковий, мінімальний, максимальний кроки по часу $\tau_{\text{поч}} = 0,01$, $\tau_{\text{мін}} = 0,001$, $\tau_{\text{макс}} = 0,01$; початкова, максимальна, мінімальна кількість просторових вузлів $n_{\text{поч}} = 20$, $n_{\text{макс}} = 50$, $n_{\text{мін}} = 5$. Розв'язок відшукувався в області $x, y \in [0,1]$, $t \in [0;0,5]$ з допустимою похибкою $e_{\text{доп}} = 0,1$. На початку розрахунків вузли адаптивної сітки розташовані рівномірно.

Аналіз процесу обчислень показує, що з ростом модельного часу t вузли сітки скупчуються у зоні фронту теплової хвилі, і це скупчення пересувається

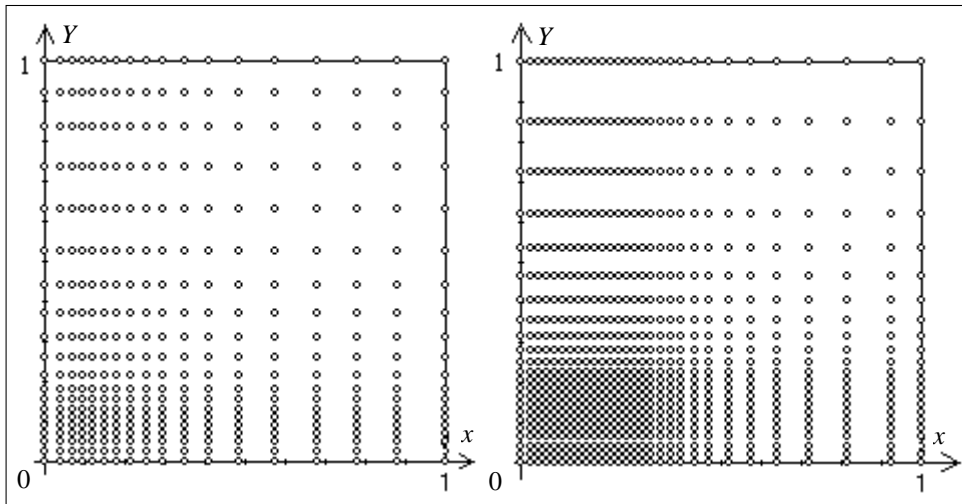


Рис. 2. Розташування вузлів різницевої сітки для $t=0,3$ та $t=0,5$ поступово разом із фронтом (рис. 2).

Кількість просторових вузлів змінюється у процесі розрахунків та по кожній координаті у 4...5 разів менше, ніж у випадку рівномірної сітки при однаковій точності результату. Максимальна абсолютна похибка звичайно не перевищує допустимого значення $e_{\text{доп}}$. Її графік внаслідок перебудови сітки на кожному кроці носить коливальний характер (рис. 3,а). Найбільше відрізняються графіки точного та наближеного розв'язків у вузлах, розташованих на фронті біля його стику з площиною XOY (рис. 3,б), де має місце розрив похідних точного розв'язку. Наближений розв'язок згладжує поверхню у зоні її стику з цією площиною, тому стає значною похибка (рис. 3,в).

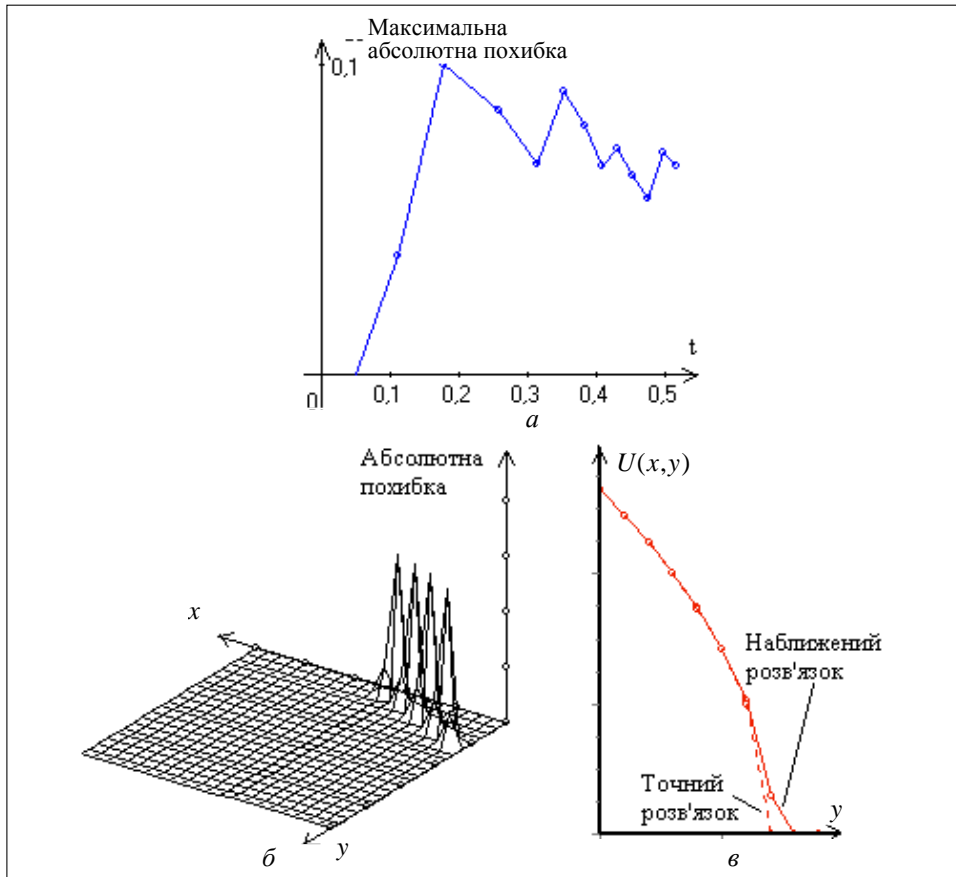


Рис. 3. Графіки максимальної абсолютної похибки (а), абсолютної похибки при $t=0,5$ (б), перерізів точного та наближеного розв'язків при $t=0,5, y=0,1$ (в)

Порівняння результатів розв'язання цієї задачі за допомогою алгоритмів з рівномірною фіксованою та нерівномірною змінною різницевими сітками свідчить про перевагу адаптивного алгоритму, а саме скорочення витрат машинного часу у 1,5...2 рази.

ВИСНОВКИ

Адаптивні алгоритми мають істотні переваги перед алгоритмами з фіксованими сітками, оскільки при однаковій точності результату кількість просторових вузлів зменшується у декілька разів, що призводить до такого ж зменшення розмірності систем алгебраїчних рівнянь. Але загальний вииграш машинного часу значно менший внаслідок необхідності додаткових витрат на обчислення похибки та нової різницевої сітки. Важливою перевагою адаптивних методів є також можливість одержання результату з наперед заданою точністю. У подальшому доцільно докласти зусиль до розробки економічних алгоритмів обчислення функції у вузлах нової сітки, що знизить витрати машинного часу.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977. — 736с.
2. *Самарский А.А., Соболев И.М.* Примеры численного расчета температурных волн // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1963. — **3**, № 4. — С. 702–719.
3. *Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен. — В 2 т. Т.2-й. Пер. с англ. — М.: Мир, 1990. — 392 с.
4. *Азаренок Б.Н., Иваненко С.А.* О применении адаптивных сеток для численного решения нестационарных задач газовой динамики // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. — 2000. — **40**, № 9. — С. 1386–1407.
5. *Лук'яненко С.О.* Адаптивні обчислювальні методи моделювання об'єктів з розподіленими параметрами. — Київ: Політехніка, 2004. — 236 с.

Надійшла 10.11.2004