УДК 536.24

КРАЙОВА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО ШАРУ З ЧУЖОРІДНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

В. І. ГАВРИШ, А. І. КОСАЧ

Національний університет "Львівська політехніка"

За узагальненими функціями отримано рівняння теплопровідності з розривними та сингулярними коефіцієнтами для ізотропного кусково-однорідного шару з чужорідним включенням циліндричної форми, що виділяє тепло. Після кусково-лінійної апроксимації температури на межових поверхнях включення та інтегрального перетворення Ганкеля знайдено числово-аналітичний розв'язок крайової задачі теплопровідності з тепловіддачею. Виконано числовий аналіз для трьохелементного шару з включенням у середньому елементі.

Ключові слова: *ізотропний кусково-однорідний шар, теплопровідність, тепловіддача, чужорідне включення, конвективний теплообмін, ідеальний тепловий контакт, надлишкова температура.*

Нерівномірне нагрівання − один із факторів, що викликають деформації та напруження в пружних тілах. Якщо з підвищенням температури ніщо не перешкоджає розширенню тіла, то воно деформуватиметься і ніяких напружень не виникає. Однак, якщо в тілі температура зростає нерівномірно і воно неоднорідне, то внаслідок розширення формуються температурні напруження.

Сьогодні особливого значення набуває розробка композиційних матеріалів з поліпшеними фізико-механічними властивостями. Серед них важливу роль відіграють багатошарові (кусково-однорідні) плівкові структури, які широко використовують у конструюванні мікроелектронних пристроїв та інтегральних сенсорів для моніторингу температури та вологості в умовах високих теплових навантажень. Тут виникає низка складних інженерних проблем, для вирішення яких необхідно мати достовірну інформацію про тепловий і температурний стан їх окремих елементів та вузлів. Оскільки експериментальні дослідження пов'язані з високими температурами і достатньо складні, то отримати таку інформацію можна тільки розрахунковим шляхом, що у свою чергу потребує розв'язування складних крайових задач теплопровідності.

Деякі дослідження теплопровідності тіл одновимірної кусково-однорідної структури виконано раніше [1–4]. Розглянуто [5] плоскі задачі теплопровідності для кусково-однорідних тіл з тріщинами, які зведено до розв'язування сингулярних інтегральних рівнянь методом механічних квадратур.

Нижче сформульовано крайову осесиметричну задачу теплопровідності, побудовано аналітичний розв'язок і виконано числовий аналіз у частковому випадку для ізотропного кусково-однорідного шару з чужорідним включенням циліндричної форми, що виділяє тепло, і тепловіддачею. Отримано [6] наближений аналітичний розв'язок для ізотропного кусково-однорідного півпростору з таким включенням, розміри якого малі. Наведено [3, 4] загальні рівняння теплопровідності для кусково-однорідних тіл.

Контактна особа: В. І. ГАВРИШ, e-mail: ikni.pz@gmail.com

Формулювання задачі. Розглянемо ізотропний неоднорідний шар, який складається із n однорідних елементів, що відрізняються геометричними та теплофізичними параметрами, і віднесений до циліндричної системи координат (r, φ, z) з початком на одному з його країв. В j-му ($j = 2, 3, ..., n-1$) елементі шару міститься циліндричне включення з радіусом R та висотою, що дорівнює товщині цього елемента. На поверхнях спряження

$$S_r = \left\{(R, \varphi, z):\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ z_{j-1} \le z \le z_j\right\},$$

$$S_z = \left\{(r, \varphi, z_i) : r < \infty,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ \ i = 1, 2, ..., n-1\right\}$$

відбувається ідеальний тепловий контакт. В області $\Omega_0 = \{(r, \varphi, z) : r \le R,$ $0 \le \varphi \le 2\pi,\ z_{j-1} \le z < z_j\}$, що займає включення, діють рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла потужністю q_0. На межових поверхнях шару $\Gamma_1 = \left\{(r, \varphi, 0) : r < \infty, 0 \le \varphi \le 2\pi\right\}$, $\Gamma_n = \left\{(r, \varphi, z_n) : r < \infty, 0 \le \varphi \le 2\pi\right\}$ задано конвективний теплообмін з довкіллям зі сталою температурою t_c.

Побудова вихідного рівняння теплопровідності. Розподіл осесиметричного стаціонарного температурного поля $t(r, z)$ у розглядуваній системі можна отримати, розв'язавши рівняння теплопровідності [3, 4]

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r \cdot \lambda(r, z)\frac{\partial \theta}{\partial r}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda(r, z)\frac{\partial \theta}{\partial z}\right] = -q_0 \cdot S_-(R - r) \cdot N(z) \tag{1}$$

з крайовими умовами

$$\lambda_1 \left.\frac{\partial \theta}{\partial z}\right|_{z=0} = \alpha_0\, \theta\big|_{z=0},\ \lambda_n \left.\frac{\partial \theta}{\partial z}\right|_{z=z_n} = -\alpha_n\, \theta\big|_{z=z_n},\quad \theta\big|_{r\to\infty} = 0,\ \left.\frac{\partial \theta}{\partial r}\right|_{r\to\infty} = 0, \tag{2}$$

де

$$\lambda(r, z) = \lambda_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_{i+1} - \lambda_i) \cdot S_-(z - z_i) + (\lambda_0 - \lambda_j) \cdot S_-(R - r) \cdot N(z) \tag{3}$$

– коефіцієнт теплопровідності неоднорідного шару; λ_i, λ_0 – коефіцієнти теплопровідності матеріалів i-го шару та включення відповідно; α_0, α_n – коефіцієнти тепловіддачі з межових поверхонь Γ_0 та Γ_n; $\theta = t - t_c$; $N(z) = S_-(z - z_{j-1}) - S_-(z - z_j)$; $S_\pm(\zeta)$ – асиметричні одиничні функції [7].

Введемо функцію [8]

$$T = \lambda(r, z) \cdot \theta \tag{4}$$

і продиференціюємо її за змінними r та z, враховуючи опис коефіцієнта теплопровідності $\lambda(r, z)$ (3). У результаті отримаємо:

$$\lambda(r, z)\frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial r} + (\lambda_0 - \lambda_j) \cdot \theta\big|_{r=R} \cdot N(z) \cdot \delta_+(r - R), \quad \lambda(r, z)\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial z} - \tag{5}$$

$$-\sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_{i+1} - \lambda_i) \cdot \theta\big|_{z=z_i} \cdot \delta_-(z - z_i) + (\lambda_0 - \lambda_j)\left[\theta\big|_{z=z_j} \cdot \delta_-(z - z_i) - \theta\big|_{z=z_{j-1}} \cdot \delta_-(z - z_{j-1})\right] \cdot S_-(R - r).$$

Тут $\delta_\pm(\zeta) = \dfrac{dS_\pm(\zeta)}{d\zeta}$ – асиметричні дельта-функції Дірака [8].

Підставивши вирази (5) у співвідношення (1), приходимо до диференційного рівняння з частинними похідними із розривними та сингулярними коефіцієнтами:

$$\Delta T=\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_{i+1}-\lambda_i)\theta(r,z_i)\delta'_-(z-z_i)-(\lambda_0-\lambda_j)\left\{\frac{r}{R}\ \theta(R,z)N(z)\delta'_-(r-R)+\right.$$

$$\left.+\left[\theta(r,z_j)\delta'_-(z-z_j)-\theta(r,z_{j-1})\delta'_-(z-z_{j-1})\right]S_-(R-r)\right\}-q_0\cdot S_-(R-r)\cdot N(z),\quad (6)$$

де $\Delta=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа в циліндричній системі координат.

Побудова числово-аналітичного розв'язку. Апроксимуємо функції $\theta(R,z)$, $\theta(r,z_j)$, $\theta(r,z_{j-1})$ у вигляді [7]

$$\theta(R,z)=\theta_1^{(R)}+\sum_{k=1}^{m-1}(\theta_{k+1}^{(R)}-\theta_k^{(R)})\cdot S_-(z-z_k^*),\theta(r,z_j)=\theta_1^{(z_j)}+\sum_{s=1}^{t-1}(\theta_{s+1}^{(z_j)}-\theta_s^{(z_j)})\cdot S_-(r-r_s),$$

$$\theta(r,z_{j-1})=\theta_1^{(z_{j-1})}+\sum_{l=1}^{p-1}(\theta_{l+1}^{(z_{j-1})}-\theta_l^{(z_{j-1})})\cdot S_-(r-r_l),\quad (7)$$

де $z_k^*\in\left]z_{j-1};z_j\right[$; $z_1^*\le z_2^*\le\ldots\le z_{m-1}^*$; $r_l\in\left]0;R\right[$; $r_1\le r_2\le\ldots\le r_{p-1}$; $r_s\in\left]0;R\right[$; $r_1\le r_2\le\ldots\le r_{t-1}$; $\theta_k^{(R)}$, $\theta_s^{(z_j)}$, $\theta_l^{(z_{j-1})}$ – невідомі апроксимаційні значення температури.

Підставивши вирази (7) у рівняння (6), отримаємо:

$$\Delta T=\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_{i+1}-\lambda_i)\theta\ (r,z_i)\delta'_-(z-z_i)-$$

$$-(\lambda_0-\lambda_j)\left\{\frac{r}{R}\ \delta'_-(r-R)\cdot\left[\theta\ _1^{(R)}N(z)+\sum_{k=1}^{m-1}\left(\theta\ _{k+1}^{(R)}-\theta_k^{(R)}\right)N(z,z_k^*)\right]+\right.$$

$$+\left[\theta_1^{(z_j)}S_-(R-r)+\sum_{s=1}^{t-1}\left(\theta_{s+1}^{(z_j)}-\theta_s^{(z_j)}\right)M\ (r,r_s)\right]\delta'_-(z-z_j)-$$

$$\left.-\left[\theta\ _1^{(z_{j-1})}S_-(R-r)+\sum_{l=1}^{p-1}(\theta_{l+1}^{(z_{j-1})}-\theta_l^{(z_{j-1})})M\ (r,r_l)\right]\cdot\delta'_-(z-z_{j-1})\right\}-$$

$$-q_0S_-(R-r)N(z).\quad (8)$$

Тут $N(z,z_k^*)=S_-(z-z_k^*)-S_-(z-z_j)$; $M(r,r_\alpha)=S_-(r-r_l)-S_+(r-R),\alpha=s,l.$

Застосувавши інтегральне перетворення Ганкеля за координатою r до рівняння (8) та крайових умов (2) із урахуванням співвідношення (4), приходимо до звичайного диференційного рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^2\overline{T}}{dz^2}-\xi^2\overline{T}=\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_{i+1}-\lambda_i)\overline{\theta}(\xi,z_i)\delta'_-(z-z_i)-$$

$$-(\lambda_0-\lambda_j)\left\{R\xi I_1(R\xi)\cdot\left[\theta_1^{(R)}N(z)+\sum_{k=1}^{m-1}(\theta_{k+1}^{(R)}-\theta_k^{(R)})N(z,z_k^*)\right]+\right.\quad (9)$$

$$\left.+\frac{1}{\xi}\left[R_1(\xi)\delta'_-(z-z_j)-R_2(\xi)\delta'_-(z-z_{j-1})\right]\right\}-\frac{Rq_0}{\xi}I_1(R\xi)N(z)$$

і крайових умов

$$\left.\frac{d\overline{T}}{dz}\right|_{z=0}=\frac{\alpha_0}{\lambda_1}\overline{T}\Big|_{z=0},\quad \left.\frac{d\overline{T}}{dz}\right|_{z=z_n}=-\frac{\alpha_n}{\lambda_n}\cdot\overline{T}\Big|_{z=z_n},\quad (10)$$

де $\overline{T} = \int\limits_0^\infty r \cdot I_0(r\xi) T dr$ – трансформанта функції $T(r,z)$; ξ – параметр інтегрального перетворення Ганкеля; $I_\nu(\zeta)$ – функція Бесселя першого роду ν-го порядку; $R_1(\xi) = RI_1(R\xi)\theta_1^{(z_j)} + \sum\limits_{s=1}^{t-1}(\theta_{s+1}^{(z_j)} - \theta_s^{(z_j)}) \cdot [RI_1(R\xi) - r_s I_1(r_s\xi)]$; $R_2(\xi) = RI_1(R\xi)\theta_1^{(z_{j-1})} + \sum\limits_{l=1}^{p-1}(\theta_{l+1}^{(z_{j-1})} - \theta_l^{(z_{j-1})}) \cdot [RI_1(R\xi) - r_l I_1(r_l\xi)]$.

Розв'язавши крайову задачу (9), (10) та здійснивши обернене інтегральне перетворення Ганкеля, після деяких спрощень отримаємо:

$$T(r,z) = (\lambda_0 - \lambda_j)\Bigg\{R\Bigg[\theta_1^{(R)} T_1(r,z) + \sum_{k=1}^{m-1}\Big(\theta_{k+1}^{(R)} - \theta_k^{(R)}\Big) T_1(r,z,z_k^*) + \\ + \theta_1^{(z_j)} T_2(r,z) - \theta_1^{(z_{j-1})} T_3(r,z)\Bigg] + \sum_{s=1}^{t-1}\Big(\theta_{s+1}^{(z_j)} - \theta_s^{(z_j)}\Big) T_2(r,z,r_s) - \\ - \sum_{l=1}^{p-1}\Big(\theta_{l+1}^{(z_{j-1})} - \theta_l^{(z_{j-1})}\Big) T_3(r,z,r_l)\Bigg\} - Rq_0 T_4(r,z), \tag{11}$$

де

$$T_i(r,z) = \int_0^\infty I_1(R\xi) I_0(r\xi) \Phi_i^*(\xi,z) d\xi, \quad i = \overline{1,4};$$

$$T_1(r,z,z_k^*) = \int_0^\infty I_1(R\xi) I_0(r\xi) \Phi^*(\xi,z,z_k^*) d\xi;$$

$$T_\gamma(r,z,r_\alpha) = \int_0^\infty [RI_1(R\xi) - r_\alpha I_1(r_\alpha\xi)] \cdot I_0(r\xi) \Phi_j^*(\xi,z) d\xi, \quad \gamma = 2,3; \quad \alpha = s,l;$$

$$\Phi_l^*(\xi,z) = \Phi_l(\xi)\alpha(\xi,z) - F_l(\xi,z) - \sum_{i=j}^{n-1}(\lambda_{i+1} - \lambda_i)\varphi_i^{(l)}(\xi) F_1(\xi,z,z_i), \quad l = 1,2;$$

$$\Phi_3^*(\xi,z) = \Phi_3(\xi)\alpha(\xi,z) - F_3(\xi,z) - \sum_{i=j-1}^{n-1}(\lambda_{i+1} - \lambda_i)\varphi_i^{(3)}(\xi) F_1(\xi,z,z_i);$$

$$\Phi_4^*(\xi,z) = \xi \cdot \Phi_1(\xi)\alpha(\xi,z) - F_1(\xi,z) - \sum_{i=j}^{n-1}(\lambda_{i+1} - \lambda_i)\varphi_i^{(1)}(\xi) F_1(\xi,z,z_i);$$

$$\Phi^*(\xi,z,z_k^*) = \Phi^*(\xi,z_k^*)\alpha(\xi,z) - F_2(\xi,z,z_k^*) - \sum_{i=j}^{n-1}(\lambda_{i+1} - \lambda_i)\varphi_i(\xi,z_k^*) F_1(\xi,z,z_i);$$

$$\alpha(\xi,z) = \frac{1}{\Delta_*}\left\{\alpha^- e^{\xi z} + \alpha^+ e^{-\xi z} + \sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_{i+1} - \lambda_i)\Big[(\alpha^- F_i^+(\xi) + \alpha^+ F_i^-(\xi))\Big] F_1(\xi,z,z_i)\right\};$$

$$F_1^\pm(\xi) = \frac{e^{\pm\xi z_1}}{\lambda_1}; \; F_j^\pm(\xi) = \left[e^{\pm\xi z_j} + \sum_{i=1}^{j-1}(\lambda_{i+1} - \lambda_i)\operatorname{ch}\xi(z_j - z_i) \cdot F_i^\pm(\xi)\right] / \lambda_j, \, j = 2,3,\ldots,n-1;$$

$$\varphi_i^{(k)}(\xi) \equiv 0; \; i = 1,2,\ldots,j-1, \; k = 1,2; \quad \varphi_i^{(3)}(\xi) \equiv 0, \; i = 1,2,\ldots,j-2;$$

$$\varphi_i(\xi,z_k^*) \equiv 0, i = 1,2,\ldots,j-1;$$

$$\varphi_j^{(1)}(\xi)=\frac{1}{\lambda_j}\left[\operatorname{ch}\xi(z_j-z_{j-1})-1\right];\ \ \varphi_l^{(1)}(\xi)=\frac{1}{\lambda_l}\left[\operatorname{ch}\xi(z_l-z_{j-1})-\operatorname{ch}\xi(z_l-z_j)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=j}^{l-1}(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\operatorname{ch}\xi(z_l-z_k^*)\varphi_k^{(1)}(\xi)\right],\ \ l=j+1,j+2...,n-1;\ \ \varphi_j^{(2)}(\xi)=\frac{1}{\lambda_j};$$

$$\varphi_l^{(2)}(\xi)=\frac{1}{\lambda_l}\left[\operatorname{ch}\xi(z_l-z_j)+\sum_{k=j}^{l-1}(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\operatorname{ch}\xi(z_l-z_k^*)\varphi_k^{(2)}(\xi)\right],\ l=j+1,j+2...,n-1;$$

$$\varphi_{j-1}^{(3)}(\xi)=\frac{1}{\lambda_{j-1}};$$

$$\varphi_l^{(3)}(\xi)=\frac{1}{\lambda_l}\left[\operatorname{ch}\xi(z_l-z_{j-1})+\sum_{k=j-1}^{l-1}(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\operatorname{ch}\xi(z_l-z_k^*)\varphi_k^{(3)}(\xi)\right],\ \ l=j,j+1...,n-1;$$

$$\varphi_j(\xi,z_k^*)=\frac{1}{\lambda_j}\left[\operatorname{ch}(\xi(z_j-z_k^*))-1\right];\ \ \varphi_l(\xi,z_k^*)=\frac{1}{\lambda_j}\left[\operatorname{ch}\xi(z_l-z_k^*)-\operatorname{ch}\xi(z_l-z_j)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=j}^{l-1}(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\operatorname{ch}\xi(z_l-z_k^*)\varphi_k(\xi,z_k^*),\ \ l=j+1,j+2,...,n-1;\right.$$

$$F_1(\xi,z,z_i)=\operatorname{ch}\xi(z-z_i)\cdot S_-(z-z_i);$$

$$F_2(\xi,z,z_k^*)=\operatorname{ch}\xi(z-z_k^*)\cdot S_-(z-z_k^*)-\operatorname{ch}\xi(z-z_j)\cdot S_-(z-z_j)-N(z,z_k^*);$$

$$F_1(\xi,z)=\operatorname{ch}\xi(z-z_{j-1})\cdot S_-(z-z_{j-1})-\operatorname{ch}\xi(z-z_{j-1})\cdot S_-(z-z_j)-N(z);$$

$$F_2(\xi,z)=\operatorname{ch}\xi(z-z_j)\cdot S_-(z-z_j);\quad F_3(\xi,z)=\operatorname{ch}\xi(z-z_{j-1})\cdot S_-(z-z_{j-1});$$

$$\alpha^{\pm}=\xi\lambda_1\pm\alpha_0;\quad f(\xi,z_i)=\xi\operatorname{sh}\xi(z_n-z_i)+\frac{\alpha_n}{\lambda_n}\operatorname{ch}\xi(z_n-z_i);$$

$$\Delta_*=\alpha^-\left[e^{\xi z_n}(\xi+\frac{\alpha_n}{\lambda_n})+\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_{i+1}-\lambda_i)F_i^+(\xi)f(\xi,z_i)\right]-$$

$$-\alpha^+\left[e^{-\xi z_n}(\xi-\frac{\alpha_n}{\lambda_n})-\sum_{i=1}^{n-1}(\lambda_{i+1}-\lambda_i)F_i^-(\xi)f(\xi,z_i)\right];$$

$$\Phi_1(\xi)=f(\xi,z_{j-1})-f(\xi,z_j)+\sum_{i=j}^{n-1}(\lambda_{i+1}-\lambda_i)\varphi_i^{(1)}(\xi)f(\xi,z_i);$$

$$\Phi_2(\xi)=f(\xi,z_j)+\sum_{i=j}^{n-1}(\lambda_{i+1}-\lambda_i)\varphi_i^{(2)}(\xi)f(\xi,z_i);$$

$$\Phi_3(\xi)=f(\xi,z_{j-1})+\sum_{i=j-1}^{n-1}(\lambda_{i+1}-\lambda_i)\varphi_i^{(3)}(\xi)f(\xi,z_i);$$

$$\Phi(\xi,z_k^*)=f(\xi,z_k^*)-f(\xi,z_j)+\sum_{i=j}^{n-1}(\lambda_{i+1}-\lambda_i)\varphi_i(\xi,z_k^*)f(\xi,z_i).$$

Невідомі апроксимаційні значення температури $\theta_k^{(R)},\theta_s^{(z_j)},\theta_l^{(z_{j-1})}$ знаходимо, розв’язавши систему $m+p+t$ лінійних алгебричних рівнянь, отриману з виразу (11).

Отже, шукане температурне поле в кусково-однорідному шарі з включенням циліндричної форми описує формула (11), з якої дістаємо значення температури в довільній точці кусково-однорідного шару (в його чужорідних елементах, в області включення та на поверхнях спряження різнорідних елементів).

Частковий приклад та аналіз числових результатів. Як приклад розглянемо шар, який складається з трьох елементів із чужорідним включенням, що виділяє тепло, у середньому елементі (n = 3, j = 2).

Виконано числовий аналіз безрозмірної надлишкової температури $T^* = T/(q_0R^2)$ для таких вихідних даних: матеріали елементів шару – перший елемент – нікель (λ_1 = 92 W/(m·K)), другий – кераміка ВК94–І (λ_2 = 13,4 W/(m·K)), третій – кремній (λ_3 = 67 W/(m·K)), матеріал включення – срібло (λ_0 = 419 W/(m·K)), m = 10 – кількість розбиттів інтервалу $]z_2;z_3[$; $t = p$ = 5 – кількість розбиттів інтервалу $]0;R[$.

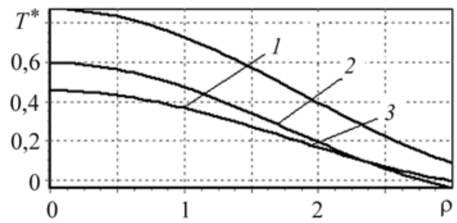

Рис. 1. Залежність надлишкової безрозмірної температури T^* від безрозмірної координати ρ: *1* – Z = 0; *2* – 5; *3* – 2.

Fig. 1. Dimensionless excess temperature ,T,* dependence on dimensionless coordinate ρ: *1* – Z = 0; *2* – 5; *3* – 2.

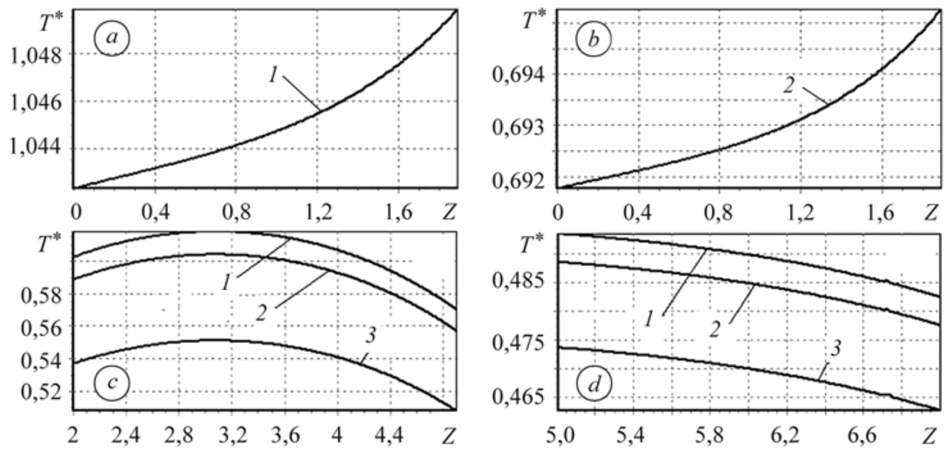

Рис. 2. Залежність надлишкової безрозмірної температури T^* від безрозмірної координати Z: *1* – ρ = 0; *2* – 1; *3* – 3.

Fig. 2. Dimensionless excess temperature, T^*, dependence on dimensionless coordinate Z: *1* – ρ = 0; *2* – 1; *3* – 3.

Рис. 1 ілюструє зміну температури T^* залежно від радіальної $\rho = r/R$, рис. 2 – від аксіальної $Z = z/R$ координат для значень критерію Біо $\mathrm{Bi}_0 = \alpha_0 R/\lambda_1 = 6$ і $\mathrm{Bi}_3 = \alpha_3 R/\lambda_3 = 8$. На межових поверхнях першого Z = 0 та другого Z = 5 елементів шару для ρ ≥ 2,5 та на межовій поверхні першого елемента Z = 2 для ρ ≥ 2,75 температура практично дорівнює температурі середовища (рис. 1). Температура T^* суттєво відрізняється для різних значень ρ (рис. 2*a* і *c* – для першого елемента шару, рис. 2*b* – для другого і 2*d* – для третього).

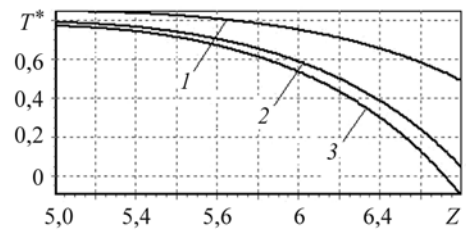

Рис. 3. Залежність надлишкової безрозмірної температури T^* від безрозмірної координати Z для ρ = 0: *1* – Bi_3 = 0,8; *2* – 5,4; *3* – 14,2.

Fig. 3. Dimensionless excess temperature, T^*, dependence on dimensionless coordinate Z for ρ = 0: *1* – Bi_3 = 0.8; *2* – 5.4; *3* – 14.2.

Побудовано (рис. 3) залежність температури T^* від координати Z для різних значень критерію Bi_3, коли $\mathrm{Bi}_0 = 6$. Як бачимо, тепловіддача впливає на розподіл температури для вказаних даних тільки в третьому елементі шару, причому зі збільшенням критерію Bi_3 вона падає із наближенням до межової поверхні шару $Z = 7$.

ВИСНОВКИ

Запропонована методика знаходження температури в кусково-однорідному шарі з чужорідним включенням і тепловіддачею дає можливість ефективно досліджувати температурні режими в окремих елементах та вузлах мікроелектронних пристроїв, що необхідно для їх теплового проектування, підвищення термотривкості та продовження терміну експлуатації. Проаналізовано числові результати, отримані на основі розробленого алгоритму та програмних засобів, і встановлено, що для вказаних матеріалів елементів кусково-однорідного шару та включення і геометричних параметрів тепловіддача впливає на розподіл температурного поля тільки в третьому елементі шару, причому на межових поверхнях першого $Z = 0$ та другого $Z = 5$ елементів шару для $\rho \geq 2{,}5$ та на граничній поверхні першого елемента $Z = 2$ шару для $\rho \geq 2{,}75$ температура практично дорівнює температурі середовища.

РЕЗЮМЕ. С использованием обобщенных функций получено уравнение теплопроводности с разрывными и сингулярными коэффициентами для изотропного кусочно-однородного слоя с инородным тепловыделяющим включением цилиндрической формы. С помощью кусочно-линейной аппроксимации температуры на граничных поверхностях включения и интегрального преобразования Ханкеля построено численно-аналитическое решение граничной задачи теплопроводности с теплоотдачей. Выполнен численный анализ для трехслойной системы с инородным включением во втором слое.

SUMMARY. According to the generalized functions the heat conductivity equation with discontinuous and singular coefficients for a piecewise homogeneous isotropic layer with a foreign cylindrical heat-releasing inclusion has been obtained. By implementing a piecewise linear approximation of the temperature on the inclusion boundary surfaces and applying the Hankel integral transform the numerically-analytical solution of the boundary heat conduction problem with heat dissipation has been constructed. The numerical analysis for the thee-element layer system with the inclusion in the second element has been carried out.

1. *Мотовиловец И. А.* Теплопроводность пластин и тел вращения. – К.: Наук. думка, 1969. – 144 с.
2. *Беляев Н. В., Рядно А. А.* Методы теории теплопроводности. Ч. I. – М.: Высш. шк., 1982. – 327 с.
3. *Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М.* Термоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984. – 368 с.
4. *Коляно Ю. М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.
5. *Саврук М. П., Зеленяк В. М.* Двовимірні задачі термопружності для кусково-однорідних тіл з тріщинами. – Львів: Растр-7, 2009. – 212 с.
6. *Температурное* поле в многослойном полупространстве с инородным тепловыделяющим цилиндрическим включением / Ю. М. Коляно, Ю. М. Кричевец, Е. Г. Иваник, В. И. Гаврыш // Промышленная теплотехника. – 1994. – **16**, № 4−6. – С. 30−34.
7. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. − М.: Наука, 1977. – 720 с.
8. *Гавриш В. І., Федасюк Д. В., Косач А. І.* Гранична задача теплопровідності для шару з чужорідним циліндричним включенням // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – **46**, № 5. – С. 115−120.

   (*Havrysh V. I., Fedasyuk D. V., and Kosach A. I.* Boundary-Value Problem of Heat Conduction for a Layer with Foreign Cylindrical Inclusion // Materials Science. – 2010. – **46**, № 5. – P. 702–708.)

Одержано 22.11.2010