

УДК 539.3

**РОЗВ'ЯЗУВАННЯ МЕТОДАМИ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ
ЗАДАЧ АНТИПЛОСКОГО ДЕФОРМУВАННЯ ТІЛ ІЗ ТОНКИМИ
СТРІЧКОВИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ. І. Загальні співвідношення***Я. М. ПАСТЕРНАК¹, Г. Т. СУЛИМ²*¹ Луцький національний технічний університет;² Львівський національний університет ім. Івана Франка

Із використанням методів сингулярних інтегральних рівнянь побудовано математичну модель антиплаского деформування тіла із тонким стрічковим пружним включенням. У моделі враховано можливість поздовжнього деформування включення у двох взаємно перпендикулярних площинах, записано відповідні рівняння для опису пружних анізотропних тонких включень і розрахунку за допомогою дуального методу граничних елементів напружено-деформованого стану неоднорідної структури.

Ключові слова: тонке стрічкове включення, сингулярне інтегральне рівняння, метод граничних елементів.

Сьогодні є два основні теоретичні підходи дослідження тіл із тонкими неоднорідностями: прямий [1–3], у якому включення вважають об'єктом із певною товщиною, та спеціальний [4–7], де на основі принципу спряження континуумів різної вимірності його розглядають як математичний розріз уздовж середньої поверхні із заданими на ньому певними крайовими умовами неідеального контакту – умовами взаємодії. Покладаючи в основу прямого підходу числові методи, вдається розв'язувати різноманітні задачі для обмежених і необмежених тіл із прямолінійними та викривленими включеннями, однак його ефективність істотно залежить від методів опису тонких елементів тіл [1, 2]. Спеціальний підхід, зокрема у вигляді методу функцій стрибка [7], продуктивний для розв'язування задач для стрічкових включень у безмежних тілах, смугах, півплощинах тощо, тобто для задач, у яких геометричні параметри, вид і спосіб навантаження дають можливість записати зручну для подальших обчислень систему інтегральних рівнянь. За допомогою таких спеціальних підходів вивчали лише включення уздовж дуги кола [8, 9].

Для дослідження напруженого стану тіл із тонкими непрямолінійними (не плоскими в плані) включеннями видається ефективним поєднання прямих числових методів зі спеціальними підходами. Тим більше, що для розв'язування інтегральних рівнянь, як правило, використовують числові методи колокації чи механічних квадратур. Наприклад, модель тонкого податливого включення уведено в метод скінчених елементів [4]. Для тонких пружних включень довільної жорсткості відповідний підхід [10] для плоскої задачі теорії пружності розроблено на основі методу граничних елементів, а подібну лінійну модель включення запропоновано для задачі антиплаского деформування тіл із тонкими стрічковими дефектами.

Формулювання і розв'язування задачі. Розглянемо циліндричне ізотропне тіло (матрицю) зі стрічковим тонким пружним включенням, твірні якого паралельні до твірних тіла. Матриця навантажена зусиллями, що діють паралельно до її твірної поверхні. У вибраній площині тіла розмістимо декартову систему координат

нат $Ox_1x_2x_3$ і спрямуємо вісь Ox_3 паралельно до твірної поверхні (рис. 1). Між тілом та включенням виконуються умови ідеального механічного контакту. Створюючи лінійну модель, не розглядатимемо включення як геометричний об'єкт, а контактні напруження та переміщення перенесемо на його серединну поверхню Γ_C (відповідно на береги Γ_C^+ та Γ_C^-). Переміщення у тілі з розрізом визначимо з такої тотожності Сомільяни [7, 11]:

$$w(\xi) = \int_{\Gamma} [W(\mathbf{x}, \xi)t(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}, \xi)w(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_C^+} [W(\mathbf{x}, \xi)\Sigma t(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}, \xi)\Delta w(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}), \quad (1)$$

де w , t – ненульові компоненти векторів переміщень $(0, 0, w)$ та напружень $(0, 0, t)$; $\Delta w = w^+ - w^-$, $\Delta t = t^+ - t^-$, $\Sigma w = w^+ + w^-$, $\Sigma t = t^+ + t^-$; $t^\pm = \sigma_{3i}^\pm n_i^\pm$ (n_j^\pm – компоненти вектора нормалей \mathbf{n}^\pm до поверхонь Γ_C^\pm); знаки “+” та “-” відповідають величинам на поверхнях Γ_C^+ та Γ_C^- , утворених математичним розрізом Γ_C (див. рис. 1). Ядра інтегральних рівнянь для антиплоскої задачі теорії пружності мають вигляд

$$W(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{\ln r}{2\pi G} + A, \quad T(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{2\pi r^2} r_k n_k \quad (k=1, 2). \quad (2)$$

Тут $r_i = x_i - \xi_i$, $r = \sqrt{r_k r_k}$; G – модуль зсуву. У формулах прийняли правило Айнштайна підсумовування за індексом, що повторюється. Згідно з тотожністю (1), за умови $\int_{\Gamma_C^+} \Sigma t(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} t(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = 0$ рівноваги тіла з математичним розрізом, стала A не впливає на поля напружень і переміщень, тому її можна вважати нульовою.

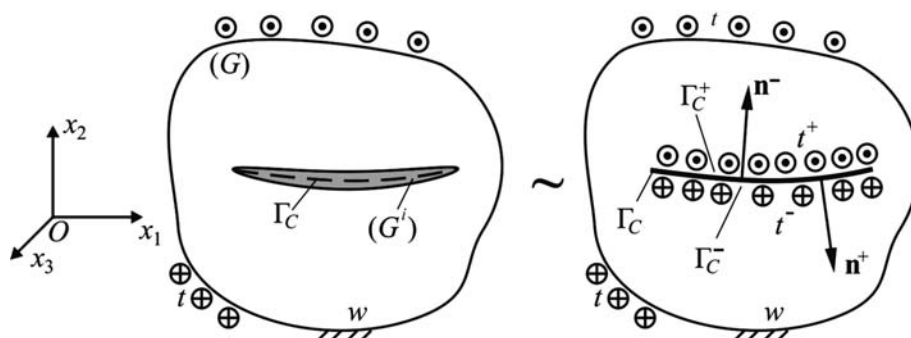


Рис. 1. Схеми задачі та підходу моделювання тонкого включення за принципом спряження.

Fig. 1. Schemes of a problem and thin inclusion modeling approach by the coupling principle.

Спрямовуючи внутрішню точку ξ до точки $\mathbf{y} \in \Gamma$ межі тіла та вважаючи, що в точці \mathbf{y} крива Γ є гладка, отримаємо сингулярне інтегральне рівняння для крайових функцій w та t на межі Γ тіла:

$$\frac{1}{2} w(\mathbf{y}) = \text{RPV} \int_{\Gamma} W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\Gamma} T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) w(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_C^+} [W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta w(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}), \quad (3)$$

де RPV – значення невластивого інтеграла за Ріменном (Riemann principal value); CPV – головне значення інтеграла за Коші (Cauchy principal value).

Спрямовуючи внутрішню точку ξ до точки $\mathbf{y} \in \Gamma_C$ розрізу Γ_C та вважаючи, що в точці \mathbf{y} крива Γ_C є гладка [12], із формули (1) отримаємо сингулярне інтегральне рівняння для крайових функцій Σt та Δw на розрізі Γ_C :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma w(\mathbf{y}) = & \int_{\Gamma} [W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) w(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \\ & + \text{RPV} \int_{\Gamma_C^+} W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\Gamma_C^+} T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta w(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) . \end{aligned} \quad (4)$$

Використовуючи під час числового моделювання розрізів чи включень із точками зламу осрової лінії (поверхні) інтегральне рівняння (4), можна уникнути в обчислювальній схемі потрапляння точки колокації \mathbf{y} в точку зламу. Диференціюючи його за y_k , застосовуючи закон Гука та враховуючи, що $n_i^+ = -n_i^-$, маємо:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta t(\mathbf{y}) = & n_j^+(\mathbf{y}) \int_{\Gamma} [D_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t(\mathbf{x}) - S_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) w(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \\ & + n_j^+(\mathbf{y}) \left[\text{CPV} \int_{\Gamma_C^+} D_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{HPV} \int_{\Gamma_C^+} S_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta w(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

де HPV – скінченна частина гіперсингулярного інтеграла (Hadamard principal value); $D_j = r_j / (2\pi r^2)$; $S_j = G[n_j r^2 - 2r_j(n_k r_k)] / (2\pi r^4)$.

Для розв'язування сформульованої задачі інтегральних рівнянь (3)–(5) недостатньо. Необхідно побудувати математичну модель тонкого включення, тобто ще два незалежні рівняння типу

$$F_k(\Delta t, \Sigma t, \Delta w, \Sigma w) = 0 \quad (k = 1, 2). \quad (6)$$

Тоді система рівнянь (3)–(6) буде повна. Припустимо, що з рівнянь математичної моделі тонкого включення (6) можна знайти величини Σw та Δt в явному вигляді, тобто отримати вирази

$$\Sigma w = F^w(\Sigma t, \Delta w), \quad \Delta t = F^t(\Sigma t, \Delta w). \quad (7)$$

Тоді система рівнянь (3)–(6) набуде такого вигляду:

- коли точка колокації \mathbf{y} розташована на межі Γ тіла,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} w(\mathbf{y}) = & \text{RPV} \int_{\Gamma} W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\Gamma} T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) w(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \\ & + \int_{\Gamma_C^+} [W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta w(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}); \end{aligned} \quad (8)$$

- коли точка колокації \mathbf{y} знаходиться на межі Γ_C тонкого включення,

$$\begin{cases} \text{RPV} \int_{\Gamma_C^+} W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{CPV} \int_{\Gamma_C^+} T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta w(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = \\ \quad = F^w(\Sigma t, \Delta w) / 2 - \int_{\Gamma} [W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) w(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}), \\ n_j^+(\mathbf{y}) \left[\text{CPV} \int_{\Gamma_C^+} D_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \text{HPV} \int_{\Gamma_C^+} S_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta w(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right] = \\ \quad = F^t(\Sigma t, \Delta w) / 2 - n_j^+(\mathbf{y}) \int_{\Gamma} [D_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t(\mathbf{x}) - S_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) w(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (8')$$

Таким чином, поставлену задачу зведено до знаходження зі системи інтегральних рівнянь (8), незаданих крайовими умовами, функцій w чи t на межі Γ тіла та невідомих стрибків переміщень Δw та дотичних напружень $\Delta \sigma_{3n} = (\sigma_{3i}^+ - \sigma_{3i}^-) n_i^+ = \sigma_{3i}^+ n_i^+ + \sigma_{3i}^- n_i^- = \Sigma t$ на стрічковому включенні.

Систему крайових інтегральних рівнянь (8) розв'язуватимемо методом граничних елементів [12]. Для цього криві Γ та Γ_C апроксимуємо за допомогою прямолінійних відрізків n та n_C – граничних елементів Γ_q . На кожному елементі виберемо по три вузлові точки: одну – в центрі, а дві інші – на відстані $1/3$ довжини елемента по обидва боки від центральної (розривний граничний елемент). Тоді точка колокації завжди потраплятиме на гладку ділянку утвореного апроксимацією конту-

ру, тобто висунуті до рівнянь (3)–(5) умови забезпечуватимуться. Крайові функції t , w , Σt та Δw апроксимуємо на елементі за їхніми вузловими значеннями:

$$[t, w, \Sigma t, \Delta w](\xi) \approx \sum_{p=1}^3 [t^{q,p}, w^{q,p}, \Sigma t^{q,p}, \Delta w^{q,p}] \phi^p(\xi), \quad (9)$$

де ξ – параметр розташування точки на елементі, означений на проміжку $-1 \leq \xi \leq 1$ так: $d\Gamma_q = (L_q/2)d\xi = J_q d\xi$, J_q – модуль якобіана заміни змінних на елементі Γ_q . Для прямолінійного розривного квадратичного елемента його вузлам $\mathbf{x}^{q,p}$ ($p = 1, \dots, 3$) відповідають значення параметра $\xi = \{-2/3; 0; 2/3\}$. Тому інтерполяційні поліноми Лагранжа $\phi^p(\xi)$ означені виразами

$$\phi^1 = \xi \left(\frac{9}{8}\xi - \frac{3}{4} \right), \quad \phi^2 = \left(1 - \frac{3}{2}\xi \right) \left(1 + \frac{3}{2}\xi \right), \quad \phi^3 = \xi \left(\frac{9}{8}\xi + \frac{3}{4} \right). \quad (10)$$

Отже, систему сингулярних інтегральних рівнянь (8) зведено до системи лінійних алгебричних рівнянь для шуканих вузлових значень $t^{q,p}$, $w^{q,p}$, $\Sigma t^{q,p}$, $\Delta w^{q,p}$ крайових функцій t , w , Σt та Δw :

- коли точка колокації $\mathbf{x}^{s,r} \in \Gamma$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} w(\mathbf{x}^{s,r}) = & \sum_{q=1}^n \sum_{p=1}^3 \left[t^{q,p} \int_{-1}^1 W(\mathbf{x}^q(\xi), \mathbf{x}^{s,r}) \phi^p(\xi) J_q d\xi - w^{q,p} \int_{-1}^1 T(\mathbf{x}^q(\xi), \mathbf{x}^{s,r}) \phi^p(\xi) J_q d\xi \right] + \\ & + \sum_{q=1}^{n_C} \sum_{p=1}^3 \left[\Sigma t^{q,p} \int_{-1}^1 W(\mathbf{x}^q(\xi), \mathbf{x}^{s,r}) \phi^p(\xi) J_q d\xi - \Delta w^{q,p} \int_{-1}^1 T(\mathbf{x}^q(\xi), \mathbf{x}^{s,r}) \phi^p(\xi) J_q d\xi \right], \end{aligned} \quad (11)$$

- коли точка колокації $\mathbf{x}^{s,r} \in \Gamma_C$,

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} F^w(\mathbf{x}^{s,r}) = & \sum_{q=1}^n \sum_{p=1}^3 \left[t^{q,p} \int_{-1}^1 W(\mathbf{x}^q(\xi), \mathbf{x}^{s,r}) \phi^p(\xi) J_q d\xi - \right. \\ & \left. - w^{q,p} \int_{-1}^1 T(\mathbf{x}^q(\xi), \mathbf{x}^{s,r}) \phi^p(\xi) J_q d\xi \right] + \\ & + \sum_{q=1}^{n_C} \sum_{p=1}^3 \left[\Sigma t^{q,p} \int_{-1}^1 W(\mathbf{x}^q(\xi), \mathbf{x}^{s,r}) \phi^p(\xi) J_q d\xi - \right. \\ & \left. - \Delta w^{q,p} \int_{-1}^1 T(\mathbf{x}^q(\xi), \mathbf{x}^{s,r}) \phi^p(\xi) J_q d\xi \right], \\ \frac{1}{2} F^t(\mathbf{x}^{s,r}) = & \sum_{q=1}^n \sum_{p=1}^3 \sum_{j=1}^2 n_j^+(\mathbf{x}^{s,r}) \left[t^{q,p} \int_{-1}^1 D_j(\mathbf{x}^q, \mathbf{x}^{s,r}) \phi^p(\xi) J_q d\xi - \right. \\ & \left. - w^{q,p} \int_{-1}^1 S_j(\mathbf{x}^q, \mathbf{x}^{s,r}) \phi^p(\xi) J_q d\xi \right] + \\ & + \sum_{q=1}^{n_C} \sum_{p=1}^3 \sum_{j=1}^2 n_j^+(\mathbf{x}^{s,r}) \left[\Sigma t^{q,p} \int_{-1}^1 D_j(\mathbf{x}^q(\xi), \mathbf{x}^{s,r}) \phi^p(\xi) J_q d\xi - \right. \\ & \left. - \Delta w^{q,p} \int_{-1}^1 S_j(\mathbf{x}^q(\xi), \mathbf{x}^{s,r}) \phi^p(\xi) J_q d\xi \right] \end{aligned} \right. \quad (11')$$

для $3(n + n_C)$ точок колокації $\mathbf{x}^{s,r}$ ($s = \overline{1, n + n_C}$; $r = 1, 2, 3$). Невластиві, сингулярні та гіперсингулярні інтеграли можна обчислювати числово [12] чи, якщо вдасться, аналітично [13].

Математична модель тонкого пружного включення. Поздовжній зсув матеріалу включення у поперечних до його серединної поверхні площинах. Використаємо відомий підхід [14, 15], пов'язавши подвоєні середні значення напружень $2\sigma_{n3}^{avr} = (\sigma_{3i}^+ + \sigma_{3i}^-)n_i^+ = \Delta t$ зі стрибком переміщень Δw так, як у моделі пружної основи Вінклера:

$$\Delta t = -\Delta w G_1^i / h, \quad (12)$$

де G_1^i – модуль зсуву матеріалу включення у поперечному до його серединної поверхні напрямі; h – половина товщини включення; верхній прямий індекс “ i ” відповідає включенню.

Поздовжній зсув матеріалу включення у дотичних до його серединної поверхні площинах. Розглянемо рівновагу k -го прямолінійного граничного елемента включення (рис. 2). Вважатимемо, що товщина включення $2h$ є стала уздовж усього дефекту. З урахуванням умов ідеального механічного контакту $\Sigma t = -\Sigma t^i$ між дефектом і тілом для середнього значення внутрішніх напружень $\sigma = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_{\tau 3}(\eta) d\eta$ у довільному поперечному до серединної поверхні перерізі тонкого включення із рівнянь рівноваги отримаємо:

$$\sigma^k(\xi) = \sigma^k(-1) + \frac{1}{2h} \int_{-1}^{\xi} \Sigma t^k(\xi) J_k d\xi. \quad (13)$$

Через малу товщину включення середні значення деформацій можна пов'язати зі середніми значеннями напружень за допомогою закону Гука. Тоді із виразу (13) для деформацій включення матимемо:

$$\varepsilon^k = \frac{\sigma^k}{G_2^i} = \varepsilon^k(-1) + \frac{1}{2hG_2^i} \int_{-1}^{\xi} \Sigma t^k(\xi) J_k d\xi; \quad \varepsilon^k = \varepsilon_{\tau 3}^k = \frac{\partial w}{\partial \tau^k}. \quad (14)$$

Тут G_2^i – модуль зсуву матеріалу включення у поздовжньому до його серединної поверхні напрямі.

Інтегруючи вираз (14) та враховуючи, що для тонкого включення $\frac{1}{2}\Sigma w$ можна вважати середнім за товщиною значенням його переміщень, отримаємо:

$$\frac{1}{2}\Sigma w^k(\xi) = \frac{1}{2}\Sigma w^k(-1) + \varepsilon^k(-1)(\xi+1)J_k + \frac{J_k^2}{2hG_2^i} \int_{-1}^{\xi} \int_{-1}^{\eta} \Sigma t^k(\zeta) d\zeta d\eta. \quad (15)$$

Із рівноваги частини включення, що складається з елементів $\overline{1, k-1}$, та закону Гука випливає:

$$\varepsilon^k(-1) = \frac{1}{2hG_2^i} (2h\sigma_{\tau 3}^0 + \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}_k} \Sigma t(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x})) = \frac{1}{2hG_2^i} \left(2h\sigma_{\tau 3}^0 + \sum_{s=1}^{k-1} J_s \int_{-1}^1 \Sigma t^s(\xi) d\xi \right), \quad (16)$$

де $\sigma_{\tau 3}^0$ – середнє значення напружень на лівому торці включення.

Нерозривність осі включення дає умову $\Sigma w^{k-1}(1) = \Sigma w^k(-1)$. Тоді з урахуванням (10) та (11), виконуючи рекурсивну підстановку, дістанемо:

$$\frac{1}{2}\Sigma w^k(\xi) = w^0 + \frac{1}{2hG_2^i} \left[\sum_{s=1}^{k-1} J_s^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^{\eta} \Sigma t^s(\zeta) d\zeta d\eta + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + J_k^2 \int_{-1}^{\xi} \int_{-1}^{\eta} \Sigma t_j^k(\zeta) d\zeta d\eta + 2 \sum_{m=1}^{k-1} J_m \left(2h\sigma_{\tau 3}^0 + \sum_{s=1}^{m-1} J_s \int_{-1}^1 \Sigma t^s(\xi) d\xi \right) + \\
& + (\xi + 1) J_k \left(2h\sigma_{\tau 3}^0 + \sum_{s=1}^{k-1} J_s \int_{-1}^1 \Sigma t^s(\xi) d\xi \right) \Big].
\end{aligned} \tag{17}$$

Об'єднуючи модель поздовжнього зсуву (12) у перпендикулярній до середньої поверхні площині із моделлю (17) зсуву у дотичній до неї площині, з урахуванням позначень (7) отримаємо рівняння математичної моделі тонкого пружного включення, придатні до впровадження у систему рівнянь (11):

$$\begin{aligned}
F^t(\mathbf{x}^{k,r}) &= -\Delta w^{k,r} G_1^i / h ; \\
\frac{1}{2} F^w(\mathbf{x}^{k,r}) &= w^0 + \frac{1}{2hG_2^i} \left[\sum_{s=1}^{k-1} J_s^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^{\eta} \Sigma t^s(\zeta) d\zeta d\eta + \right. \\
& + J_k^2 \int_{-1}^{\xi} \int_{-1}^{\eta} \Sigma t_j^k(\zeta) d\zeta d\eta + 2 \sum_{m=1}^{k-1} J_m \left(2h\sigma_{\tau 3}^0 + \sum_{s=1}^{m-1} J_s \int_{-1}^1 \Sigma t^s(\xi) d\xi \right) + \\
& \left. + (\xi + 1) J_k \left(2h\sigma_{\tau 3}^0 + \sum_{s=1}^{k-1} J_s \int_{-1}^1 \Sigma t^s(\xi) d\xi \right) \right].
\end{aligned} \tag{18}$$

Середнє значення переміщень w^0 лівого торця включення визначимо з рівняння глобальної його рівноваги:

$$2h(\sigma_{\tau 3}^n - \sigma_{\tau 3}^0) - \int_{\Gamma_C} \Sigma t(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = 0. \tag{19}$$

Система рівнянь (11), (18) разом із рівнянням глобальної рівноваги включення (19) є повною для розв'язування сформульованої задачі. Для включення з ізотропного матеріалу $G_1^i = G_2^i = G^i$. Згідно з підходами теорії тонких дефектів [7] сталі $\sigma_{\tau 3}^0$, $\sigma_{\tau 3}^n$ (торцьові напруження) або вважали нульовими, або задавали наближеними апіорними залежностями. Оскільки у рівняння моделі включення (18), (19) входять лише добутки $2h\sigma_{\tau 3}$, то для включень із закругленим торцем ці сталі для спрощення можна нехтувати.

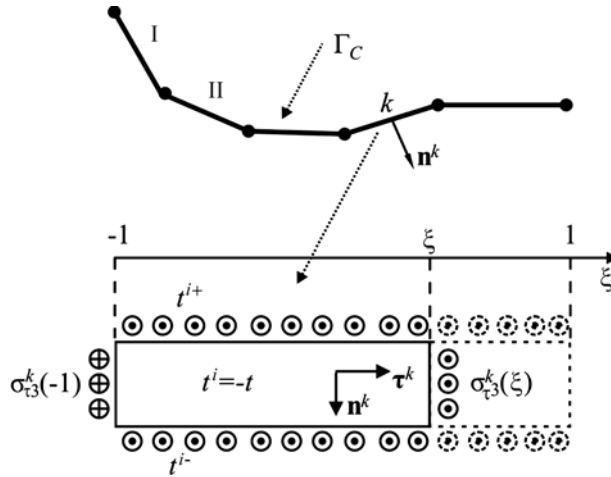


Рис. 2. Схема для запису рівнянь рівноваги включення: I, II – номери граничних елементів.

Fig. 2. The scheme for obtaining inclusion equilibrium equations: I, II – number of boundary elements.

ВИСНОВКИ

Розроблений підхід дає можливість модифікувати дуальний метод граничних елементів і природно адаптувати його до вивчення задач теорії тонких пружних включень. Математична модель тонкого пружного включення записана для гранично-елементної апроксимації серединної поверхні неоднорідності, тому її можна безпосередньо впроваджувати у числову схему методу. У рівняннях моделі враховано достатньо повну кількість механічних характеристик тонкого включення, що дає можливість доброго наближення модельної задачі до реальної за анізотропії властивостей включення у найширшому спектрі зміни пружних властивостей від абсолютної податності (щілина, тріщина) до гнучкого й нерозтяжливого чи абсолютно жорсткого.

РЕЗЮМЕ. С помощью методов сингулярных интегральных уравнений построена математическая модель антиплоской деформации тела с тонким ленточным упругим включением. В модели включения учтена возможность его продольного деформирования в различных плоскостях, записаны соответствующие уравнения, подходящие для описания упругих тонких анизотропных включений и расчета с помощью дуального метода граничных элементов напряженно-деформированного состояния неоднородной структуры.

SUMMARY. Using the singular integral equation methods, the mathematical model of anti-plane shear of a solid containing a ribbon-like inclusion is constructed. In the inclusion model the possibility of its transverse and longitudinal shear is considered. The corresponding relations which are suitable for studying the thin elastic anisotropic inclusions and the stress-strain state of the inhomogeneous solid using the dual boundary element method are written.

1. Сулим Г., Пастернак Я. Регуляризована тотожність Сомільяни для задач теорії пружності з тонкостінними структурами // Вісник Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2007. – Вип. 13. – С. 142–150.
2. Сулим Г. Т., Пастернак Я. М. Застосування методу граничних елементів до аналізу антиплоскої деформації анізотропних тіл із тонкостінними структурами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – 51, № 4. – С. 136–144.
3. Опанасович В. К. О двух подходах к исследованию антиплоской деформации изотропного массива с тонким упругим включением // Прикл. математика и механика. – 1988. – 52, вып. 1. – С. 116–119.
4. Винницька Л., Савула Я. Напружено-деформований стан пружного тіла з тонким включенням // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2008. – № 7. – С. 21–29.
5. Підстригач Я. С. Умови теплового контакту твердих тіл // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1963. – № 7. – С. 872–874.
6. Попов В. Г., Мойсеєнок А. П. Концентрация напряжений вблизи отслоившегося тонкого упругого включения при воздействии нестационарной волны продольного сдвига // Теорет. и прикл. механика. – 2005. – Вып. 41. – С. 184–192.
7. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-видав. центр НТШ, 2007. – 716 с.
8. Бернар И. И., Опанасович В. К. Напряженное состояние пластинки с тонкостенным включением по дуге окружности // Прикл. математика и механика. – 1983. – 47, № 2. – С. 249–256.
9. Френчко Ю. С., Ткач М. Д. Антиплоская деформация тела с тонким дугообразным включением // Физ.-мех. поля в деформируемых средах. – К.: Наук. думка, 1978. – С. 81–84.
10. Пастернак Я. М., Сулим Г. Т. Дуальний метод граничних елементів у задачах теорії тонких включень // Пр. конф. Пошкодження матеріалів під час експлуатації, методи його діагностування і прогнозування. – Тернопіль, 2009. – С. 137–143.
11. Линьков А. М. Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. – СПб.: Наука, 1999. – 382 с.
12. Portela A., Aliabadi M. H., and Rooke D. P. The dual boundary element method: Effective implementation for crack problems // Int. J. Numer. Meth. Engng. – 1992. – 33. – P. 1269–1287.
13. Salvadori A. and Gray L. J. Analytical integrations and SIFs computation in 2D fracture mechanics // Ibid. – 2007. – 70. – P. 445–495.
14. Панасюк В. В., Стадник М. М., Силованюк В. П. Концентрация напряжений в трехмерных телах с тонкими включениями. – К.: Наук. думка, 1986. – 216 с.
15. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.

Одержано 06.04.2010