УДК 519.6

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАНДАРТНЫХ ИНТЕРВАЛЬНЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ

О.А. ЖУКОВСКАЯ

Получены аналитические выражения для нестандартных интервальных арифметических операций в форме ценр-радиус. В отличие от известных они более лаконичны и не требуют предварительной подготовки, что облегчает дальнейшее исследование и применение их для решения практических задач.

ВВЕДЕНИЕ

При моделировании различных объектов в условиях нестохастически заданной неопределенности применяются нечеткие и интервальные алгоритмы, теоретической основой которых являются интервальные вычисления [1]. Современные методы интервального анализа, кроме интервальных арифметических операций, содержат достаточно развитые средства для решения многих задач, однако общий недостаток этих методов — широкие интервальные оценки результата, что неприемлемо не только для проведения практических расчетов, но и для дальнейшего анализа данной модели [2].

Такая ситуация сложилась вследствие алгебраической неполноты традиционной интервальной арифметики, что привело к возникновению различных подходов к ее расширению. В работе [3] предлагается расширить интервальное пространство интервалами отрицательной ширины, а в [4] — расширить интервально-арифметическую структуру дополнительными (нестандартными) арифметическими операциями. В то же время такие расширения не решают проблему громоздких вычислительных процедур, что ограничивает их практическое применение [5].

В связи с этим может быть поставлена задача исследования нестандартных интервально-арифметических операций и упрощения их применения для практических расчетов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И АНАЛИЗ НЕСТАНДАРТНЫХ ИНТЕРВАЛЬНО - АРИФМЕТИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ

Следуя работе [4], введем расширенную интервально-арифметическую структуру $M = (I(R), +, \times, +^-, \times^-)$, где $I(R) = \{[a^-, a^+] \mid a^- \le a^+, a^-, a^+ \in R\}$ —

множество действительных интервалов; $(+, \times)$ и $(+^-, \times^-)$ — стандартные и нестандартные интервальные операции сложения и умножения соответственно действительным интервалам $A = [a^-, a^+]$, $B = [b^-, b^+]$.

Результат стандартных интервальных операций может быть получен с помощью формул [2]

$$A + B = [a^- + b^+,\ a^+ + b^+],$$

$$AB = [\min\{a^-b^-, a^-b^+, a^+b^-, a^+b^+\},\ \max\{a^-b^-, a^-b^+, a^+b^-, a^+b^+\}].$$

Нестандартные интервальные арифметические операции вводятся следующим образом. Обозначим $E = \{a^- * b^-, a^- * b^+, a^+ * b^-, a^+ * b^+\}$, где $* \in \{+, \times\}$ и рассмотрим ситуацию, когда все четыре точки из E различны. Множество $E_1 = \{\min E, \max E\}$ состоит из элементов, которые определяются обычными интервально-арифметическими операциями $A * B = [\min E, \max E]$. Тогда нестандартные интервально-арифметические операции определяются [4] так:

$$A *^- B = [\min(E \setminus E_1),\ \max(E \setminus E_1)]. \qquad (1)$$

Для решения практических задач в работе [4] рекомендованы такие формулы нестандартных интервально-арифметических операций:

$$A +^- B = [a^{-\alpha} + b^{\alpha}, a^{\alpha} + b^{-\alpha}],\quad \alpha = \varphi(A, B),\quad A, B \in I(R), \qquad (2)$$

$$A -^- B = A +^- (-B) = [a^{-\alpha} - b^{-\alpha}, a^{\alpha} - b^{\alpha}],\quad \alpha = \varphi(A, B),\quad A, B \in I(R), \qquad (3)$$

где $\varphi : I(R) \times I(R) \to \{+, -\}$ — функционал, определяющий отношение между шириной $d(A) = |a^+ - a^-|$ интервала A и шириной $d(B) = |b^+ - b^-|$ интервала B, причем

$$\varphi(A, B) = \begin{cases} + & \text{при } d(A) \ge d(B), \\ - & \text{при } d(A) < d(B), \end{cases} \qquad (4)$$

$$A \times^- B =$$

$$= \begin{cases} [a^{\sigma(B)\varepsilon} b^{-\sigma(A)\varepsilon}, a^{-\sigma(B)\varepsilon} b^{\sigma(A)\varepsilon}], & \varepsilon = \psi(A, B), \quad A, B \in I(R) \setminus Z(R), \qquad (5) \\ [a^{-\delta} b^{-\delta}, a^{-\delta} b^{\delta}], & \delta = \sigma(A), \quad A \in I(R) \setminus Z(R), \quad B \in Z(R), \qquad (6) \\ [a^{-\delta} b^{-\delta}, a^{\delta} b^{-\delta}], & \delta = \sigma(B), \quad A \in Z(R), \quad B \in I(R) \setminus Z(R), \qquad (7) \end{cases}$$

$$A \times^- B = [\min\{a^- b^+, a^+ b^-\},\ \max\{a^- b^-, a^+ b^+\}],\quad A, B \in Z(R), \qquad (8)$$

$$A /^- B = A \times^- (1/B) = \begin{cases} [a^{\sigma(B)\varepsilon} / b^{\sigma(A)\varepsilon},\ a^{-\sigma(B)\varepsilon} / b^{-\sigma(A)\varepsilon}], \\ \qquad \varepsilon = \psi(A, B),\ A, B \in I(R) \setminus Z(R), \\ [a^{-\delta} / b^{\delta}, a^{\delta} / b^{\delta}], \\ \qquad \delta = \sigma(B),\ A \in Z(R),\ B \in I(R) \setminus Z(R), \end{cases} \qquad (9)$$

где $\psi : I(R) \times I(R) \to \{+, -\}$ — функционал, определяющий отношение между вспомогательными функциями $\chi(A)$, $\chi(B)$

$$\psi(A,B) = \begin{cases} + & \text{при } \chi(A) \ge \chi(B), \\ - & \text{при } \chi(A) < \chi(B), \end{cases} \tag{10}$$

$$\chi(A) = \begin{cases} a^- / a^+, & \text{если } |a^-| \le |a^+|, \\ a^+ / a^- & \text{в остальных случаях}, \end{cases} \tag{11}$$

а функционал $\sigma : \{A \in I(R) \mid a^+ \le 0 \text{ или } a^- \ge 0\} \to \{-,+\}$ равен

$$\sigma(A) = \begin{cases} +, & \text{если } a^- \ge 0, \\ -, & \text{если } a^+ \le 0, \quad A \ne [0,0]. \end{cases}$$

Таким образом, применение предложенных в работе [4] формул (2), (5)–(8) для решения практических задач требует значительного предварительного анализа характеристик интервалов. А также, как видно из (8), для интервалов, содержащих нуль, не определено, какое из произведений $a^i b^j$ $(i, j = -,+)$ принимает наименьшее, а какое наибольшее значения, что не позволяет получить решение задачи в явном виде.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследование арифметических операций над традиционными интервалами и интервалами с отрицательной шириной проводилось в работах [6, 7]. Были получены лаконичные и более конструктивные для практического применения формулы интервально-арифметических операций.

Цель данной статьи состоит в исследовании возможности сокращения подготовительной работы, а также получения конструктивных формул для нестандартных интервально-арифметических операций, ориентированных на решение прикладных задач.

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ. ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАНДАРТНОЙ ИНТЕРВАЛЬНО-АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ОПЕРАЦИИ СЛОЖЕНИЯ

Для проведения необходимого анализа представим интервалы A, B в форме центр-радиус $A = \langle a, r_a \rangle$, $B = \langle b, r_b \rangle$, где

$$a = \frac{a^- + a^+}{2}, \qquad r_a = \frac{a^+ - a^-}{2},$$
$$b = \frac{b^- + b^+}{2}, \qquad r_b = \frac{b^+ - b^-}{2} \tag{12}$$

— центры и радиусы соответственно интервалов A, B [8].

Теорема 1. Пусть $A=\langle a,r_a\rangle,\ B=\langle b,r_b\rangle$. Тогда при *любом* отношении между $d(A)$ и $d(B)$ для нестандартной интервально-арифметической операции сложения справедлива формула

$$A+^{-}B=\langle a+b,\ |\,r_a-r_b\,|\rangle. \tag{13}$$

Доказательство. Предположим, что $d(A)\geq d(B)$. В этом случае, как следует из (2) и (4),

$$A+^{-}B=[a^{-}+b^{+},\ a^{+}+b^{-}]$$

или с учетом (12)

$$A+^{-}B=\langle a+b,\ r_a-r_b\rangle. \tag{14}$$

Аналогично можно показать, что

$$A+^{-}B=\langle a+b,\ r_b-r_a\rangle \tag{15}$$

при $d(A)<d(B)$.

Из (14) и (15) следует (16).

Теорема доказана.

Из теоремы 1 с учетом (3) вытекает следствие.

Следствие. При *любом* отношении между $d(A)$ и $d(B)$ для интервалов $A=\langle a,r_a\rangle,\ B=\langle b,r_b\rangle$ нестандартная интервально-арифметическая операция вычитания определяется формулой

$$A-^{-}B=\langle a-b,\ |\,r_a-r_b\,|\rangle.$$

Доказательство. Проводится аналогично доказательству теоремы 1, опираясь на определение (3).

НЕСТАНДАРТНАЯ ИНТЕРВАЛЬНО-АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ОПЕРАЦИЯ УМНОЖЕНИЯ

Произведением интервалов $A=\langle a,r_a\rangle$ и $B=\langle b,r_b\rangle$ является некоторая функция четырех переменных $f(a,r_a,b,r_b)=\langle a,r_a\rangle\langle b,r_b\rangle$, которую для дальнейшего анализа запишем в виде

$$f(a,r_a,b,r_b)=g\left(\frac{a}{r_a},\frac{b}{r_b}\right). \tag{16}$$

В соответствии с (16) множество всех значений $a,\ r_a,\ b,\ r_b$ данных интервалов представим как объединение непересекающихся подмножеств, определяющихся всевозможными комбинациями неравенств

$$\frac{a}{r_a}\geq 1,\ \frac{b}{r_b}\geq 1,\ \frac{a}{r_a}\leq -1,\ \frac{b}{r_b}\leq -1,\ \ \frac{a}{r_a}<1,\ \frac{b}{r_b}<1,\ \frac{a}{r_a}>-1,\ \frac{b}{r_b}>-1,$$

$$\frac{a}{r_a}\geq\frac{b}{r_b},\quad \frac{a}{r_a}<\frac{b}{r_b},\quad -\frac{a}{r_a}\geq\frac{b}{r_b},\quad -\frac{a}{r_a}<\frac{b}{r_b}, \tag{17}$$

в которых без потери общности считаем, что r_a, $r_b > 0$. На рис. 1 эти подмножества ограничены прямыми $|a| = r_a$, $|b| = r_b$, $|b| r_a = |a| r_b$. На основании исследования поведения функции в зависимости от принадлежности значений a, r_a, b, r_b к соответствующему подмножеству и проведения классификации интервалов (результатов произведения) справедливы следующие теоремы.

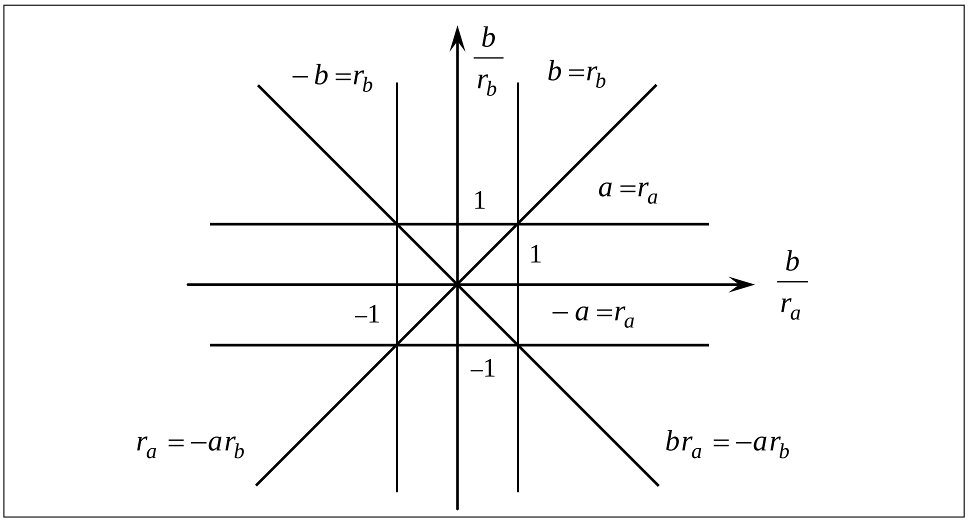

Рис. 1. Области, определяемые неравенствами (17)

Теорема 2. Пусть выполняются условия

$$\frac{|a|}{r_a} \geq 1, \quad \frac{|b|}{r_b} \geq 1. \tag{18}$$

Тогда нестандартное произведение интервалов $A = \langle a, r_a \rangle, B = \langle b, r_b \rangle$ определяется формулой

$$A \times^{-} B = \langle ab - \operatorname{sgn}(ab) r_a r_b \, , |\, ar_b - \operatorname{sgn}(ab) br_a \,| \rangle . \tag{19}$$

Доказательство. Согласно работам [7, 8] для стандартного произведения интервалов $A = \langle a, r_a \rangle, B = \langle b, r_b \rangle$ при условиях (18) справедлива формула

$$AB = \langle ab + \operatorname{sgn}(ab) r_a r_b, |a| r_b + |b| r_a \rangle,$$

откуда следует, что при условиях $\dfrac{a}{r_a} \geq 1$, $\dfrac{b}{r_b} \geq 1$, $\dfrac{a}{r_a} \geq \dfrac{b}{r_b}$ и с учетом формул перехода (12) имеем

$$AB = [(a - r_a)(b - r_b), \ (a + r_a)(b + r_b)]. \tag{20}$$

Тогда, из (1) следует

$$A \times^{-} B = [\,(a + r_a)(b - r_b), (a - r_a)(b + r_b)] \tag{21}$$

или с учетом (13)

$$A\times^{-} B=\left\langle ab-r_a r_b\,, ar_b-br_a\right\rangle .$$

Аналогично можно получить формулы для нестандартного произведения интервалов при выполнении остальных составляющих условия (18). Результаты приведены в табл. 1.

Таблица 1. Формулы для нестандартного произведения интервалов при ограничениях (18)

Условие	Формула
$\frac{a}{r_a}\ge 1,\ \frac{b}{r_b}\ge 1,\ \frac{a}{r_a}\ge\frac{b}{r_b}$	$A\times^{-} B=\left\langle ab-r_a r_b\,, ar_b-br_a\right\rangle$
$\frac{a}{r_a}<1,\ \frac{b}{r_b}<1,\ -\frac{a}{r_a}\ge-\frac{b}{r_b}$	
$\frac{a}{r_a}\ge 1,\ \frac{b}{r_b}\ge 1,\ \frac{a}{r_a}<\frac{b}{r_b}$	$A\times^{-} B=\left\langle ab-r_a r_b\,, -ar_b+br_a\right\rangle$
$-\frac{a}{r_a}<1,\ -\frac{b}{r_b}<1,\ -\frac{a}{r_a}<-\frac{b}{r_b}$	
$\frac{a}{r_a}\ge 1,\ \frac{b}{r_b}\le -1,\ \frac{a}{r_a}\ge-\frac{b}{r_b}$	$A\times^{-} B=\left\langle ab+r_a r_b\,,\ -ar_b-br_a\right\rangle$
$-\frac{a}{r_a}\le -1,\ \frac{b}{r_b}\ge 1,\ -\frac{a}{r_a}\ge\frac{b}{r_b}$	
$\frac{a}{r_a}\ge 1,\ \frac{b}{r_b}\le -1,\ \frac{a}{r_a}<-\frac{b}{r_b}$	$A\times^{-} B=\left\langle ab+r_a r_b\,,\ ar_b+br_a\right\rangle$
$\frac{a}{r_a}\le -1,\ \frac{b}{r_b}\ge 1,\ -\frac{a}{r_a}<\frac{b}{r_b}$	

Из табл. 1 видно, что при выполнении условий (18) справедлива формула (19).

Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть выполняются условия

$$\frac{|a|}{r_a}<1,\ \ \frac{|a|}{r_a}<\frac{|b|}{r_b}\ . \tag{22}$$

Тогда нестандартное произведение интервалов в форме центр-радиус $A=\left\langle a,r_a\right\rangle,\ B=\left\langle b,r_b\right\rangle$ определяется формулой

$$AB=\left\langle ab-\operatorname{sgn}(b)ar_b\,, |\,br_a-\operatorname{sgn}(b)\,r_a r_b\,|\right\rangle . \tag{23}$$

Доказательство. Согласно [6, 7] для стандартного произведения интервалов $A=\left\langle a,r_a\right\rangle,\ B=\left\langle b,r_b\right\rangle$ при условиях (22) справедлива формула

$$AB=\left\langle ab+\operatorname{sgn}(b)ar_b\,, \left|b\right| r_a+r_a r_b\right\rangle ,$$

откуда следует, что при условиях $\frac{|a|}{r_a} < 1,\ \frac{b}{r_b} > 1$ и с учетом формул перехода (12) имеем

$$AB = [(a - r_a)(b + r_b),\ (a + r_a)(b + r_b)]\,,$$

следовательно, по определению (1) нестандартное произведение будет таким:

$$A \times^- B = [(a - r_a)(b - r_b),\ (a + r_a)(b - r_b)]$$

или с учетом (12)

$$A \times^- B = \left\langle ab - ar_b\,,\ br_a - r_b r_a \right\rangle.$$

Рассуждая аналогичным образом, получаем формулы нестандартного произведения для остальных составляющих условия (22). Результаты приведены в табл. 2.

Таблица 2. Формулы для нестандартного произведения интервалов при ограничениях (22)

Условие	**Формула**
$\frac{\lvert a\rvert}{r_a} < 1,\ \frac{b}{r_b} > 1$	$A \times^- B = \left\langle ab - ar_b\,, br_a - r_b r_a \right\rangle$
$\frac{\lvert a\rvert}{r_a} < 1,\ 0 < \frac{b}{r_b} < 1,\ \frac{\lvert a\rvert}{r_a} < \frac{b}{r_b}$	$A \times^- B = \left\langle ab - ar_b, -br_a + r_a r_b \right\rangle$
$\frac{\lvert a\rvert}{r_a} < 1,\ -1 < \frac{b}{r_b} < 0,\ \frac{\lvert a\rvert}{r_a} < -\frac{b}{r_b}$	$A \times^- B = \left\langle ab + ar_b,\ br_a + r_a r_b \right\rangle$
$\frac{\lvert a\rvert}{r_a} < 1,\ \frac{b}{r_b} < -1$	$A \times^- B = \left\langle ab + ar_b,\ -br_a - r_a r_b \right\rangle$

Из табл. 2 видно, что при выполнении условий (22) справедлива формула (23).

Теорема доказана.

Теорема 4.

Пусть выполняются условия

$$\frac{|b|}{r_b} < 1,\ \frac{|a|}{r_a} \ge \frac{|b|}{r_b}\,. \tag{24}$$

Тогда нестандартное произведение интервалов в форме центр-радиус $A = \left\langle a, r_a \right\rangle, B = \left\langle b, r_b \right\rangle$ определяется формулой

$$A \times^- B = \left\langle ab - \operatorname{sgn}(a) br_a, |\, ar_b - \operatorname{sgn}(a) r_b r_a \,| \right\rangle. \tag{25}$$

Доказательство. Так как операция умножения действительных чисел коммутативна, то в результате замены $a \leftrightarrow b,\ r_a \leftrightarrow r_b$ из (23) получим (25).

Теорема доказана.

Из доказанных теорем следует такой алгоритм вычисления нестандартного произведения двух интервалов в форме центр-радиус (рис. 2):

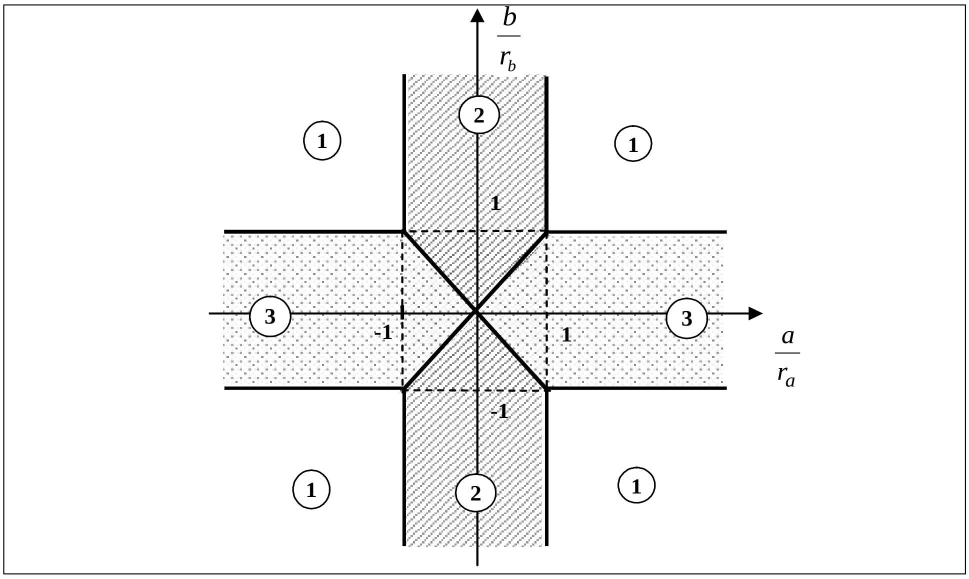

Рис. 2. Области $1-3$, определяемые соответственно неравенствами (18), (22), (24)

$$A\times^{-} B=\left\langle ab-\operatorname{sgn}(ab)r_a r_b ,|\, ar_b-\operatorname{sgn}(ab)br_a\,|\right\rangle$$

$$\text{при } \frac{|a|}{r_a}\geq 1,\ \ \frac{|b|}{r_b}\geq 1 \text{ (область 1)},$$

$$A\times^{-} B=\left\langle ab-\operatorname{sgn}(b)ar_b ,|\, br_a-\operatorname{sgn}(b)r_a r_b\,|\right\rangle$$

$$\text{при } \frac{|a|}{r_a}<1,\ \frac{|a|}{r_a}<\frac{|b|}{r_b} \text{ (область 2)},$$

$$A\times^{-} B=\left\langle ab-\operatorname{sgn}(a)br_a ,|\, ar_b-\operatorname{sgn}(a)r_b r_a\,|\right\rangle$$

$$\text{при } \frac{|b|}{r_b}<1,\ \ \frac{|a|}{r_a}\geq\frac{|b|}{r_b} \text{ (область 3)}.$$

Следствие. Пусть $\dfrac{|b|}{r_b}>1$. Тогда нестандартное деление интервалов $A=\left\langle a,r_a\right\rangle$, $B=\left\langle b,r_b\right\rangle$ определяется формулами

$$A/^{-}B=\frac{1}{b^2-r_b^2}\left\langle ab-\operatorname{sgn}(ab)\,r_a r_b ,|\, a\,r_b-\operatorname{sgn}(ab)br_a\,|\right\rangle \tag{26}$$

$$\text{при } \frac{|a|}{r_a}\geq 1, \tag{27}$$

$$A /^{-} B = \frac{1}{b^2 - r_b^2} \left\langle ab - \operatorname{sgn}(b)\, ar_b, / br_a - \operatorname{sgn}(b) r_a r_b \mid \right\rangle \qquad (28)$$

$$\text{при } \frac{|a|}{r_a} < 1\,. \qquad (29)$$

Доказательство. Согласно (9) результат нестандартной операции деления интервалов $A = [a^-, a^+]$, $B = [b^-, b^+]$ вычисляется по формуле

$$A /^{-} B = A \times^{-} (1/B) = [a^-, a^+] \times^{-} \left[\frac{1}{b^+}, \frac{1}{b^-}\right], \text{ если } 0 \notin B\,,$$

или

$$A /^{-} B = \frac{1}{b^- b^+} [a^-, a^+] \times^{-} [b^-, b^+]\,, \text{ если } 0 \notin B\,. \qquad (30)$$

В форме центр-радиус (30) будет иметь вид

$$A /^{-} B = \frac{\langle a, r_a \rangle \times^{-} \langle b, r_b \rangle}{b^2 - r_b^2} = \frac{A \times^{-} B}{b^2 - r_b^2} \quad \text{при } \frac{|b|}{r_b} > 1\,.$$

Тогда, согласно с теоремами (2) – (4), нестандартная операция деления интервалов *A* и *B* определится формулами (26), (28) при условиях соответственно (27), (29).

МОДЕЛЬНЫЕ ПРИМЕРЫ

Пример 1. Найти нестандартную сумму интервалов

$$A = [1, 5] \text{ и } B = [2, 4]\,. \qquad (31)$$

Вычислим нестандартную сумму по формуле (3).

1. Найдем ширину $d(A)$ и $d(B)$:

$$d(A) = |5 - 1| = 4\,,$$

$$d(B) = |4 - 2| = 2\,.$$

2. Определим знак функционала $\varphi(A, B)$:

$$\text{так как } d(A) = 4 > d(B) = 2\,, \text{ то } \varphi(A, B) = +\,.$$

3. Определим формулу нестандартной операции сложения:

$$A +^{-} B = [a^{-+} + b^{++},\ a^{++} + b^{-+}] = [a^- + b^+,\ a^+ + b^-]\,.$$

4. Произведем непосредственные вычисления:

$$A +^{-} B = [1 + 4,\ \ 5 + 2] = [5,\ 7]\,. \qquad (32)$$

Вычислим нестандартную сумму по формуле (13).

Согласно (12) интервалы (31) в форме центр-радиус имеют вид

$$A = \langle 3,\ 2 \rangle,\ B = \langle 3, 1 \rangle .$$

1. Произведем непосредственные вычисления

$$A +^{-} B = \langle 3+3, |\, 2-1 | \rangle = \langle 6,1 \rangle . \qquad (33)$$

Сравним полученные результаты (32) и (33)

$$[5,\ 7] = [6-1,\ 6+1] = \langle 6,1 \rangle .$$

Как видно, применение формулы (13) дает тот же результат, что и (2), но требует существенно меньшего количества операций.

Пример 2. Найти нестандартное произведение интервалов

$$A = [2,4] \text{ и } B = [4,6]. \qquad (34)$$

Вычислим нестандартное произведение по формуле (5).

1. Определим знак функционалов $\sigma(A)$ и $\sigma(B)$:

$$\text{так как } a^{-} = 2 > 0 \text{, то } \sigma(A) = + ,$$

$$\text{так как } b^{-} = 6 > 0 \text{, то } \sigma(B) = + .$$

2. Найдем вспомогательную функцию $\chi(A)$ и $\chi(B)$:

$$\text{так как } a^{-} < a^{+} \text{, то } \chi(A) = \frac{a^{-}}{a^{+}} = \frac{1}{2},$$

$$\text{так как } b^{-} < b^{+} \text{, то } \chi(B) = \frac{b^{-}}{b^{+}} = \frac{2}{3}.$$

3. Определим знак функционала $\psi(A,B)$:

$$\text{так как } \quad \chi(A) = \frac{1}{2} < \chi(B) = \frac{2}{3}, \text{ то } \psi(A,B) = - .$$

4. Определим формулу нестандартного произведения:

$$A \times^{-} B = [a^{+-} b^{-+-},\ a^{-+-} b^{+-}] = [a^{-} b^{+},\ a^{+} b^{-}] .$$

5. Произведем непосредственные вычисления:

$$A \times^{-} B = [2 \cdot 6,\ 4 \cdot 4] = [12,\ 16] . \qquad (35)$$

Вычислим нестандартное произведение по формуле (19).

Согласно (12) интервалы (34) в форме центр-радиус имеют вид

$$A = \langle 3,\ 1 \rangle,\ B = \langle 5, 1 \rangle .$$

1. Произведем непосредственные вычисления:

$$A \times^{-} B = \langle 3 \cdot 5 - \operatorname{sgn}(3 \cdot 5) \cdot 1 \cdot 1,\ |3 \cdot 1 - \operatorname{sgn}(3 \cdot 5) \cdot 5 \cdot 1| \rangle = \langle 14,\ 2 \rangle . \qquad (36)$$

Сравним полученные результаты (35) и (36)

$$[12, 16] = [14 - 2, 14 + 2] = \langle 14,\ 2 \rangle .$$

Как видно, применение формулы нестандартного произведения интервалов в форме центр-радиус существенно уменьшает количество операций.

ВЫВОДЫ

1. В статье приведены формулы для нестандартных арифметических операций над интервалами в форме центр-радиус. Полученные формулы (13), (19), (23), (25) являются более лаконичными по сравнению с известными (2), (5) – (8) и не требуют проведения предварительной подготовки для их использования, что способствует дальнейшему исследованию алгебраических свойств интервалов.

2. Определено, какое из произведений $a^i b^j$ $(i, j = -,+)$ для интервалов, содержащих нуль, принимает наименьшее, а какое наибольшее значения, что позволяет получить решение задачи в явном виде.

3. Показано, что применение этих формул существенно облегчает реализацию интервальных операций для решения практических задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gardeñes E., Trepat A.* Fundamentals of SIGLA, an Interval Computing System over the Completed Set of Intervals // Computing. — 1980. — **24**. — P. 161–179.
2. *Alefeld G., Herzberger J.* Introduction to Interval Computation — New York: Academic Press, 1983. — 356 p.
3. *Kaucher E.* Interval Analysis in the Extended Interval Space $I(R)$ // Computing Suppl. — 1980. — **2**. — P. 33–49.
4. *Markov S.* Extended Interval Arithmetic Involving Infinite Intervals // Mathematica Balkanika. New Series. — 1992. — **6**. — P. 269–304.
5. *Popova E.D.* Algebraic Solutions to a Class of Interval Equations // Journal of Universal Computer Science. — 1998. — **4**.— P. 48–67.
6. *Жуковська О.А., Новицький В.В.* Прямий метод обчислення добутку інтервалів у формі центр-радіус // Наук. вісті НТУУ «КПІ». — 2003. — № 1. — С. 138–144.
7. *Жуковська О.А.* Метод обчислення добутку інтервалів у формі центр-радіус в розширеному інтервальному просторі // Наук. вісті НТУУ «КПІ». — 2003. — № 6. — С. 144–149.
8. *Sunaga T.* Theory of Interval Algebra and its Application to Numerical Analysis // RAAG Memoirs. — **2**. — Misc. II. — 1958. — P. 547–564.

Поступила 20.04.2004