

ДОВГОТРИВАЛА МІЦНІСТЬ ПРУЖНОГО ТІЛА З ЕЛІПТИЧНОЮ ТРІЩИНОЮ, ЗАПОВНЕНОЮ В'ЯЗКОПРУЖНИМ МАТЕРІАЛОМ

В. П. СИЛОВАНЮК, А. В. РЕВЕНКО

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

Отримано розв'язок задачі про граничний стан пружного тіла, що містить еліптичну в плані тріщину, заповнену в'язкопружним матеріалом. Встановлені параметри задачі, від яких залежить ефективність зміцнення тіла заповненням дефектів ін'єкційними матеріалами. Для заповнювача з реологічними властивостями матеріалу Кельвіна розв'язок отримано у замкнутому аналітичному вигляді.

Ключові слова: повзучість, включення, концентрація напружень, в'язкопружність, релаксація.

В сучасній будівельній практиці знаходить все ширше застосування технологія відновлення несучої здатності пошкоджених тріщинами будівельних споруд тривалої експлуатації, яка полягає у ін'єктуванні дефектних зон рідкими матеріалами, здатними тверднути через певний час. Розрахунки короточасної міцності відновлених таким способом елементів конструкцій свідчать про високу ефективність цього методу [1]. Оскільки ін'єкційними матеріалами, як правило, є високомолекулярні сполуки (поліуретани, акрилі, епоксидні смоли і т.п.), в'язкопружні властивості яких в значній мірі залежать від часу, то важливо дослідити довготривалу міцність відновлених за такими ін'єкційними технологіями об'єктів.

Розглянемо ізотропний пружний простір, що містить тріщиноподібну порожнину еліпсоїдальної форми. Прямокутну декартову систему координат x, y, z з початком в центрі еліпсоїда розміщуємо так, щоб поверхню дефекту описати рівнянням $V: x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 - 1 = 0$, де $(a, b \gg c)$. Для зміцнення тіла тріщину заповнили ін'єкційним матеріалом, здатним утворювати після затверднення міцні адгезійні зв'язки з основним матеріалом. Нехай тіло розтягується в нескінченності зусиллями інтенсивністю p , перпендикулярно до площини тріщини. Встановимо довготривалу міцність тіла із "залікованою" тріщиною, враховуючи здатність матеріалу заповнювача до повзучості та релаксації напружень. Як відомо [2], граничне навантаження тіла з незаповненою еліптичною в плані тріщиною встановлює залежність

$$p_c = \frac{K_{IC} E(k)}{\sqrt{\pi b}}, \quad (1)$$

де K_{IC} – граничне значення коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН) – характеристика тріщиностійкості матеріалу; $E(k)$ – повний еліптичний інтеграл другого роду; $k^2 = (a^2 - b^2)/a^2$.

Короточасну міцність тіла із заповненою тріщиною без врахування повзучості можна розрахувати за формулою [1]

$$p_c^i = \frac{K_{IC}(2\lambda\varepsilon(1-\nu^2) + E(k))}{\sqrt{\pi b}(1-\varepsilon)}, \quad (2)$$

де $\lambda = \frac{b}{c}$; $\varepsilon = \frac{E_1}{E}$; ν – коефіцієнт Пуассона основного матеріалу; E , E_1 – відповідно модулі Юнга матеріалу тіла і заповнювача.

Повзучість ін'єкційного матеріалу призводить до зменшення з часом міцності тіла. Для ін'єкційного матеріалу прийемо закон спадкової пружності у вигляді інтегральної залежності Вольтерри [3, 4]

$$\sigma_{zz}(x, y, t) = E_1 \left(\varepsilon_{zz}(x, y, t) + \int_0^t K(t - \tau) \varepsilon_{zz}(x, y, \tau) d\tau \right), \quad (3)$$

де $K(t)$ – ядро релаксації. Зв'язок напружень з деформаціями у вигляді залежності (3) часто приймають у реології полімерних матеріалів. Уявно виріжемо з тіла матеріал заповнювача, замінюючи його дію на поверхні утвореної порожнини V напруженнями

$$\sigma_{zz}(x, y, t) = \frac{E_1}{h(x, y)} \left(u_z(x, y, t) + \int_0^t K(t - \tau) u_z(x, y, \tau) d\tau \right), \quad (4)$$

$$\sigma_{xz}(x, y, t) = \sigma_{yz}(x, y, t) = 0,$$

де $h(x, y) = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$, $u_z(x, y, t)$ – компоненти вектора переміщення точок

поверхні V в напрямку осі Oz . Співвідношення (4) отримані на основі залежностей (3) і припущень про малу товщину включення ($c \ll a, b$) і є узагальненням моделі типу Вінклера для в'язкопружних матеріалів. Зносячи граничні умови з поверхні V на її серединну область $S: x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, отримуємо крайову задачу для простору з розрізом S , на якому граничні умови задані співвідношенням (4). Оскільки інерційними членами в рівняннях руху тіла, що виникають внаслідок повзучості матеріалу включення, можна знехтувати, то розв'язок задачі для кожного моменту часу t можна отримати в межах статичної теорії пружності.

Відомо (див. напр. [5]), що розв'язок крайової задачі для простору з плоским розрізом S , на якому задані нормальні зусилля, а дотичні рівні нулю, виражається через одну гармонічну функцію $\phi(x, y, z)$. Переміщення u_z і напруження σ_{zz} за допомогою функції ϕ знаходять за формулами

$$u_z(x, y, z) = -\frac{2(1 - \nu^2)}{E} \frac{\partial \phi}{\partial z},$$

$$\sigma_{zz}(x, y, z) = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}. \quad (5)$$

Шукаємо функцію ϕ у вигляді інтегрального подання Фур'є

$$\phi(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi, \eta) \exp\left(-|z| \sqrt{\xi^2 + \eta^2} + i(x\xi + y\eta)\right) \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}, \quad (6)$$

де $A(\xi, \eta)$ – невідома функція, яку, враховуючи симетрію задачі відносно площини $z = 0$, можна виразити через переміщення u_z берегів розрізу S :

$$A(\xi, \eta) = \frac{E}{8\pi^2(1 - \nu^2)} \iint_S u_z(x, y) \exp(-i(x\xi + y\eta)) dx dy. \quad (7)$$

Для гармонічної функції ϕ після деяких перетворень співвідношення (6), враховуючи рівняння (7), отримаємо:

$$\phi(x, y, z) = \frac{E}{4\pi(1-\nu^2)} \iint_S \frac{u_z(x, y) dx_1 dy_1}{\sqrt{z^2 + (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}}. \quad (8)$$

З граничної умови для нормальних напружень (4), враховуючи вирази (5), (8), одержимо інтегральне рівняння для визначення переміщень $u_z^* = u_z - \frac{p_c}{E} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ в області S :

$$\begin{aligned} \nabla_{xy}^2 \iint_S \frac{u_z^*(\xi, \eta, t) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = \frac{4\pi(1-\nu^2)}{E} \left\{ \frac{E_1}{h(x, y)} [u_z^*(x, y, t) + \right. \\ \left. + \int_0^t K(t-\tau) \cdot u_z^*(x, y, \tau) d\tau] + \frac{E_1 p}{E} \int_0^t K(t-\tau) d\tau + \frac{E_1 p}{E} - p \right\}. \quad (9) \end{aligned}$$

Розв'язок рівняння (9) шукаємо у вигляді

$$u_z^*(x, y, t) = \frac{f(t) p b}{E} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \quad (10)$$

де $f(t)$ – невідома функція часу.

Підставивши вираз (10) в інтегральне рівняння (9), після деяких перетворень одержимо рівняння Вольтерри для визначення функції $f(t)$:

$$\chi f(t) + \int_0^t K(t-\tau) f(\tau) d\tau + q(t) = 0, \quad (11)$$

де
$$\chi = \frac{E(k) + 2(1-\nu^2)\varepsilon\lambda}{2(1-\nu^2)\lambda\varepsilon}, \quad q(t) = \frac{1}{\lambda} \int_0^t K(t-\tau) d\tau + \frac{(\varepsilon-1)}{\varepsilon\lambda}.$$

Розв'язок інтегрального рівняння (11) для довільного ядра релаксації $K(t)$ знаходимо числово. Для деяких часткових випадків повзучості можна отримати аналітичний розв'язок рівняння Вольтерри, а відтак, і вихідної задачі.

Отримавши розв'язок рівняння (11), КІН на контурі заповненої еліптичної тріщини можна підрахувати за відомими переміщеннями її берегів [5]. В результаті отримаємо:

$$K_1(t) = \frac{p\sqrt{\pi b}(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{1/4}}{2(1-\nu^2)\sqrt{a}} f(t), \quad (12)$$

де φ – параметричні координати точок на еліпсі $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. На основі силового критерію Ірвіна ($K_1 = K_{IC}$) та співвідношення (12) встановлюємо граничне навантаження для тіла з тонкою еліпсоїдальною порожниною, заповненою в'язкопружним матеріалом:

$$p_c^{creep}(t) = \frac{2K_{IC}(1-\nu^2)}{\sqrt{\pi b} f(t)}. \quad (13)$$

Із виразу (13) та формули (2) випливає, що довготривала міцність тіла із еліптичною тріщиною, заповненою в'язкопружним ін'скційним матеріалом, пов'язана з короткочасною міцністю залежністю

$$p_c^{creep}(t) = p_c^i \frac{2(1-\nu^2)(1-\varepsilon)}{(E(k) + 2\lambda\varepsilon(1-\nu^2))f(t)}. \quad (14)$$

Із співвідношень (13), (14) випливає, що залежно від реологічних властивостей ін'єкційного матеріалу та часу довготривала міцність тіла із заповненою тріщиною може змінюватися від величини p_c^i (короткочасної міцності тіла із заповненою тріщиною) до p_c (міцність тіла з незаповненою тріщиною).

Для ефективного довготривалого відновлення міцності елемента конструкції з тріщиною ін'єкційні матеріали необхідно вибирати такими, щоб релаксація напружень в них проходила якомога повільніше і напруження в результаті не сягали низьких значень. За повної релаксації напружень у включенні (зменшенні їх до нуля) граничне навантаження для тіла з тріщиною, що заповнена таким матеріалом, не відрізнятиметься від граничного значення навантаження для незаповненої тріщини.

Як приклад розглянемо ін'єктування тріщини матеріалом, реологічні властивості якого відповідають матеріалу Кельвіна [4, 6]. Тоді ядро повзучості має вигляд

$$R(t - \tau) = \mu e^{-\beta(t-\tau)}, \quad \mu > 0, \quad \beta > 0,$$

де μ, β – реологічні характеристики матеріалу.

Використовуючи методику обернення ядер, знайдемо ядро релаксації

$$K(t - \tau) = -\mu e^{-(\mu+\beta)(t-\tau)}. \quad (15)$$

На основі перетворення Лапласа [7] зображення ядра $K(t)$ і функції $q(t)$ отримаємо у вигляді

$$\tilde{K}(s) = -\mu/(\mu + \beta + s), \quad q(s) = (b_1 \tilde{K}(s) + b_2)/s, \quad (16)$$

де $b_1 = -\frac{1}{\lambda}$, $b_2 = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon\lambda}$. Врахувавши вирази (16) і застосувавши до рівняння (11) перетворення Лапласа, знайдемо зображення функції $f(t)$:

$$\tilde{f}(s) = \frac{b_1}{s} + \frac{(b_2 - \chi b_1)(s + \mu + \beta)}{s[\chi(s + \mu + \beta) - \mu]}. \quad (17)$$

На основі формул знаходження оригіналів [7] із співвідношення (17) отримаємо функцію $f(t)$:

$$f(t) = b_1 + b_3 + \left\{ \frac{b_2}{\chi} - b_3 - b_2 \right\} \exp(-\lambda_1 t), \quad (18)$$

де $b_3 = (b_2 - \chi b_1)(\mu + \beta)/(\chi\lambda_1)$, $\lambda_1 = \mu + \beta - \mu/\chi$.

Явний вираз функції $f(t)$ дає змогу проаналізувати поведінку напружень у включенні для різних пружних і реологічних властивостей заповнювача, геометричних параметрів тріщини та характеристик пружного тіла.

Побудовано графіки (рис. 1), що характеризують зміну функції $f(t)$ для різних значень параметрів β, μ . Видно, що функція $f(t)$ для різних реологічних характеристик приймає з часом сталі ненульові значення.

Наведено (рис. 2) розподіл коефіцієнтів інтенсивності напружень по контуру еліптичної тріщини. Максимальні значення КІН спостерігають в точках контуру, що відповідають малим півосям еліпса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

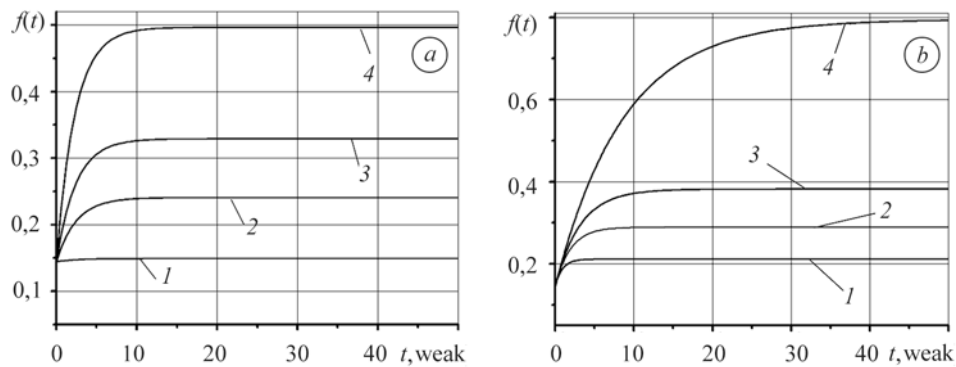


Рис. 1. Зміна з часом функції $f(t)$: $a - \beta = 0,4$: 1 - $\mu = 0,01$; 2 - 0,2; 3 - 0,4; 4 - 0,8;
 $b - \mu = 0,4$: 1 - $\beta = 1,1$; 2 - 0,5; 3 - 0,3; 4 - 0,1 ($\varepsilon = 0,25$; $\lambda = 20$; $a/b = 2,5$).

Fig. 1. Change in time of the function $f(t)$: $a - \beta = 0.4$: 1 - $\mu = 0.01$; 2 - 0.2; 3 - 0.4; 4 - 0.8;
 $b - \mu = 0.4$: 1 - $\beta = 1.1$; 2 - 0.5; 3 - 0.3; 4 - 0.1 ($\varepsilon = 0.25$; $\lambda = 20$; $a/b = 2.5$).

Рис. 2. Розподіл коефіцієнтів інтенсивності напружень по контуру заповненої еліптичної тріщини: $\varepsilon = 0,25$; $\lambda = 20$; $a/b = 2,5$.

Fig. 2. The stress intensity factors distribution along a contour of filled elliptical crack: $\varepsilon = 0.25$; $\lambda = 20$; $a/b = 2.5$.

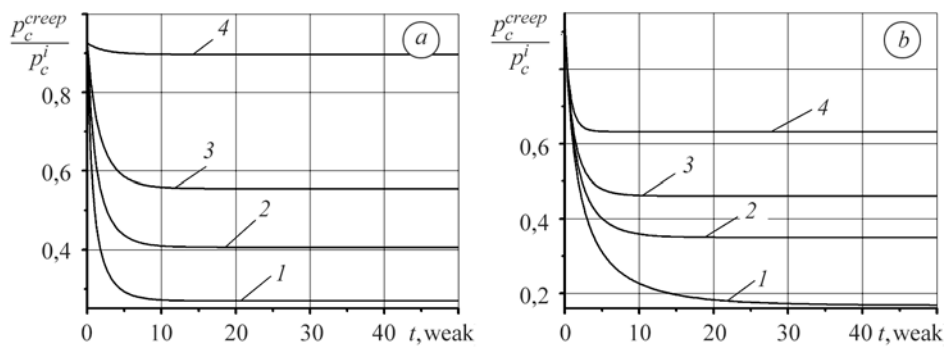
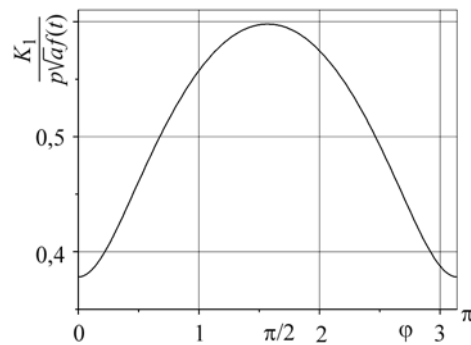


Рис. 3. Зміна в часі граничного навантаження для матеріалів заповнювача з різними реологічними характеристиками: $a - \beta = 0,4$: 1 - $\mu = 0,8$; 2 - 0,4; 3 - 0,2; 4 - 0,01;
 $b - \mu = 0,4$: 1 - $\beta = 0,1$; 2 - 0,3; 3 - 0,5; 4 - 1,1 ($\varepsilon = 0,25$; $\lambda = 20$; $a/b = 2,5$).

Fig. 3. Change in time of the stress limit for filler materials with different rheological characteristics: $a - \beta = 0.4$: 1 - $\mu = 0.8$; 2 - 0.4; 3 - 0.2; 4 - 0.01;
 $b - \mu = 0.4$: 1 - $\beta = 0.1$; 2 - 0.3; 3 - 0.5; 4 - 1.1 ($\varepsilon = 0.25$; $\lambda = 20$; $a/b = 2.5$).

Показано (рис. 3), як змінюється в часі міцність тіла із заповненою тріщиною для різних параметрів β і μ . Міцність тіла з часом стабілізується, що відображає характерну релаксацію напружень в матеріалі Кельвіна. Така особливість мате-

ріалів, реологічні характеристики яких відповідають властивостям тіл Кельвіна (релаксації напружень до скінченних значень), є важливим чинником під час вибору ін'єкційного матеріалу. Оптимальним вибором стосовно довготривалої міцності буде ін'єкційний матеріал з параметрами $\beta = 0,4$; $\mu = 0,01$ (рис. 3).

ВИСНОВКИ

Міцність тіла, що містить тріщиноподібну порожнину еліпсоїдальної форми, заповнену в'язкопружним матеріалом, суттєво залежить від реологічних властивостей матеріалу заповнювача. Здатність до повзучості однієї з фаз структурно неоднорідного матеріалу впливає на напружено-деформований та граничний стан у тілі, що перебуває під дією довготривалих статичних навантажень. Як показали числові розрахунки, міцність тіла в результаті релаксації напружень у включенні для деяких в'язкопружних матеріалів може зменшитися в декілька разів порівняно з початковою короткотривалою міцністю. Вибір матеріалу для "заліковування" тріщиноподібних дефектів стосовно довготривалої міцності буде оптимальний за мінімальної релаксації напружень у матеріалі наповнювача з часом. В цьому випадку довготривала міцність відновленого ін'єктуванням елемента конструкції буде мало відрізнятися від короткочасної.

РЕЗЮМЕ. Получено решение задачи о предельном состоянии упругого тела, содержащего эллиптическую трещину в плане, заполненную вязкоупругим материалом. Установлены параметры задачи, от которых зависит эффективность упрочнения тела после заполнения дефектов инъекционными материалами. Для заполнителя с реологическими свойствами материала Кельвина решение получено в замкнутом аналитическом виде.

SUMMARY. The solution of the problem of the limiting state of an elastic body containing an elliptical crack filled with visco-elastic material is obtained. Parameters of the problem which influence on the efficiency of hardening a body after filling of the defect by injection materials are determined. For the injection material with rheological properties of the Kelvin solid the solution is obtained in closed analytical form.

1. Маруха В. І., Панасюк В. В., Силованюк В. П. Механіка руйнування та міцність матеріалів: довідн. пос. / Під ред. В. В. Панасюка. Т. 12: Ін'єкційні технології відновлення роботоздатності пошкоджених споруд тривалої експлуатації. – Львів: Сполом, 2009. – 260 с.
2. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1968. – 248 с.
3. Каминський А. А. Разрушение вязкоупругих тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1990. – 312 с.
4. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
5. Панасюк В. В., Стадник М. М., Силованюк В. П. Концентрация напряжений в трехмерных телах с тонкими включениями. – К.: Наук. думка, 1986. – 216 с.
6. Кристенсен Р. М. Введение в теорию вязкоупругости. – М.: Мир, 1974. – 338 с.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы. – М.: Наука, 1974. – 832 с.

Одержано 18.08.2011