

УДК 393.375

## КРУГОВА МІЖФАЗНА ТРІЩИНА В НЕОДНОРІДНОМУ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОМУ ПРОСТОРИ

О. Ф. КРИВИЙ

Одеська національна морська академія

Розв'язано в явному вигляді задачу про кругову міжфазну тріщину в кусково-однорідному трансверсально-ізотропному просторі під час довільного навантаження берегів тріщини. Отримано вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень на межі тріщини, а також значення вказаних коефіцієнтів для деяких поєднань трансверсально-ізотропних матеріалів.

**Ключові слова:** *кругова міжфазна тріщина, неоднорідний трансверсально-ізотропний простір, сингулярні інтегральні рівняння, коефіцієнт інтенсивності напружень.*

Задачі про міжфазні тріщини в кусково-однорідних середовищах розглядали багато авторів. При цьому дослідження, в основному, обмежувались або двовимірними анізотропними середовищами, наприклад [1, 2], або кусково-однорідними ізотропними просторами та осесиметричними задачами для трансверсально-ізотропних просторів [3–10]. Але стосовно, наприклад, кусково-однорідних анізотропних просторів і в тому числі неосесиметричної задачі для кусково-однорідних трансверсально-ізотропних середовищ, відомі лише числово-аналітичні результати [11–16], які базуються на працях [17, 18] і містять, в основному, наближені значення коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН). Для приведення задач про дефекти до систем сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) побудовано [6, 19] розривний розв'язок для кусково-однорідного ізотропного та однорідного трансверсально-ізотропного просторів, відповідно.

Нижче розглянуто в сингулярній поставі задачу про міжфазну тріщину в кусково-однорідному трансверсально-ізотропному просторі за будь-якого навантаження берегів. Задача за допомогою розривного розв'язку [20], зведена до двовимірної системи СІР, яку розв'язували в явному вигляді, що дало змогу дослідити розкриття тріщини і отримати розподіл напруження в околі тріщини та вирази для КІН.

**Постава та система СІР задачі.** Нехай в площині з'єднання двох різних трансверсально-ізотропних півпросторів  $z = 0$  розташована тріщина, яка займає область  $\Omega$ . До берегів тріщини прикладене довільне навантаження

$$w_k(x, y, \pm 0) = f_k^\pm(x, y), k = \overline{1, 3}; (x, y) \in \Omega;$$

$$\mathbf{w} = \{w_k(x, y, z)\}_{k=\overline{1, 6}} = \{\sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, u, v, w\}. \quad (1)$$

Використавши двовимірні сингулярні інтегральні співвідношення для кусково-однорідного трансверсально-ізотропного простору [20], відносно невідомих стрибків переміщень  $\chi_k^-(x, y)$  ( $k = \overline{4, 6}$ ),  $(\chi_k^\pm = \langle \chi_k(x, y) \rangle^\pm = w_k(x, y, +0) \pm w_k(x, y, -0), (x, y) \in \Omega;)$  запишемо таку систему двовимірних СІР:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{13} \sum_{j=4}^5 \partial_{j-3} \chi_j^-(x, y) - \frac{q_{14}}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{\chi_6^-(t, \tau)}{r_0^3} dt d\tau = g_1(x, y), \\ q_{24} \partial_2 \chi_6^- + \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \{q_{23} \chi_4^- \partial_{12}^2 \frac{1}{r_0} + [q_{23} \frac{1}{r_0^3} + \tilde{q}_{12} \partial_1^2 \frac{1}{r_0}] \chi_5^-\} dt d\tau = g_2(x, y), \\ q_{24} \partial_1 \chi_6^- + \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \{q_{23} \chi_5^- \partial_{12}^2 \frac{1}{r_0} + [q_{23} \frac{1}{r_0^3} + \tilde{q}_{23} \partial_2^2 \frac{1}{r_0}] \chi_4^-\} dt d\tau = g_3(x, y), \end{array} \right. \quad (2)$$

де  $g_1 = \chi_1^+ - q_{11} \chi_1^- + \frac{q_{12}}{2\pi} \iint_{\Omega} [\chi_2^- \partial_2 \frac{1}{r_0} + \chi_3^- \partial_1 \frac{1}{r_0}] dt d\tau$ ,  $\chi_k^{\pm}(x, y) = f_k^{\pm} \pm f_k^{-}$ ,  $k = \overline{1, 3}$ ;

$$g_2 = q_{22}^+ \chi_2^- - \chi_2^+ + \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \{q_{21} \chi_1^- \partial_2 \frac{1}{r_0} + \chi_3^- q_{22}^- \partial_1 \frac{y-\tau}{r_0^2} - \chi_2^- [q_{22} \partial_1 \frac{x-t}{r_0^2} + \tilde{q}_{11} \partial_2 \frac{y-\tau}{r_0^2}]\} dt d\tau;$$

$$g_3 = q_{22}^+ \chi_3^- - \chi_3^+ + \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \{q_{21} \chi_1^- \partial_2 \frac{1}{r_0} + \chi_2^- q_{22}^- \partial_1 \frac{y-\tau}{r_0^2} - \chi_3^- [q_{22} \partial_2 \frac{y-\tau}{r_0^2} + \tilde{q}_{11} \partial_1 \frac{x-t}{r_0^2}]\} dt d\tau;$$

$r_0 = \sqrt{(x-t)^2 + (y-\tau)^2}$ ;  $\partial_1 \equiv \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\partial_2 \equiv \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $\partial_3 \equiv \frac{\partial}{\partial z}$ ;  $q_{kn}, q_{kn}^{\pm}, \tilde{q}_{kn}$  – сталі, які вира-

жають через коефіцієнти узагальненого закону Гука [21], наведені в праці [20]. Розв'язки системи (2) повинні задовольняти умови змикання берегів тріщини

$$\iint_L \partial_l \chi_k(x, y) dl = 0, k = \overline{4, 6}, \quad (3)$$

де  $\partial_l$  – похідна по дотичній до межі  $L$  області  $\Omega$ .

**Розв'язок задачі для кругової тріщини.** Нехай тріщина є круг в площині  $z = 0$  з центром на початку координат:  $\Omega = \{\sqrt{x^2 + y^2} \leq a\}$ . Перейдемо в рівняннях (2) до циліндричної системи координат  $(\rho, \varphi, z)$  і введемо нові функції:

$$v_1^{\pm}(\rho, \varphi) = \xi_1^{\pm}, v_2^{\pm}(\rho, \varphi) = \tilde{\tau}^{\pm}, v_3^{\pm}(\rho, \varphi) = \tilde{u}^{\pm}, v_4^{\pm}(\rho, \varphi) = \xi_6^{\pm}, \quad (4)$$

$$\tilde{\tau}^{\pm} = \xi_3^{\pm} + i \xi_2^{\pm}, \tilde{u}^{\pm} = \xi_4^{\pm} + i \xi_5^{\pm},$$

$$\{\xi_k^{\pm}(\rho, \varphi)\}_{k=\overline{1,6}} = \{\langle \sigma_z \rangle^{\pm}, \langle \tau_{z\varphi} \rangle^{\pm}, \langle \tau_{z\rho} \rangle^{\pm}, \langle u_{\rho} \rangle^{\pm}, \langle u_{\varphi} \rangle^{\pm}, \langle w \rangle^{\pm}\}.$$

Невідомі стрибки переміщень на тріщині розшукуємо у вигляді

$$v_k^{\pm}(\rho, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_{k,n}^{\pm}(\rho) e^{in\varphi},$$

$$V_{k,n}^{\pm}(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_k^{\pm}(\rho, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi, \quad k = \overline{1, 2}. \quad (5)$$

Застосувавши до системи (2) скінченне перетворення Фур'є, після очевидних перетворень, знайдемо:

$$\left\{ \begin{array}{l} -a_1 W_{n+1,n} [U_{4n}^-] + b_1 W_{n+1,n+1} [U_{6n}^-] = Q_{1n}, \\ b_2 W_{n,n} [U_{4n}^-] - a_2 W_{n,n+1} [U_{6n}^-] = Q_{2n}, \\ b_3 W_{n,n} [U_{5n}^-] = Q_{3n}, \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\text{де } W_{kn}[f] = \int_0^a f(\varsigma, \psi) W_{kn}^*(\rho, \varsigma) \varsigma d\varsigma, \quad W_{kn}^*(\rho, \varsigma) = \int_0^{\infty} J_k(t\rho) J_n(t\varsigma) dt;$$

$$a_1 = q_{13}, a_2 = q_{24}, b_1 = q_{14}, b_2 = q_{23}, b_3 = \tilde{q}_{12}, U_{jn}^\pm = \frac{1}{2}(V_n^{2,\pm} + (-1)^j \bar{V}_{-n}^{2,\pm}), \quad j = 2, 3;$$

$$U_{1n}^\pm = V_n^{1,\pm}, \quad Q_{1n} = W_{n+1,n}[U_{1n}^+ - q_{11}U_{1n}^-] - \frac{q_{12}}{2}\{W_{n+1,n+1}[V_n^{2,-}] - W_{n+1,n-1}[\bar{V}_{-n}^{2,-}]\},$$

$$Q_{2n} = q_{21}W_{n,n}[U_{1n}^-] - \frac{1}{2}W_{n,n+1}[q_{22}V_n^{2,-} - V_n^{2,+}] + \frac{1}{2}W_{n,n-1}[q_{22}\bar{V}_{-n}^{2,-} - \bar{V}_{-n}^{2,+}] - \frac{1}{2}(c_n \rho^n + \bar{c}_0 \delta_{n0}),$$

$$Q_{3n} = -W_{n,n+1}[\tilde{q}_{11}V_n^{2,-} - V_n^{2,+}] - W_{n,n-1}[\tilde{q}_{11}\bar{V}_{-n}^{2,-} - \bar{V}_{-n}^{2,+}] - \frac{1}{2}(c_n \rho^n - \bar{c}_0 \delta_{n0}).$$

Сталі  $c_n, c_0$  визначають з умов

$$\int_0^a \rho^{n+1} \tilde{V}_n^{3,-}(\rho) d\rho = 0, \quad n = \overline{0, \infty}, \quad \int_0^a \rho \tilde{V}_0^{3,-} d\rho = 0. \quad (7)$$

Розглянемо спочатку систему (6) при  $n = 0$  та застосуємо до неї перетворювальні оператори Соніна [22], і в результаті отримуємо:

$$l_0[\bar{\eta}(t)] + \mathbf{M}l_1[\bar{\eta}(t)] = \mathbf{f}(\rho), \quad (8)$$

$$b_3 l_0[\eta_5^-(t)] = f_3(\rho); \quad (9)$$

де 
$$l_0[f] = \int_{-a}^a f(t) \frac{\text{sign}(\rho - t) + \text{sign}(t)}{2} dt,$$

$$l_1[f] = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a f(t) \ln \left| \frac{t}{\rho - t} \right| dt, \quad S_2[f] = \frac{1}{\rho} \partial_\rho \int_0^\rho \frac{s ds}{\sqrt{\rho^2 - s^2}} \int_0^s f(t) dt.$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\eta} = \{\eta_k\}^2 = \begin{pmatrix} \eta_4^- \\ \eta_6^- \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \mathbf{B}^{-1} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

$$S_1[f] = \int_0^a \frac{sf(s) ds}{\rho \sqrt{\rho^2 - s^2}}, \quad \eta_k^\pm = S_2[U_{k0}^\pm], \quad \eta_k^\pm(-\rho) = \eta_k^\pm(\rho), \quad k = 1, 4, 5;$$

$$\eta_k^\pm = \rho S_1[\rho^{-1} U_{k0}^\pm], \quad \eta_k^\pm(-\rho) = -\eta_k^\pm(\rho), \quad k = 2, 3, 6;$$

$$f_1 = l_1[q_{11}\eta_1^- - \eta_1^+] + q_{12}l_0[\eta_2^-], \quad f_3 = l_1[2(q_{22}^+ + q_{22}^-)\eta_3^- - \eta_3^+] + ic_0^0 \rho, \quad c_0^0 = 2 \text{Im} C_0,$$

$$f_2 = l_1[2(q_{22}^+ - q_{22}^-)\eta_2^- - \eta_2^+] + \frac{q_{21}}{2} l_0[\eta_1^-] + c_0^* \rho, \quad c_0^* = 2 \text{Re} C_0.$$

Із рівняння (9), враховуючи умови (7), не важко встановити, що  $\eta_5^- = 0$ , і отже  $U_{50}^- = 0$ .

Матриця  $\mathbf{M} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}$  допускає розвинення

$$\mathbf{M} = \mathbf{S} \mathbf{J} \mathbf{S}^{-1}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \kappa_2 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & \kappa_1 \end{pmatrix}, \quad \kappa_j = \frac{a_j}{b_j}, \quad \lambda_j = (-1)^{j+1} i \lambda_0, \quad \lambda_0^2 = -\kappa_1 \kappa_2.$$

Враховавши це, систему (8) перепишемо так:

$$l_0[\mu_j] + \lambda_j l_1[\mu_j] = F_j, \quad j = 1, 2;$$

$$\bar{\mu} = \{\mu_j\}^2 = \mathbf{S}^{-1} \bar{\eta}, \quad \mathbf{F} = \{F_j\}^2 = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{f}, \quad \mathbf{S}^{-1} = \{s_{jk}^*\}^2. \quad (10)$$

Враховуючи умову  $0 \leq \lambda \leq 1$ , яка виконується для комбінацій відомих трансверсально-ізотропних матеріалів [23], розв'язки рівнянь (10) слід шукати в класі

функцій автоматичної обмеженості [24]:

$$\mu_j(\rho) = R_j[F'_j(\rho)], \quad R_j[f] = \frac{1}{\kappa_*} \left( f(\rho) - \frac{\lambda_j \omega_j(\rho)}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f(t)}{\omega_j(t)} \frac{dt}{t - \rho} \right), \quad (11)$$

$$\omega_j(\rho) = \left( \frac{a + \rho}{a - \rho} \right)^{\gamma_j}, \quad \gamma_j = (-1)^{j+1} i \alpha_0, \quad \alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1 + \lambda_0}{1 - \lambda_0}, \quad \kappa_* = 1 - \lambda_0^2, \quad j = 1, 2.$$

Розвинення (11), подання  $\bar{\eta} = S\bar{\mu}$ , а також співвідношення  $U_{40}^- = -2(\pi\rho^2)^{-1} \partial_\rho S_1[\eta_4^-]$ ,

$U_{60}^- = -2(\pi\rho)^{-1} \partial_\rho S_1[\rho^{-1} \eta_6^-]$ , дають змогу розв'язок системи (9) подати так:

$$\begin{pmatrix} \rho U_{40}^- \\ U_{60}^- \end{pmatrix} = -\frac{2}{\pi\rho^2} \sum_{k,m=1}^2 \begin{pmatrix} \beta_{km}^{(1)} \\ \rho\beta_{km}^{(2)} \end{pmatrix} \partial_\rho S_1 \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ \rho^{-1} \end{pmatrix} R_k[f'_{3-m}] \right], \quad \beta_{km}^{(j)} = s_{jk} s_{mk}^* b_{3-m}^{-1}. \quad (11)$$

Нехай  $n \neq 0$ , тоді, згідно з властивостями

$$V_{k,-n}^\pm(\rho) = \bar{V}_{k,n}^\pm(\rho), \quad k = 1, 4; \quad \bar{V}_{k,-n}^\pm(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{v}_k^\pm(\rho, \phi) e^{-i\phi} d\phi, \quad k = 2, 3,$$

достатньо розглянути випадок  $n > 0$ . Застосувавши відомі перетворення [6], здобудемо розв'язок системи (6) при  $n > 0$ :

$$\begin{pmatrix} U_{4n}^- \\ U_{6n}^- \end{pmatrix} = \frac{2(-1)^n \rho^n}{\pi} \begin{pmatrix} \tilde{\partial}_\rho^n \\ I_* \end{pmatrix} \sum_{k,m=1}^2 \begin{pmatrix} \beta_{km}^{(1)} \\ \beta_{km}^{(2)} \end{pmatrix} S_1 \left[ \begin{pmatrix} \rho^{-1} \\ 1 \end{pmatrix} R_k[S_{3-m}[(Q_{3-m,n}^*)]] \right], \quad (12)$$

$$U_{5n}^- = (-1)^n \rho^n \tilde{\partial}_\rho^n S_1 \rho \tilde{\partial}_\rho^n S_2 [Q_{3,n}^*],$$

де  $Q_{1n}^* = (-1)^{n-1} \rho^2 I_a^{n-1} I_0[Q_{1n}] + \rho^2 \Psi_{1,n-1}(\rho)$ ,  $Q_{2n}^* = (-1)^{n-1} \rho I_a^{n-1} [Q_{2n}] + \rho \Psi_{2,n-1}(\rho)$ ,

$$Q_{3n}^* = (-1)^{n-1} \rho I_a^{n-1} [Q_{3n}] + \rho \Psi_{3,n-1}, \quad \Psi_{k,n-1} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\rho^{2(j-1)} C_{k,n-1-j}^*}{(2(j-1))!}, \quad I_0[f(\rho)] = \int_\rho^a f(t) dt.$$

$I_n[f] = -\rho^{-n} \{ \rho^{2n} I_0[\rho^{-n-1} f] \}'$ ,  $I_*[f] = \rho \tilde{\partial}_\rho^{n-1} \rho \tilde{\partial}_\rho \rho^{-2} I_0[\rho \tilde{\partial}_\rho [f]]$ ,  $C_{k,n-1-j}^*$  – сталі, які встановлюють з умов замкнутості берегів тріщини (3). Отже, формули (5), (11), (12) визначають стрибки переміщень на тріщині за будь-якого навантаження її берегів. Здобутий результат дає змогу, скориставшись розривним розв'язком для кусково-однорідного простору [20], отримати подання в явному вигляді компонент тензора напружень і вектора переміщень у всьому просторі. Кількість доданків у розвиненні (5) залежить від виду навантаження.

**Сталі навантаження.** Нехай до берегів тріщини прикладене стале навантаження:  $f_1^\pm(x, y) = -P_1$ ,  $f_k^\pm(x, y) = P_k$ ,  $k = 2, 3$ . Тоді в розвиненні (5) залишаться три доданки при  $n = -1, 0, 1$ , а стрибки переміщень на тріщині набудуть вигляду

$$\begin{aligned} v_3^-(\rho, \phi) &= \frac{P_1}{\pi\rho} \int_\rho^a \frac{t\eta_2(t)dt}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} - \frac{\tau e^{i\phi}}{\pi} \int_\rho^a \frac{\eta_3^+(t)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} dt - \frac{\bar{\tau} e^{-i\phi}}{\pi} \int_\rho^a \frac{\bar{\eta}_3^-(t)dt}{\sqrt{t^2 - \rho^2}}, \\ v_4^-(\rho, \phi) &= \frac{P_1}{\pi} \int_\rho^a \frac{\eta_1(t)dt}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} + \frac{P_2 \sin \phi + P_3 \cos \phi}{\pi\rho} \int_\rho^a \frac{t\eta_{12}(t)dt}{\sqrt{t^2 - \rho^2}}, \end{aligned} \quad (13)$$

де

$$\eta_1(\rho) = \frac{-4}{q_{14}\sqrt{\kappa_*}} (\rho\omega_c(\rho) + a\alpha_0\omega_s(\rho)), \quad \eta_{12}(\rho) = \frac{8q_{13}}{\lambda_0 q_{14} q_0 \sqrt{\kappa_*}} (\rho\omega_s(\rho) - a\alpha_0 k_{21}\omega_c(\rho)),$$

$$\eta_2(\rho) = \frac{2}{q_{13}\sqrt{\kappa_*}}(\rho\omega_s(\rho) - a\alpha_0\omega_c(\rho)), \quad \eta_{21}(\rho) = \frac{2}{q_0\sqrt{\kappa_*}}(\rho\omega_c(\rho) + a\alpha_0\omega_s(\rho)),$$

$$h_1 = \frac{2a\alpha_0(1 + \alpha_0^2)}{\lambda_0 q_0 \sqrt{\kappa_*}}, \quad \tau = P_3 - iP_2, \quad \eta_3^\pm(t) = \eta_2(t) \pm h_1 t, \quad q_0 = \tilde{q}_{12} \frac{\pi\alpha_0}{\lambda_0} (1 + \alpha_0^2) + q_{23},$$

$$\omega_{s,c}(\rho) = \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix} \left( \alpha_0 \ln \frac{a + \rho}{a - \rho} \right).$$

Подання (13) дає можливість визначити зону нерегулярності [25], тобто ширину  $\delta$  області контакту поверхонь тріщини. Так, при  $\rho \rightarrow a$ , отримуємо:

$$\frac{\delta}{a} = 2 \left( 1 + e^{\frac{1}{\alpha_0} \left( \frac{\pi}{2} + \psi_0 \right)} \right)^{-1}, \quad \psi_0 = \arccos \frac{\vartheta_c}{\sqrt{\vartheta_c^2 + \vartheta_s^2}}, \quad \vartheta_c = \frac{2P_1}{q_{14}} + \frac{8\alpha_0\lambda_0}{q_{24}q_*} \operatorname{Re}(\bar{\tau}e^{i\varphi}), \quad (14)$$

$$\vartheta_s = \frac{2\alpha_0 P_1}{q_{14}} + \frac{4\lambda_0}{q_{24}q_*} \operatorname{Re}(\tau e^{i\varphi}), \quad q_* = 1 + \frac{\pi\alpha_0}{\lambda_0} \frac{\tilde{q}_{12}}{q_{23}} (1 - 8\alpha_0).$$

За нормального навантаження берегів тріщини:  $P_2 = P_3 = 0$ , для комбінацій відомих трансверсально-ізотропних матеріалів [23], справджуються нерівності

$$\delta a^{-1} < 10^{-30}, \quad v_4^-(\rho, \varphi) > 0, \quad \rho \in (0, a), \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad (15)$$

отже зона нерегулярності, практично, відсутня. Якщо тут зробити припущення, що збільшення тріщини відбувається в площині з'єднання півпросторів  $z = 0$ , то використавши критерій Гріффітса [26], узагальнимо формули [7] для визначення залежності руйнівального напруження від радіуса тріщини за нормального навантаження:

$$P_0 = \sqrt{\frac{\lambda_0 q_* T_0}{2a\alpha_0(1 + \alpha_0^2)}}, \quad (q_* = -q_{14} > 0), \quad \text{де } T_0 - \text{питома поверхнева}$$

енергія на тріщині.

Подання (13) та інтегральні співвідношення для кусково-однорідного трансверсально-ізотропного простору [20] дають можливість записати вирази для напружень в площині з'єднання півпросторів поза тріщиною ( $\rho > a$ ):

$$\sigma_z|_{z=0} = \frac{2q_{14}}{\pi} \left( -P_1 \int_0^a \frac{t\eta_1(t)dt}{(\rho^2 - t^2)^{3/2}} + \operatorname{Re}(\tau e^{i\varphi}) \int_0^a \eta_{12}(t) \left( \frac{\rho}{(\rho^2 - t^2)^{3/2}} - \frac{1}{\rho^2} \right) dt \right),$$

$$\tau_{z\rho} + i\tau_{z\varphi}|_{z=0} = \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{P_1 \rho \eta_2(t) + Q_1 t \eta_{21}(t) \cos \varphi}{(\rho^2 - t^2)^{3/2}} dt - \frac{h_1 Q_2 \sin \varphi}{\sqrt{\rho^2 - t^2}} + \tau_*(\rho, \varphi), \quad (16)$$

де  $Q_1 = q_{23}P_3 - i\tilde{q}_{12}P_2$ ,  $Q_2 = q_{23}P_2 + i\tilde{q}_{12}P_3$ ,  $\tau_*$  - обмежена функція. Для визначення поведінки напружень в околі тріщини, скориставшись результатами праці [24], здобудемо асимптотичні розвинення при  $\rho \rightarrow a + 0$ :

$$\int_0^a \frac{t^{2k+\vartheta} \omega_{c,s}(t) dt}{(\rho^2 - t^2)^{3/2}} = \frac{a^{2k-1/2-\vartheta} \pi \sqrt{\kappa_*} \omega_{s,c}^a(\rho) + (-1)^\vartheta 2\alpha_0 \omega_{c,s}^a(\rho) - \vartheta}{4\lambda_0 \sqrt{2} \sqrt{\rho - a}} +$$

$$+ O\left((\rho - a)^{\varepsilon-1/2}\right), \quad \varepsilon > 0,$$

$$\omega_{c,s}^a(\rho) = \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} \left( \alpha_0 \ln \frac{\rho - a}{2a} \right), \quad \alpha_0 \neq 0, \quad \vartheta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Звідси напруження (16) при  $\rho \rightarrow a + 0$  подаємо так:

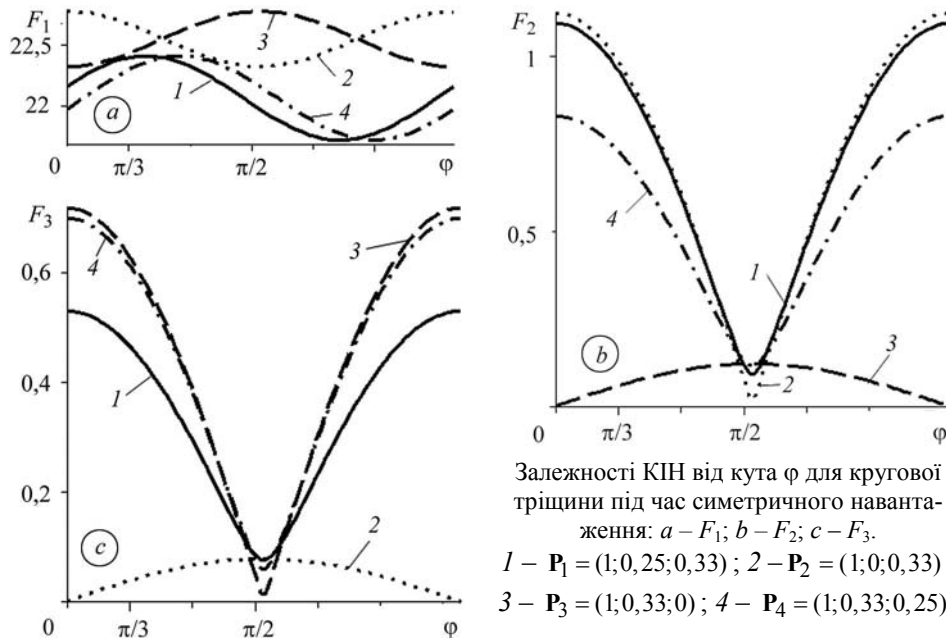
$$\begin{aligned}\sigma_z|_{z=0} &= \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{\rho-a}} \left\{ \gamma_{10} + \gamma_{11} \omega_s^a(\rho) + \gamma_{12} \omega_c^a(\rho) \right\} + O((\rho-a)^0), \\ \tau_{z\rho} + i\tau_{z\phi}|_{z=0} &= \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{\rho-a}} \left\{ \gamma_{20} + \gamma_{21} \omega_s^a(\rho) + \gamma_{22} \omega_c^a(\rho) \right\} + O((\rho-a)^0),\end{aligned}\quad (17)$$

де

$$\begin{aligned}\gamma_{10} &= \frac{\alpha_0}{\lambda_0} P_1 + \frac{q_{13} \operatorname{Re}(\tau e^{i\varphi})}{\lambda_0^2 q_0}, & \gamma_{11} &= \frac{1-2\alpha_0^2}{\lambda_0} P_1 + 3\alpha_0 \frac{q_{13} \operatorname{Re}(\tau e^{i\varphi})}{\lambda_0^2 q_0}, \\ \gamma_{12} &= \frac{3\alpha_0}{\lambda_0} P_1 + (1-2\alpha_0^2) \frac{q_{13} \operatorname{Re}(\tau e^{i\varphi})}{\lambda_0^2 q_0}, & \gamma_{21} &= -\frac{3\alpha_0 P_1}{4\lambda_0 q_{13}} - \frac{\alpha_0 Q_1 (1-2\alpha_0^2) \cos \varphi}{4\lambda_0 q_0}, \\ \gamma_{22} &= \frac{(1-2\alpha_0^2) P_1}{4\lambda_0 q_{13}} + \frac{3\alpha_0 Q_1 \cos \varphi}{4\lambda_0 q_0}, & \gamma_{20} &= \frac{P_1}{4\lambda_0 q_{13}} - \frac{\alpha_0 Q_1 \cos \varphi}{4\lambda_0 q_0} - \frac{2\alpha_0 Q_2 (1+\alpha_0^2) \sin \varphi}{4\lambda_0 q_0}.\end{aligned}$$

**Розрахунок коефіцієнтів інтенсивності напружень.** Співвідношення (15) будуть справджуватись, тобто зона нерегулярності практично відсутня, і за виконання умови  $2P_1 > P_2 + P_3$ . Тут можна скористатись асимптотичними розвиненнями (16) для визначення поведінки напружень в околі тріщини, не вводячи зони контакту берегів тріщини, оскільки це суттєво ускладнило розв'язок задачі. На відміну від кусково-однорідного ізотропного простору [27], подання (16) містять по три коефіцієнти зв'язок між якими не очевидний. Тому, за працею [2], введемо узагальнені КІН так:

$$K_z^* = \sum_{k=0}^2 \sqrt{2a\gamma_{1k}^2}, \quad K_{z\rho}^* = \sum_{k=0}^2 \sqrt{2a(\operatorname{Re}\gamma_{2k})^2}, \quad K_{z\phi}^* = \sum_{k=0}^2 \sqrt{2a(\operatorname{Im}\gamma_{2k})^2}.$$



Залежності КІН від кута  $\varphi$  для кругової тріщини під час симетричного навантаження:  $a - F_1$ ;  $b - F_2$ ;  $c - F_3$ .

$1 - P_1 = (1; 0,25; 0,33)$ ;  $2 - P_2 = (1; 0; 0,33)$ ;  
 $3 - P_3 = (1; 0,33; 0)$ ;  $4 - P_4 = (1; 0,33; 0,25)$ .

Dependence of SIF on angle  $\varphi$  for a circular crack under symmetric loading:  $a - F_1$ ;  $b - F_2$ ;  $c - F_3$ .

$1 - P_1 = (1; 0,25; 0,33)$ ;  $2 - P_2 = (1; 0; 0,33)$ ;  $3 - P_3 = (1; 0,33; 0)$ ;  $4 - P_4 = (1; 0,33; 0,25)$ .

В результаті асимптотичні розвинення (17) подамо у вигляді ( $0 < v_j^0 \leq 1, j = 1, 2$ )

$$\sigma_z|_{z=0} = \frac{K_z^*(\varphi)v_1^0}{\sqrt{\rho-a}} + O((\rho-a)^0),$$

$$\tau_{z\rho} + i\tau_{z\phi}|_{z=0} = \frac{(K_{z\rho}^*(\varphi) + iK_{z\phi}^*(\varphi))v_2^0}{\sqrt{\rho-a}} + O((\rho-a)^0).$$

Подано (див. рисунок) залежності відносних коефіцієнтів

$$F_1 = \frac{K_z^*(\varphi, k_1, k_2, k_3)}{\sqrt{2a}}, \quad F_2 = \frac{K_{z\rho}^*(\varphi, k_1, k_2, k_3)}{\sqrt{2a}}, \quad F_3 = \frac{K_{z\phi}^*(\varphi, k_1, k_2, k_3)}{\sqrt{2a}},$$

$$k_* = \sqrt{\sum_{j=1}^3 P_j^2}, \quad k_j = \frac{P_j}{k_*}$$

від кута  $\varphi \in [0, \pi]$  для комбінації трансверсально-ізотропних матеріалів [23] кобальт – берил за різних значень вектора  $\mathbf{P} = (P_1; P_2; P_3)$ .

### ВИСНОВКИ

За дотичних складових навантажень  $P_2 \neq 0$  або  $P_3 \neq 0$ , всі три КІН залежать від полярного кута  $\varphi$ . Ця залежність особливо помітна для  $F_2$  і  $F_3$ . Для кожного з векторів  $\mathbf{P}_k$  за допомогою графіків можна визначити значення кутів  $\varphi$ , за яких КІН досягають мінімального та максимального значення. Так, наприклад, при  $\mathbf{P}_1 = (1; 0, 25; 0, 33)$  (див. рисунок, крива 1) КІН  $F_1$  досягає мінімального значення за кутів близьких до  $\frac{2\pi}{3}$ , а  $F_2$  і  $F_3$  – за кутів близьких до  $\frac{\pi}{2}$ ; максимального значення КІН  $F_1$  досягає за кутів близьких до  $\frac{\pi}{3}$ , а  $F_2$  і  $F_3$  – за кутів 0 і  $\pi$ , відповідно. Аналогічно можуть бути отримані розв'язки задач про інші види дефектів, зокрема, відшаровані та невідшаровані вклучення.

*РЕЗЮМЕ.* Построено решение в явном виде задачи о круговой межфазной трещине в кусочно-однородном трансверсально-изотропном пространстве при произвольном нагружении берегов трещины. Получены выражения для коэффициентов интенсивности напряжений на границе трещины, а также значения указанных коэффициентов для некоторых сочетаний трансверсально-изотропных материалов.

*SUMMARY.* The exact solution for the problem about an interface circular crack in the non-uniform transversal-isotropic space under arbitrary loading of the crack faces is built. The expressions for the stress intensity factors on the crack boundary and also the numerical values of the mentioned coefficients for some different combination of transversal-isotropic materials are obtained.

1. Herrmann K. P. and Loboda V. V. On interface crack models with contact zones situated in an anisotropic biomaterial // Archive of Appl. Mech. – 1999. – 69. – P. 317–335.
2. Кривой А. Ф., Попов Г. Я. Межфазные туннельные трещины в составном анизотропном пространстве // Прикл. математика и механика. – 2008. – 72, № 4. – С. 689–700.  
(Krivoi A. F., Popov G. Ya. Features of the stress field near tunnel inclusions in an inhomogeneous anisotropic space // Int. Appl. Mech. – 2008. – 44, № 6. – P. 626–634.)
3. Эрдоган Ф. Распределение напряжений в связных разнородных материалах, содержащих круглые и кольцеобразные трещины // Тр. Америк. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика. – 1965. – 32, № 2. – С. 127–135.
4. Кассир М. К. Брегман А. М. Коэффициент интенсивности напряжений для плоскообразной трещины на границе раздела двух различных материалов // Там же. – 1972. – 39, № 1. – С. 160–162.

5. Тихомиров В. В. Межфазная трещина в трансверсально-изотропной композитной среде // Прикл. математика и механика. – 1996. – **60**, № 5. – С. 848–853.
6. Ефимов В. В., Кривой А. Ф., Попов Г. Я. Задачи о концентрации напряжений возле кругового дефекта в составной упругой среде // Изв. АН СССР. МТТ. – 1998. – № 2. – С. 42–58.
7. Мосаковский В. М., Рыбка М. Т. Обобщение критерия Гриффитса–Снеддона на случай неоднородного тела // Прикл. математика и механика. – 1964. – **28**, № 6. – С. 1061–1069.
8. Hasegawa H. and Kisaki M. The Stress Field Caused by a Circular Cylindrical Inclusion in a Transversely Isotropic Elastic Solid // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 2003. – **70**, № 6. – P. 825–8312.
9. Монастирський Б., Качиньські А. Контактна взаємодія двох пружних півпросторів з круговим концентратором // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – **46**, № 3. – С. 47–57.  
(*Monastyrskiy B. and Kaczynski A. Contact Interaction of Two Elastic Half Spaces with Circular Groove // Materials Science. – 2010. – 46, № 3. – P. 336–347.*)
10. Острик В. І., Улитко А. Ф. Осесиметрична контактна задача для міжфазної тріщини // Там же. – 2004. – **40**, № 1. – С. 21–26.  
(*Ostryk V. I. and Ulitko A. F., Axisymmetric Contact Problem for an Interface Crack // Ibid. – 2004. – 40, № 1. – P. 20–28.*)
11. Barber J. R. and Ting T. C. T. Three-dimensional solutions for general anisotropy // J. of the Mechan. and Physics of Solids. – 2008. – **55**, № 9. – P. 353–368.
12. Pan E. Three-Dimensional Green's Functions in Anisotropic Elastic Bimaterials with Imperfect Interfaces // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 2003. – **70**, № 2. – P. 180–190.
13. Phan A. V., Gray L. J., and Kaplan T. Residue approach for evaluating the 3D anisotropic elastic Green's function: multiple roots // Engng. Anal. with Boundary Elements. – 2005. – **9**, № 6. – P. 570–576.
14. Poonssawat P., Wijeyewickrema A. C., and Karasudhi P. Stress singularity analysis of a crack terminating at the interface of an anisotropic layered composite // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1998. – **65**, № 4. – P. 829–836.
15. Qu J. and Xue Y. Three-dimensional interface cracks in anisotropic bimaterials: the non-oscillatory case // Ibid. – 1998. – **65**, № 6. – P. 1048–1055.
16. Yuan F. G., Yang S., and Yang B. Three-dimensional Green's functions for composite laminates // Int. J. Solids and Struct. – 2003. – **40**, № 2. – P. 331–342.
17. Свекло В. А. Задача типа бусинеска для анизотропного полупространства // Прикл. математика и механика. – 1964. – **28**, № 5. – С. 908–913.
18. Willis J. R. The stress field around an elliptical crack in an anisotropic elastic medium // Int. J. Eng. Scie. – 1968. – **6**, № 5. – P. 253–263.
19. Силованюк В. П. Руйнування попередньо напружених і трансверсально-ізоотропних тіл із дефектами. – Львів: Фіз.-мех. ін-т ім. Г. В. Карпенка НАН України, 2000. – 298 с.
20. Кгуууу О. The Discontinuous Solution for the Piece-homogeneous Transversal Isotropic Medium // Operator Theory: Advances and Applications. – 2009. – **191**. – P. 387–398.
21. Лехницький С. Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 415 с.
22. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М.: Наука, 1982. – 344 с.
23. Александров К. С., Рыжова Т. В. Упругие свойства кристаллов. Обзор // Кристаллография. – 1961. – **6**, № 2. – С. 289–314.
24. Гахов Д. Ф. Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
25. Партон В. З., Морозов Е. М. Механика упругопластического разрушения. – М.: Наука, 1985. – 504 с.
26. Панасюк В. В. Механіка руйнування та міцність матеріалів: досягнення та перспективи // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – **40**, № 3. – С. 5–18.  
(*Panasjuk V. V. Fracture Mechanics and Strength of Materials: Advances and Prospects // Materials Science. – 2004. – 40, № 3. – P. 305–319.*)
27. Саврук М. П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами // Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пос. / Под ред. В. В. Панасюка. – К.: Наук. думка, 1988. – **2**. – 620 с.

Одержано 03.09.2010