

О передаче движения в системе двумерных сверхтекучих бозе-газов, разделенных тонкой перегородкой

С. В. Терентьев, С. И. Шевченко

*Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины,
Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47
E-mail: shevchenko@ilt.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 10 февраля 1999 г.

На основании микроскопического расчета предсказан эффект передачи движения между сверхтекучими $2D$ бозе-газами, разделенными тонкой прослойкой. Показано, что эффект существует как при отличных от нуля температурах, так и при $T = 0$ и только при условии замкнутости вторичной цепи. Для случая заряженных бозе-газов найдена зависимость тока увлечения от температуры и толщины разделяющей прослойки. Предложен эксперимент по измерению предсказанного явления.

На основі мікроскопічного розрахунка передбачено ефект передавання руху між надплинними $2D$ бозе-газами, розділеними тонким прошарком. Показано, що ефект існує як при відмінних від нуля температурах, так і при $T = 0$ та тільки при умові замкненості вторинного кола. У випадку заряджених бозе-газів знайдено залежність струму захоплення від температури та товщини прошарка, що розділяє. Запропоновано експеримент по вимірюванню передбаченого явища.

PACS: 74.25.Fy, 74.76.-w

Электронные или электрон-дырочные системы, в которых два двумерных проводящих слоя разделены тонким слоем диэлектрика, вызывают в последнее десятилетие значительный интерес. Для таких систем был предсказан ряд интересных эффектов, обусловленных взаимодействием пространственно разделенных носителей. Например, в случае, когда в одном проводящем слое носителями тока являются электроны, а в другом — дырки, много лет тому назад в [1,2] была предсказана возможность спаривания пространственно разделенных электронов и дырок и перехода системы в весьма необычное сверхпроводящее состояние, в котором сверхток в электронной области сопровождается равным ему и противоположно направленным сверхтоком в дырочной области. Авторы [3] обратили внимание на эффект взаимной поляризации пространственно разделенных носителей и предположили, что межслоевые корреляции могут способствовать вигнеровской кристаллизации в близко расположенных слоях. В [4] обсуждались особенности механизма сцепления между плоскими вихрями в параллельных сверхпроводящих пленках. И очень большое количество

работ посвящено изучению эффектов взаимного трения, или передачи движения между соседними проводящими слоями. В [5–8] экспериментально исследовалось трение между двумя электронными газами, в [9] — трение между электронным и дырочным газом, а в [10,11] — между электронами нормальной и сверхпроводящей пленок.

Теоретически проблема увлечения между двумя пространственно разделенными электронными газами была впервые рассмотрена в работе [12] и несколько позже в [13]. В этих работах изучен случай, когда увлечение обусловлено прямым кулоновским взаимодействием электронов из разных пленок. Возможность передачи движения между пространственно разделенными носителями благодаря обмену фононами была предсказана в [14]. Позже увлечение, обусловленное кулоновским взаимодействием, было исследовано в работах [15–23], а индуцированное обменом фононами, как реальными, так и виртуальными, — в работах [24,25].

При рассмотрении задачи о передаче движения от одной сверхпроводящей пленки к другой сле-

дует иметь в виду, что такая передача может осуществляться благодаря двум существенно различным механизмам. Один механизм имеет место в случае, когда пленки помещены в магнитное поле, превышающее поле H_{c1} . В этом случае передача движения связана в основном с зацеплением друг за друга вихревых решеток в ведущей и ведомой пленках. Другой механизм реализуется в отсутствие вихрей, когда передача движения обусловлена прямым (кулоновским) или косвенным (через обмен фононами) взаимодействием электронов из разных пленок. Первый механизм изучается уже много лет, начиная с пионерской работы [26]. В настоящей работе мы рассмотрим только второй механизм передачи движения.

Насколько нам известно, этот механизм теоретически изучался только в работах [27,28]. В работе [27] был развит диаграммный метод вычисления тока, индуцируемого в пленке 2 внешним полем, приложенным к пленке 1. Авторы обнаружили существенное увеличение коэффициента трения при переходе обеих пленок в сверхпроводящее состояние. При этом рассматривался лишь случай, когда температура пленок близка к температуре их сверхпроводящего перехода. Однако, что существенно важнее, в [27] осталось незамеченным, что сверхток, протекающий в ведущей пленке 1, будет индуцировать сверхток в ведомой пленке 2 лишь при условии, что электрическая цепь в пленке 2 замкнута. На это важное обстоятельство впервые обращено внимание в работе [28]. Кроме того, в [27] не учитывались коллективные моды, связанные с колебаниями плотности электронов. Эти колебания, отсутствующие в массивных сверхпроводниках из-за наличия в спектре плазменной щели, становятся возможными в тонких пленках, поскольку в пленках сопровождающие колебания плотности электрические поля в основном сосредоточены в окружающем пространстве, а не в сверхпроводнике. Вклад коллективных колебаний в передачу движения между сверхпроводящими пленками найден в работе [28]. Однако последовательный микроскопический расчет в работе [28] отсутствует, поэтому некоторые важные вопросы остались нерассмотренными, например вопрос о зависимости силы трения между сверхпроводящими пленками от величины потенциала спаривания сверхпроводящих электронов.

В настоящей работе мы рассмотрим задачу о передаче движения между двумя одинаковыми сверхпроводящими пленками при температурах, низких по сравнению с температурой сверхпроводящего перехода. В области низких температур

число одночастичных возбуждений экспоненциально мало и в первом приближении ими можно вообще пренебречь. Тогда можно получить качественно правильные результаты, заменив задачу о силе трения между сверхпроводящими электронными газами, обусловленной коллективными возбуждениями, задачей о силе трения между сверхтекучими заряженными бозе-газами. Такая замена не только позволяет найти точное решение задачи в пределе малых токов, но и установить характер изменения результатов, полученных в [28], при увеличении потенциала спаривания.

Краткое изложение результатов работы было опубликовано в [29].

1. Ток увлечения при $T = 0$

Рассмотрим задачу о передаче движения между двумя двумерными сверхтекучими бозе-газами, разделенными тонкой перегородкой, при равной нулю температуре. Хотя в дальнейшем нас будет в основном интересовать случай заряженных бозе-газов, мы сначала не будем конкретизировать вид потенциала взаимодействия между бозонами и получим ряд выражений, справедливых в общем случае. Будем считать, что бозе-газы являются одинаковыми, и исходить из гамильтониана

$$\hat{H} = \sum_{\alpha=1,2} \sum_{\mathbf{k}} \epsilon(k) \hat{a}_{\alpha}^{+}(\mathbf{k}) \hat{a}_{\alpha}(\mathbf{k}) + \frac{1}{2S} \sum_{\alpha,\beta=1,2} \sum_{\mathbf{k},\mathbf{p},\mathbf{q}} \gamma_{\alpha\beta}(k) \hat{a}_{\alpha}^{+}(\mathbf{p}-\mathbf{k}) \hat{a}_{\beta}^{+}(\mathbf{q}+\mathbf{k}) \hat{a}_{\beta}(\mathbf{q}) \hat{a}_{\alpha}(\mathbf{p}). \quad (1)$$

Здесь $\epsilon(k) = \hbar^2 k^2 / 2M$ — энергия свободного бозона; $\gamma_{\alpha\beta}(k)$ — фурье-компонента потенциала взаимодействия бозонов в слое (при $\alpha = \beta$) и между слоями (при $\alpha \neq \beta$); $\hat{a}_{\alpha}^{+}(\mathbf{k})$ и $\hat{a}_{\alpha}(\mathbf{k})$ — операторы рождения и уничтожения бозона с импульсом $\hbar\mathbf{k}$ в слое α .

Найдем энергетический спектр двухслойной бозе-системы, описываемой гамильтонианом (1). Поскольку при $T = 0$ в двумерном бозе-газе имеет место явление бозе-эйнштейновской конденсации, для нахождения энергетического спектра можно воспользоваться известной процедурой Боголюбова выделения конденсатных операторов рождения $\hat{a}_{\alpha}^{+}(0)$ и уничтожения $\hat{a}_{\alpha}(0)$ бозонов в состоянии с импульсом $\mathbf{p} = 0$ и заменить их на числа $\sqrt{N_0}$, где N_0 — число бозонов в конденсате. При этом полученное выражение следует формально разложить по степеням малых величин $\hat{a}_{\alpha}^{+}(\mathbf{k})$, $\hat{a}_{\alpha}(\mathbf{k})$ ($\mathbf{k} \neq 0$) и удержать лишь квадратичные слагае-

мые. Такое разложение неявно предполагает малость числа надконденсатных бозонов, и ниже мы установим условия, при которых сделанное предположение является оправданным.

Удобно предварительно перейти к новым операторам рождения и уничтожения

$$\hat{a}_{\pm}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\hat{a}_1(\mathbf{k}) \pm \hat{a}_2(\mathbf{k})]. \quad (2)$$

Операторы $\hat{a}_{\pm}(\mathbf{k})$, как и операторы $\hat{a}_{1,2}(\mathbf{k})$, удовлетворяют бозевским коммутационным соотношениям. После перехода к новым операторам гамильтониан представляет собой сумму двух слагаемых, каждое из которых содержит операторы $\hat{a}_{\sigma}(\mathbf{k})$, где $\sigma = \pm$, лишь одного сорта (C -числовая добавка к (3) опущена):

$$\hat{H} = \sum_{\sigma} \left\{ \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon(k) \hat{a}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k}) \hat{a}_{\sigma}(\mathbf{k}) + \frac{n}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} [\gamma(k) + \sigma \gamma_{12}(k)] \times \right. \\ \left. \times [2\hat{a}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k}) \hat{a}_{\sigma}(\mathbf{k}) + \hat{a}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k}) \hat{a}_{\sigma}^{\dagger}(-\mathbf{k}) + \hat{a}_{\sigma}(\mathbf{k}) \hat{a}_{\sigma}(-\mathbf{k})] \right\}. \quad (3)$$

Здесь n — плотность бозонов, а $\gamma(k) = \gamma_{11}(k) = \gamma_{22}(k)$. Диагонализация (3) производится с помощью стандартного uv -преобразования Боголюбова:

$$\hat{a}_{\sigma}(\mathbf{k}) = u_{\sigma}(\mathbf{k}) \hat{b}_{\sigma}(\mathbf{k}) + v_{\sigma}(\mathbf{k}) \hat{b}_{\sigma}^{\dagger}(-\mathbf{k}), \quad (4)$$

где $\hat{b}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k})$, $\hat{b}_{\sigma}(\mathbf{k})$ — операторы рождения и уничтожения бозевских квазичастиц. В результате диагонализации получаем

$$\hat{H} = E_0 + \sum_{\sigma, \mathbf{k} \neq 0} E_{\sigma}(k) \hat{b}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k}) \hat{b}_{\sigma}(\mathbf{k}), \quad (5)$$

где энергия основного состояния

$$E_0 = \frac{N^2}{2S} [\gamma(0) + \gamma_{12}(0)] + \\ + \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \mathbf{k} \neq 0} [E_{\sigma}(k) - \varepsilon(k) - n\gamma(k)], \quad (6)$$

а энергия элементарных возбуждений

$$E_{\sigma}(k) = \sqrt{\varepsilon^2(k) + 2n\varepsilon(k) [\gamma(k) + \sigma \gamma_{12}(k)]}. \quad (7)$$

Коэффициенты $u_{\sigma}(k)$, $v_{\sigma}(k)$ обычным образом выражаются через энергии $\varepsilon(k)$ и $E_{\sigma}(k)$:

$$u_{\sigma}^2(k) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\varepsilon(k) + n[\gamma(k) + \sigma \gamma_{12}(k)]}{E_{\sigma}(k)} + 1 \right\}, \\ v_{\sigma}^2(k) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\varepsilon(k) + n[\gamma(k) + \sigma \gamma_{12}(k)]}{E_{\sigma}(k)} - 1 \right\}. \quad (8)$$

Из выражений (2), (4), (5) следует, что элементарное возбуждение представляет собой образование, принадлежащее сразу всей системе, и его невозможно отнести к тому или иному отдельному слою. При этом в результате взаимодействия между слоями в системе устанавливается единое когерентное основное состояние, в котором скоррелированы фазы сверхтекучих бозе-газов.

Рассмотрим подробнее случай, когда оба бозе-газа являются заряженными. В этом случае потенциалы взаимодействия имеют вид

$$V_{\alpha\alpha} = \frac{Q^2}{\epsilon_0 r}, \quad V_{\alpha\bar{\alpha}} = \frac{Q^2}{\epsilon_0 \sqrt{r^2 + d^2}}, \quad (9)$$

где Q — заряд бозона; ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость среды; d — расстояние между двумерными слоями, в которых локализованы бозе-газы. Соответствующие фурье-компоненты равны

$$\gamma(k) = \frac{2\pi Q^2}{\epsilon_0 k}, \quad \gamma(0) = 0, \\ \gamma_{12}(k) = \frac{2\pi Q^2}{\epsilon_0 k} e^{-kd}, \quad \gamma_{12}(0) = 0. \quad (10)$$

Равенства $\gamma(0) = \gamma_{12}(0) = 0$ отражают наличие положительно заряженной подложки, компенсирующей средний заряд бозонов в слое так, чтобы система была в целом электронейтральна. Подставляя выражения (10) в (7), получаем закон дисперсии элементарных возбуждений мод «+» и «-». В длинноволновом пределе (точнее при $kd \ll 1$) из (7), (10) следует

$$E_{-} = \left(\frac{2\pi \hbar^2 n Q^2 d}{M \epsilon_0} \right)^{1/2} k; \quad E_{+} = \left(\frac{4\pi \hbar^2 n Q^2}{M \epsilon_0} \right)^{1/2} \sqrt{k}. \quad (11)$$

Из определения (2) мод «-» и «+» легко видеть, что мода «+» соответствует колебаниям бозе-газа в двух пленках как целое, в то время как мода «-» связана с колебаниями плотности в одной пленке относительно другой при неизменной полной плотности.

Интересно отметить, что выражения (11) совпадают с найденными в [30] для спектра коллективных возбуждений в двухслойной нормальной ферми-системе (следует лишь заменить заряд фермиона e и его массу m соответственно на заряд бозона $Q = 2e$ и массу $M = 2m$). При этом авторы [30] учитывали перенормировку затравочного взаимодействия фермионов, обусловленную эффектами экранирования. Для рассматриваемой системы нет необходимости дополнительно учитывать эффекты экранирования благодаря тому, что гамильтониан (1) диагонализирован точно.

Отметим также, что спектр заряженного двумерного (однослойного) бозе-газа исследовался с помощью вариационного метода в работе [31]. В длинноволновом пределе в [31] для спектра плазменных колебаний получено выражение, совпадающее с (11) после замены двумерной плотности бозонов на удвоенную плотность бозонов в двухслойной системе, рассматриваемой в настоящей работе.

Зная энергетический спектр, легко найти функцию распределения по импульсам реальных бозонов в слое α :

$$N_{\alpha}(k) = \langle \hat{a}_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{k}) \hat{a}_{\alpha}(\mathbf{k}) \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \langle \hat{a}_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{k}) \hat{a}_{\sigma}(\mathbf{k}) \rangle. \quad (12)$$

Здесь угловые скобки означают усреднение по основному состоянию. Заменяя операторы \hat{a}_{σ} их выражениями через b_{σ} и b_{σ}^{\dagger} из (4) и учитывая, что в рассматриваемом случае нулевой температуры элементарные возбуждения отсутствуют (т.е. $\langle b_{\sigma}^{\dagger} b_{\sigma} \rangle = 0$), находим

$$N_{\alpha}(k) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} v_{\sigma}^2(\mathbf{k}) = \frac{1}{8} \sum_{\sigma} \frac{[E_{\sigma}(k) - \varepsilon(k)]^2}{\varepsilon(k) E_{\sigma}(k)}. \quad (13)$$

Полное число надконденсатных бозонов в слое α равно

$$\delta N_{\alpha} = N_{\alpha} - N_{\alpha 0} = \sum_{\mathbf{k} \neq 0} N_{\alpha}(\mathbf{k}) \equiv \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \delta N_{\sigma}. \quad (14)$$

Найдем число надконденсатных частиц для кулоновских бозе-газов. В этом случае выражение для числа надконденсатных бозонов зависит от соотношения между толщиной диэлектрика d , разделяющего бозе-газы, и длиной d_0 , определяемой соотношением

$$d_0^3 = \frac{\hbar^2 \epsilon_0}{8\pi M n Q^2} = \frac{a_0}{8\pi n}, \quad (15)$$

где a_0 — эффективный борковский радиус. С помощью (13), (14) находим, что при $d \gg d_0$

$$\frac{\delta N_{+}}{N} = \frac{\delta N_{-}}{N} = (n a_0^2)^{-1/3}. \quad (16)$$

Различие энергетических спектров для «+» и «-» мод не проявляется в данном случае, поскольку при $d \gg d_0$ линейная по k часть моды $E_{-}(k)$ не дает существенного вклада в интеграл в (14). При $d \ll d_0$ получаем

$$\delta N_{+}/N = (n a_0^2)^{-1/3}, \quad (17)$$

$$\delta N_{-}/N = d/a_0. \quad (18)$$

Построенная теория опирается на тот факт, что число надконденсатных частиц мало по сравнению с числом частиц в конденсате, и, следовательно, применима при $\delta N_{\alpha}/N \ll 1$. Из (16)–(18) следует, что это неравенство выполняется, если

$$n a_0^2 \gg 1 \text{ и } d/a_0 \ll 1. \quad (19)$$

При этом ограничение $d/a_0 \ll 1$ возникает только при $d \ll d_0$. Легко убедиться, что при $n a_0^2 \gg 1$ и $d \ll d_0$ условие $d/a_0 \ll 1$ выполняется автоматически. Таким образом, для рассматриваемой двухслойной системы в случае заряженных бозе-газов условие применимости построенной теории является высокая плотность бозе-газа: $n a_0^2 \gg 1$.

Обратимся теперь к вопросу о передаче движения от сверхтекучего бозе-газа в одном слое к бозе-газу в другом слое. Если в слое 1 течет сверхтекучий поток, то полевой оператор в этом слое

$$\hat{\Psi}_1(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{\sqrt{S}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \hat{a}_1(\mathbf{k}) \quad (20)$$

приобретает дополнительный множитель $e^{i\mathbf{k}_{s1}\mathbf{r}}$, где волновой вектор \mathbf{k}_{s1} связан со сверхтекучей скоростью \mathbf{v}_{s1} соотношением $\mathbf{v}_{s1} = \hbar \mathbf{k}_{s1} / M$. Это приводит к появлению в гамильтониане (1) добавки, пропорциональной этому потоку. Если ввести оператор плотности потока частиц в слое α

$$\hat{\mathbf{j}}_{\alpha}(\mathbf{r}) = \frac{i\hbar}{2M} [(\nabla \hat{\Psi}_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r})) \hat{\Psi}_{\alpha}(\mathbf{r}) - \hat{\Psi}_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) (\nabla \hat{\Psi}_{\alpha}(\mathbf{r}))], \quad (21)$$

то добавка \hat{H}_1 к гамильтониану (1) может быть записана в виде

$$\hat{H}_1 = \int d^2r \hat{j}_1(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}_{s1}. \quad (22)$$

Благодаря взаимодействию между бозе-газами в соседних слоях протекание тока в слое 1 приводит к появлению тока в слое 2. Ток увлечения в слое 2 легко найти, вычислив линейный отклик системы на возмущение (22). В результате

$$\mathbf{j}_2 = \langle 0 | \hat{j}_2 | 0 \rangle - \sum_{n \neq 0} \frac{\langle 0 | \hat{H}_1 | n \rangle \langle n | \hat{j}_2 | 0 \rangle}{E_n - E_0} - \sum_{n \neq 0} \frac{\langle 0 | \hat{j}_2 | n \rangle \langle n | \hat{H}_1 | 0 \rangle}{E_n - E_0}. \quad (23)$$

Переходя в выражении для оператора плотности тока $\hat{j}_2(\mathbf{r})$ от операторов рождения \hat{a}_α^+ и уничтожения \hat{a}_α бозонов в слое α к операторам рождения \hat{b}_σ^+ и уничтожения \hat{b}_σ элементарных возбуждений и учитывая, что основное состояние является вакуумом для операторов \hat{b}_σ (т.е. $\hat{b}_\sigma | 0 \rangle = 0$), нетрудно показать, что плотность тока увлечения равняется

$$\mathbf{j}_2 = \frac{\mathbf{v}_{s1}}{2S} \sum_{\mathbf{k}} \epsilon(k) \frac{[v_+(k)u_-(k) - u_+(k)v_-(k)]^2}{E_+(k) + E_-(k)}. \quad (24)$$

Подставляя явные выражения для коэффициентов uv -преобразования из (8), получаем

$$\mathbf{j}_2 = \frac{\mathbf{v}_{s1}}{8S} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\epsilon(k)[E_+^2(k) - E_-^2(k)]^2}{E_+(k)E_-(k)[E_+(k) + E_-(k)]^3}. \quad (25)$$

Дальнейшие вычисления проделаем для двух заряженных бозе-газов. При этом ограничимся случаем, когда толщина диэлектрического слоя d , разделяющего бозе-газы, и введенная выше длина d_0 (см. (15)) удовлетворяют неравенству

$$d \gg d_0. \quad (26)$$

Как показывают численные оценки, при толщинах d , при которых можно пренебрегать туннелированием носителей тока из слоя в слой, неравенство (26) будет выполняться. (Более подробно обсуждение вопроса об ограничениях, накладываемых на d в реальных экспериментах, см. в разд. 3).

При выполнении неравенства (26) в выражении для энергии $E_\sigma(k)$ из (7) можно опустить первое слагаемое под радикалом. В результате нетрудно показать, что плотность тока увлечения равна

$$\mathbf{j}_2 = C \left(\frac{\hbar^2}{2\pi^3 M Q^2 n d^2} \right)^{1/2} \frac{\mathbf{v}_{s1}}{8d^2}. \quad (27)$$

Входящий сюда коэффициент C находится путем численного интегрирования:

$$C \equiv \int_0^\infty dx \frac{x^{5/2} e^{-2x}}{\sqrt{1 - e^{-2x}} (\sqrt{1 + e^{-x}} + \sqrt{1 - e^{-x}})^3} \approx 0,0406. \quad (28)$$

Таким образом, мы показали, что даже при равной нулю температуре одна сверхтекучая жидкость при своем движении должна увлекать другую сверхтекучую жидкость, отделенную от нее перегородкой, через которую не происходит туннелирование, а имеет место лишь взаимодействие частиц одной и другой жидкостей. Подчеркнем, что это заключение, как и выражение (25), справедливо при любом характере взаимодействия между бозонами.

Полученное из микроскопического расчета выражение (27) для тока увлечения в случае кулоновского взаимодействия между бозонами полезно сравнить с выражением, найденным в [28] для тока увлечения между двумя сверхпроводниками с помощью качественных рассуждений. При равной нулю температуре, согласно [28], отношение тока увлечения j_2 к току j_1 , протекающему в слое 1, должно равняться $\sqrt{2}\hbar/(48\pi n m v_F d^3)$, где m — масса фермиона, v_F — скорость на поверхности Ферми. Учитывая, что при малых k мода E_- является звуковой и скорость звука этой моды $c_- = \sqrt{2\pi n Q^2 d / M \epsilon_0}$ (см. (11)), наш результат для отношения j_2/j_1 можно записать в виде $\hbar/(200\pi n M c_- d^3)$. В этой связи нам представляется, что результат, полученный в [28], справедлив лишь в приближении слабой связи. С ростом электрон-электронного притяжения найденное в [28] выражение должно модифицироваться, и в пределе двух бозе-газов фермиевскую скорость спаривающихся электронов следует заменить на скорость звука моды E_- . Отметим, что полученный нами и в [28] результаты отличаются не только численно, но также и функциональной зависимостью. В частности, поскольку скорость c_- зависит от расстояния между бозе-газами d , то в нашем случае $j_2/j_1 \sim d^{-7/2}$, в то время как авторы [28] получили, что $j_2/j_1 \sim d^{-3}$.

2. Коллективные переменные

При температуре, отличной от нуля, метод Боголюбова становится неприменимым, поскольку в

двумерной системе при $T \neq 0$ бозе-конденсат отсутствует. Его отсутствие гарантирует теорема Боголюбова об особенностях типа $1/q^2$. Существует еще одно обстоятельство, ограничивающее применимость процедуры Боголюбова. Даже при $T = 0$, т.е. при наличии макроскопического числа частиц в конденсате, вклад в энергию отбрасываемых в гамильтониане (1) слагаемых, не содержащих конденсатные операторы, может оказаться не малым. Впервые на это обстоятельство обратил внимание Непомнящий [32], который показал, что поправки к собственно-энергетическим частям, связанные со слагаемыми, содержащими тройки и четверки надконденсатных операторов, расходятся при малых импульсах. Таким образом, вопрос о поведении системы при $k \rightarrow 0$ остается открытым.

Указанных выше недостатков лишен метод описания бозе-газа в терминах операторов плотности $\hat{\rho}$ и фазы $\hat{\phi}$. В координатном представлении связь новых переменных с полевым оператором уничтожения бозона в слое α имеет вид

$$\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r}) = \exp\{i\hat{\phi}_\alpha(\mathbf{r})\} \sqrt{\hat{\rho}_\alpha(\mathbf{r})}. \quad (29)$$

Решающими соображениями в пользу описания системы в терминах операторов $\hat{\rho}$ и $\hat{\phi}$ являются следующие. Подобно тому как для вырожденных ферми-систем очень важно учитывать принцип Паули, для вырожденных бозе-систем следует учитывать требование симметрии волновой функции или матрицы плотности при перестановке пары тождественных бозонов. Запись матрицы плотности в терминах операторов $\hat{\rho}$ позволяет учесть эту симметрию автоматически. Действительно, фурье-компонента оператора плотности может быть записана в виде

$$\hat{\rho}(\mathbf{k}) = \frac{1}{S} \sum_{j=1}^N \exp\{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_j\}, \quad (30)$$

где \mathbf{r}_j — координата j -й частицы. Отсюда очевидно на симметричность оператора $\hat{\rho}(\mathbf{k})$ относительно

перестановки пары бозонов. Однако гамильтониан не может быть записан в терминах одних только операторов плотности. Необходимы также операторы фазы $\hat{\phi}$, сопряженные с операторами $\hat{\rho}$. В двухслойной системе эти операторы удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} & \hat{\rho}_\alpha(\mathbf{q})\hat{\rho}_\beta(\mathbf{p}) - \hat{\rho}_\beta(\mathbf{p})\hat{\rho}_\alpha(\mathbf{q}) = \\ & = \hat{\phi}_\alpha(\mathbf{q})\hat{\phi}_\beta(\mathbf{p}) - \hat{\phi}_\beta(\mathbf{p})\hat{\phi}_\alpha(\mathbf{q}) = 0, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\hat{\rho}_\alpha(\mathbf{q})\hat{\phi}_\beta(-\mathbf{p}) - \hat{\phi}_\beta(-\mathbf{p})\hat{\rho}_\alpha(\mathbf{q}) = \frac{i}{S} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\mathbf{q},\mathbf{p}}, \quad (32)$$

где α — номер слоя.

Фактически переход к коллективным переменным $\hat{\rho}$ и $\hat{\phi}$ означает разложение возбуждений, возникающих в системе, на волны плотности с волновым вектором \mathbf{k} . Коллективные переменные адекватно отражают структуру возбуждений в области длинных волн и поэтому оказываются эффективными при описании свойств, связанных с учетом дальнедействующей части взаимодействия. В частности, это справедливо для систем с кулоновским взаимодействием.

Разложение на волны плотности становится непригодным для описания одночастичных возбуждений с длинами волн порядка или меньше среднего расстояния между частицами. Наиболее последовательное решение задачи состоит в разбиении полевого оператора $\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r})$ на две части (два слагаемых), отвечающие малым и большим импульсам бозонов (подробности см. в [32,33]). Однако в рассматриваемой нами области температур, низких по сравнению с критической

$$T \ll T_c, \quad (33)$$

вклад одночастичных возбуждений (например, за счет развала куперовских пар) мал и для корректного описания системы достаточно учитывать только возбуждения коллективного характера.

Гамильтониан системы, записанный в терминах операторов плотности и фазы (29), имеет вид

$$\begin{aligned} H = & \frac{\hbar^2}{2M} \sum_{\alpha=1,2} \int d^2r \left[\sqrt{\hat{\rho}_\alpha} (\nabla \hat{\phi}_\alpha)^2 \sqrt{\hat{\rho}_\alpha} + \frac{(\nabla \hat{\rho}_\alpha)^2}{4\hat{\rho}_\alpha} + \frac{i}{2} \left(\frac{\nabla \hat{\rho}_\alpha}{\sqrt{\hat{\rho}_\alpha}} \nabla \hat{\phi}_\alpha \sqrt{\hat{\rho}_\alpha} - \sqrt{\hat{\rho}_\alpha} \nabla \hat{\phi}_\alpha \frac{\nabla \hat{\rho}_\alpha}{\sqrt{\hat{\rho}_\alpha}} \right) \right] + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1,2} \int \int d^2r d^2r' \hat{\rho}_\alpha(\mathbf{r}) V_{\alpha\beta}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \hat{\rho}_\beta(\mathbf{r}') - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1,2} \int d^2r \hat{\rho}_\alpha(\mathbf{r}) V_{\alpha\alpha}(0). \end{aligned} \quad (34)$$

Представим оператор плотности в виде суммы

$$\hat{\rho}_\alpha(\mathbf{r}) = n + \delta\hat{\rho}_\alpha(\mathbf{r}), \quad (35)$$

где C -число $n = \langle \hat{\rho}_\alpha(\mathbf{r}) \rangle$ — средняя плотность бозонов в слое. Представление (29) оказывается полезным, если флуктуации плотности в системе малы, точнее, если

$$n^2 \gg \langle [\delta\hat{\rho}(\mathbf{r})]^2 \rangle. \quad (36)$$

Если в системе имеются вихри, то неравенство (36) заведомо нарушается вблизи кора вихря, где $n(\mathbf{r}) \rightarrow 0$. Поэтому представление плотность-фаза становится некорректным при наличии в системе вихрей. Однако, если выполняется условие (33), вероятность появления вихрей экспоненциально мала и мы будем полагать, что вихри в системе полностью отсутствуют. Неравенство (36) будет также нарушаться, если учитывать в правой стороне (36) колебания плотности со сколь угодно большими векторами. Это связано с расходимостью (в рамках используемого подхода) нулевых колебаний в системе на малых длинах волн. При более последовательном описании вклад нулевых колебаний будет конечным и условие (36) будет выполняться.

Неравенство (36) позволяет разложить в гамильтониане (34) кинетические слагаемые по степеням $\delta\hat{\rho}/n$. Оставив слагаемые до второго порядка малости включительно, учитывая, что $\langle \delta\hat{\rho}(\mathbf{r}) \rangle = 0$, и переходя к фурье-компонентам операторов $\hat{\rho}$ и $\hat{\phi}$, получаем

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \frac{N^2}{2S} [\gamma(0) + \gamma_{12}(0)] - \sum_{\mathbf{k}} [\varepsilon(k) + n\gamma(k)] + \\ & + S \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \sum_{\alpha=1,2} \left[n\varepsilon(k)\hat{\phi}_\alpha^+(\mathbf{k})\hat{\phi}_\alpha(\mathbf{k}) + \frac{\varepsilon(k)}{4n} \hat{\rho}_\alpha^+(\mathbf{k})\hat{\rho}_\alpha(\mathbf{k}) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1,2} \hat{\rho}_\alpha^+(\mathbf{k})\gamma_{\alpha\beta}(k)\hat{\rho}_\beta(\mathbf{k}) \right\}. \quad (37) \end{aligned}$$

Как и в предыдущей главе, перейдем вначале к сумме и разности исходных операторов:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_\pm(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\hat{\rho}_1(\mathbf{k}) \pm \hat{\rho}_2(\mathbf{k})], \\ \hat{\phi}_\pm(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\hat{\phi}_1(\mathbf{k}) \pm \hat{\phi}_2(\mathbf{k})]. \quad (38) \end{aligned}$$

Гамильтониан при этом распадается на сумму двух слагаемых, каждое из которых зависит только от переменных с одним и тем же значением σ :

$$\begin{aligned} \hat{H}_\sigma = & \frac{N^2}{2S} [\gamma(0) + \gamma_{12}(0)] - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} [\varepsilon(k) + n\gamma(k)] + \\ & + S \sum_{\mathbf{k}} \left\{ n\varepsilon(k)\hat{\phi}_\sigma^+(\mathbf{k})\hat{\phi}_\sigma(\mathbf{k}) + \right. \\ & \left. + \left[\frac{\varepsilon(k)}{4n} \frac{1}{2} [\gamma(k) + \sigma\gamma_{12}(k)] \right] \hat{\rho}_\sigma^+(\mathbf{k})\hat{\rho}_\sigma(\mathbf{k}) \right\}. \quad (39) \end{aligned}$$

Переходя от операторов $\hat{\rho}_\sigma(\mathbf{k})$ и $\hat{\phi}_\sigma(\mathbf{k})$ к операторам рождения \hat{b}_σ^+ и уничтожения \hat{b}_σ элементарных возбуждений с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_\sigma(\mathbf{k}) &= \left(\frac{\varepsilon(k)n}{E_\sigma(k)S} \right)^{1/2} [\hat{b}_\sigma(\mathbf{k}) + \hat{b}_\sigma^+(-\mathbf{k})], \\ \hat{\phi}_\sigma(\mathbf{k}) &= \frac{1}{2i} \left(\frac{E_\sigma(k)}{\varepsilon(k)nS} \right)^{1/2} [\hat{b}_\sigma(\mathbf{k}) - \hat{b}_\sigma^+(-\mathbf{k})], \quad (40) \end{aligned}$$

легко привести гамильтониан системы $H = \sum_{\sigma} H_{\sigma}$ к диагональному виду (5). При этом для энергии основного состояния E_0 и энергии элементарных возбуждений $E_\sigma(k)$ получаем прежние выражения (5) и (7) соответственно.

В отличие от метода Боголюбова применимость данного рассмотрения основана на малости отношения

$$\frac{\langle \delta\hat{\rho}^2 \rangle}{n^2} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{n} \frac{\varepsilon(k)}{E_\sigma(k)} [2\langle \hat{b}_\sigma^+(\mathbf{k})\hat{b}_\sigma(\mathbf{k}) \rangle + 1]. \quad (41)$$

Здесь, в отличие от предыдущего раздела, угловые скобки означают термодинамическое среднее. Если пренебрегать флуктуациями плотности, обусловленными нулевыми колебаниями (которые не возникают при более последовательном подходе), полученное выражение оказывается малым при температурах, низких по сравнению с характерной энергией взаимодействия бозонов.

Покажем теперь, каким образом в описанном формализме можно найти плотность частиц, находящихся в конденсате при $T = 0$. Для этого найдем связь между операторами $\hat{\rho}(\mathbf{q})$, $\hat{\phi}(\mathbf{q})$ и операторами рождения \hat{a}_α^+ и уничтожения \hat{a}_α реальных бозонов. Выражение для оператора $\hat{\rho}$ с очевидностью следует из равенства $\hat{\rho}(\mathbf{r}) = \hat{\psi}^+(\mathbf{r})\hat{\psi}(\mathbf{r})$. Переходя к фурье-компонентам, получаем

$$\hat{\rho}_\alpha(\mathbf{q}) = \frac{1}{S} \sum_{\mathbf{p}} \hat{a}_\alpha^+(\mathbf{p} - \mathbf{q}/2) \hat{a}_\alpha(\mathbf{p} + \mathbf{q}/2). \quad (42)$$

Выражение для оператора фазы может быть найдено следующим образом. Оператор плотности тока в $\rho\phi$ -представлении имеет вид

$$\hat{\mathbf{j}}_\alpha(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{M} \sqrt{n + \delta\hat{\rho}_\alpha(\mathbf{r})} (\nabla\hat{\phi}_\alpha(\mathbf{r})) \sqrt{n + \delta\hat{\rho}_\alpha(\mathbf{r})}. \quad (43)$$

Если справедливо предположение о малости флуктуаций плотности (36), то в первом приближении оператор плотности тока выражается через градиент оператора фазы и среднюю плотность бозонов в слое $\hat{\mathbf{j}}_\alpha = (\hbar n/M) \nabla\hat{\phi}_\alpha$. С другой стороны, связь оператора плотности тока с операторами рождения и уничтожения частиц дается известным выражением

$$\hat{\mathbf{j}}_\alpha(\mathbf{q}) = \frac{\hbar}{MS} \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{q} \hat{a}_\alpha^+(\mathbf{p} - \mathbf{q}/2) \hat{a}_\alpha(\mathbf{p} + \mathbf{q}/2). \quad (44)$$

Приравнивая оба выражения для оператора плотности тока, находим оператор фазы $\hat{\phi}$ как функцию \hat{a}_α^+ и \hat{a}_α :

$$\hat{\phi}_\alpha(\mathbf{q}) = -\frac{i}{nS} \frac{\mathbf{q}}{q^2} \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{p} \hat{a}_\alpha^+(\mathbf{p} - \mathbf{q}/2) \hat{a}_\alpha(\mathbf{p} + \mathbf{q}/2). \quad (45)$$

Поскольку это выражение является приближенным, определяемый с его помощью оператор фазы удовлетворяет коммутационным соотношениям, отличным от (31), (32). Учитывая, что операторы \hat{a}_α^+ и \hat{a}_α удовлетворяют бозевским коммутационным соотношениям, легко убедиться с помощью (42), (45), что

$$\hat{\phi}(\mathbf{q}) \hat{\phi}(\mathbf{p}) - \hat{\phi}(\mathbf{p}) \hat{\phi}(\mathbf{q}) = \frac{i}{N} \frac{(p^2 - q^2)\mathbf{q}\mathbf{p}}{q^2 p^2} \hat{\phi}(\mathbf{q} + \mathbf{p}), \quad (46)$$

$$\hat{\rho}(\mathbf{q}) \hat{\phi}(\mathbf{p}) - \hat{\phi}(\mathbf{p}) \hat{\rho}(\mathbf{q}) = -\frac{i}{N} \hat{\rho}(\mathbf{q} + \mathbf{p}). \quad (47)$$

Покажем, что в термодинамическом пределе, т.е. при $N \rightarrow \infty$, $S \rightarrow \infty$, $n = N/S$ — конечная величина, коммутационные соотношения (46), (47) переходят в (31), (32). Если $\mathbf{q} \neq -\mathbf{p}$, то в правой части выражений (46), (47) стоит величина того же порядка, что и в левой, деленная на полное число частиц. Поэтому в этом случае при $N \rightarrow \infty$ правую часть равенств можно считать равной нулю. Если $\mathbf{q} = -\mathbf{p}$, то, поскольку $\rho_0 = n \equiv N/S$, мы получаем из (47) выражение (32). В (46) при

$\mathbf{q} \rightarrow -\mathbf{p}$ следует учитывать, что при малых импульсах оператор фазы $\hat{\phi}(\mathbf{q}) \sim 1/q$. Эта расходимость $\hat{\phi}(\mathbf{q} + \mathbf{p})$ в правой части (46) компенсируется множителем $p^2 - q^2$. Поэтому если $N \rightarrow \infty$, то при $\mathbf{q} \rightarrow -\mathbf{p}$ выражение (46) снова переходит в (31).

Полученные выражения для операторов $\hat{\rho}(\mathbf{q})$ и $\hat{\phi}(\mathbf{q})$ можно упростить при $T = 0$. Поскольку при $T = 0$ в системе имеется бозе-конденсат, причем в рассматриваемом нами случае число надконденсатных частиц мало по сравнению с полным числом частиц, в суммах по \mathbf{p} в (42), (45) можно оставить лишь слагаемые, для которых аргумент одного из операторов обращается в нуль. При этом оператор $\hat{a}_\alpha^+(0)$ или $\hat{a}_\alpha(0)$ можно заменить на S -число $\sqrt{N_0} \approx \sqrt{N}$. В результате легко видеть, что

$$\hat{\rho}_\sigma(k) = \frac{\sqrt{N}}{S} [\hat{a}_\sigma^+(-\mathbf{k}) + \hat{a}_\sigma(\mathbf{k})], \quad (48)$$

$$\hat{\phi}_\sigma(\mathbf{k}) = \frac{i}{2\sqrt{N}} [\hat{a}_\sigma^+(-\mathbf{k}) - \hat{a}_\sigma(\mathbf{k})]. \quad (49)$$

С помощью этих выражений приходим к соотношению

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2S} [\hat{a}_\sigma^+(\mathbf{k})\hat{a}_\sigma(\mathbf{k}) + \hat{a}_\sigma^+(-\mathbf{k})\hat{a}_\sigma(-\mathbf{k}) + 1] = \\ & = n\hat{\phi}_\sigma^+(\mathbf{k})\hat{\phi}_\sigma(\mathbf{k}) + \frac{1}{4n} \hat{\rho}_\sigma^+(\mathbf{k})\hat{\rho}_\sigma(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (50)$$

Усредняя обе стороны (50) по основному состоянию (напоминаем, что мы рассматриваем случай $T = 0$) и учитывая, что

$$N_\sigma(\mathbf{k}) \equiv \langle \hat{a}_\sigma^+(\mathbf{k})\hat{a}_\sigma(\mathbf{k}) \rangle = \langle \hat{a}_\sigma^+(-\mathbf{k})\hat{a}_\sigma(-\mathbf{k}) \rangle, \quad (51)$$

для функции распределения реальных бозонов получаем

$$N_\alpha(k) = \frac{S}{2} \sum_{\sigma} \left[n \langle \hat{\phi}_\sigma^+(\mathbf{k})\hat{\phi}_\sigma(\mathbf{k}) \rangle + \frac{1}{4n} \langle \hat{\rho}_\sigma^+(\mathbf{k})\hat{\rho}_\sigma(\mathbf{k}) \rangle - \frac{1}{2S} \right]. \quad (52)$$

Записывая $\hat{\rho}$ и $\hat{\phi}$ через операторы элементарных возбуждений \hat{b} , \hat{b}^+ и учитывая, что $\langle \hat{b}^+\hat{b} \rangle = 0$, приходим к выражению для функции распределения реальных бозонов, которая в точности совпадает с функцией распределения (13), полученной методом Боголюбова.

Таким образом, мы показали, что переход к $\rho\phi$ -представлению позволяет решить задачу об энергетическом спектре $2D$ бозе-газа в отсутствие в системе бозе-конденсата. При $T = 0$ этот метод

дает результаты, совпадающие с результатами известного метода Боголюбова.

3. Ток увлечения при $T \neq 0$

Прежде чем получить выражение для тока увлечения при отличных от нуля температурах, отметим важную особенность, отличающую проблему увлечения в сверхтекучих и сверхпроводящих системах от таковой в нормальных системах. Наличие фазовой когерентности в сверхсистемах приводит, как известно, к возможности введения S -числового комплексного параметра порядка. Фаза параметра порядка (точнее, ее градиент) определяет величину сверхтока, протекающего в системе. Выше мы учли появление S -числовой фазы в слое 1 с помощью множителя $e^{ik_{s1}r}$ при полевом операторе $\hat{\psi}_1$, действующем в слое 1. В общем случае аналогичный множитель $e^{ik_{s2}r}$ необходимо учитывать и при полевом операторе $\hat{\psi}_2$, действующем во втором слое. Величина вектора \mathbf{k}_s должна находиться из условия минимума энергии (точнее свободной энергии) системы.

При этом следует различать случай разомкнутых концов в слое 2 и случай замкнутых концов, когда слой 2 представляет собой многосвязную систему. В случае разомкнутых концов, как мы покажем ниже, значение \mathbf{k}_{s2} , которое следует из условия минимума энергии, приводит к нулевому току увлечения, т.е. $\mathbf{j}_{s2} \equiv 0$. В случае замкнутых концов ввиду квантования циркуляции $\oint \nabla\phi \cdot d\mathbf{l} = 2\pi n$, где $n = 0, 1, 2, \dots$, вектор \mathbf{k}_s может принимать лишь дискретный ряд значений. В результате ток \mathbf{j}_{s2} в общем случае будет отличен от нуля. Везде далее мы полагаем, что величина \mathbf{k}_{s1} задана внешними условиями, а \mathbf{k}_{s2} определяется системой в зависимости от того, замкнуты ли концы, а также остальными параметрами, влияющими на ток увлечения.

Связанная со сверхтекучими токами линейная по \mathbf{k}_{s1} и \mathbf{k}_{s2} добавка к гамильтониану (5) имеет вид

$$\begin{aligned} M \int d^2r (\mathbf{v}_{s1} \hat{\mathbf{j}}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{v}_{s2} \hat{\mathbf{j}}_2(\mathbf{r})) = \\ = \frac{\hbar^2}{M} \int d^2r [\mathbf{k}_{s1} \sqrt{\hat{\rho}_1(\mathbf{r})} (\nabla \hat{\phi}_1(\mathbf{r})) \sqrt{\hat{\rho}_1(\mathbf{r})} + \\ + \mathbf{k}_{s2} \sqrt{\hat{\rho}_2(\mathbf{r})} (\nabla \hat{\phi}_2(\mathbf{r})) \sqrt{\hat{\rho}_2(\mathbf{r})}]. \end{aligned} \quad (53)$$

После перехода к операторам рождения \hat{b}_σ^+ и уничтожения \hat{b}_σ возбуждений для гамильтониана системы с учетом токовых слагаемых (53) имеем

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}', \quad (54)$$

где

$$\hat{H}_0 = E_0 + \sum_{\sigma, \mathbf{k}} \left(E_\sigma(k) + \frac{\hbar^2 \mathbf{k}(\mathbf{k}_{s1} + \mathbf{k}_{s2})}{2M} \right) \hat{b}_\sigma^+(\mathbf{k}) \hat{b}_\sigma(\mathbf{k}), \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}' = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar^2 \mathbf{k}(\mathbf{k}_{s1} - \mathbf{k}_{s2})}{4M \sqrt{E_+ E_-}} \left\{ (E_+ - E_-) [\hat{b}_+^+(\mathbf{k}) \hat{b}_+^+(-\mathbf{k}) + \right. \\ \left. + \hat{b}_+(\mathbf{k}) \hat{b}_+(-\mathbf{k})] + (E_+ + E_-) [\hat{b}_+^+(\mathbf{k}) \hat{b}_-(\mathbf{k}) + \hat{b}_+^+(\mathbf{k}) \hat{b}_+(\mathbf{k})] \right\}. \end{aligned} \quad (56)$$

Рассмотрим сначала случай замкнутых концов 2-го слоя и предположим, что $\mathbf{k}_{s2} = 0$. Найдем ток, который возникнет в этом слое как отклик на возмущение системы током в слое 1. При отличных от нуля температурах выражение для линейного отклика на возмущение (формула Кубо) имеет вид

$$\langle \hat{\mathbf{j}}_2 \rangle = \langle \hat{\mathbf{j}}_2(t) \rangle_0 + \int_{-\infty}^t \frac{dt'}{i\hbar} \langle (\hat{\mathbf{j}}_2(t) \hat{H}'(t') - \hat{H}'(t') \hat{\mathbf{j}}_2(t)) \rangle_0, \quad (57)$$

где угловые скобки $\langle \dots \rangle_0$ означают теперь термодинамическое усреднение с гамильтонианом \hat{H}_0 . Операторы $\hat{\mathbf{j}}(t)$ и $\hat{H}'(t)$ записаны в представлении взаимодействия

$$\hat{A}(t) = e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} \hat{A} e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}. \quad (58)$$

Введем следующее обозначение для функций распределения квазичастиц:

$$\begin{aligned} \langle \hat{b}_\sigma^+(\mathbf{k}) \hat{b}_\sigma(\mathbf{k}) \rangle_0 \equiv n_\sigma(\mathbf{k}) = \\ = \left[\exp \left(\frac{E_\sigma(k) + \hbar^2 \mathbf{k} \mathbf{k}_{s1} / 2M}{T} \right) - 1 \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (59)$$

Раскладывая функцию распределения по степеням \mathbf{k}_{s1} до линейных слагаемых

$$n_\sigma(\mathbf{k}) \approx n_\sigma^0(\mathbf{k}) + \frac{\hbar^2 \mathbf{k} \mathbf{k}_{s1}}{2M} \frac{\partial n_\sigma^0}{\partial E_\sigma}, \quad (60)$$

получаем следующее выражение для плотности тока увлечения:

$$\mathbf{j}_2 = \frac{1}{S} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar \mathbf{k}_{s1}}{4M} \varepsilon(k) \left\{ \frac{\partial n_+^0}{\partial E_+} + \frac{\partial n_-^0}{\partial E_-} + \frac{(E_+ - E_-)^2}{2E_+ E_- (E_+ + E_-)} \times \right. \\ \left. \times [n_+^0(\mathbf{k}) + n_-^0(\mathbf{k}) + 1] - \frac{(E_+ + E_-)^2}{2E_+ E_- (E_+ - E_-)} [n_+^0(\mathbf{k}) - n_-^0(\mathbf{k})] \right\}. \quad (61)$$

При $T = 0$ квазичастицы в системе отсутствуют (т.е. $n_\sigma^0(\mathbf{k}) = 0$) и выражение (61) переходит в (25), найденное с помощью метода Боголюбова.

Чтобы вычислить ток увлечения в случае как замкнутых, так и разомкнутых концов второго слоя, найдем свободную энергию системы. Недиагональные слагаемые H' учтем по теории возмущений:

$$F = F_0 - \sum_{n \neq m} \frac{\langle m | \hat{H}' | n \rangle \langle n | \hat{H}' | m \rangle}{E_n^0 - E_m^0} \exp \frac{F_0 - E_m^0}{T}, \quad (62)$$

где

$$F_0 = -T \ln \left[\text{Sp} \exp \left(-\frac{\hat{H}_0}{T} \right) \right] = E_0 + \\ + T \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \ln \left[1 - \exp \left(-\frac{E_\sigma(k) + \hbar^2 \mathbf{k}(\mathbf{k}_{s1} + \mathbf{k}_{s2})/2M}{T} \right) \right], \quad (63)$$

$$E_m^0 = E_0 + \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \left(E_\sigma(k) + \frac{\hbar^2 \mathbf{k}(\mathbf{k}_{s1} + \mathbf{k}_{s2})}{2M} \right) n_\sigma(\mathbf{k}), \quad (64)$$

где $n_\sigma(\mathbf{k})$ — числа заполнения состояния σ с импульсом $\hbar \mathbf{k}$. После несложных выкладок приходим к выражению для свободной энергии:

$$F = E_0 + T \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \ln \left[1 - \exp \left(-\frac{\hbar^2 \mathbf{k}(\mathbf{k}_{s1} + \mathbf{k}_{s2})/2M}{T} \right) \right] - \\ - \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}(\mathbf{k}_{s1} - \mathbf{k}_{s2})}{4M} \right)^2 \frac{1}{2E_+ E_-} \left\{ \frac{(E_+ - E_-)^2}{E_+ + E_-} [n_+(\mathbf{k}) + \right. \\ \left. + n_-(\mathbf{k}) + 1] - \frac{(E_+ + E_-)^2}{E_+ - E_-} [n_+(\mathbf{k}) - n_-(\mathbf{k}) + 1] \right\}. \quad (65)$$

Средняя плотность потока частиц \mathbf{j}_α в слое α выражается через свободную энергию с помощью известного термодинамического соотношения

$$\mathbf{j}_\alpha = \frac{1}{\hbar S} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{k}_{s\alpha}}. \quad (66)$$

Продифференцировав (65) по \mathbf{k}_{s2} , положив в ответе $\mathbf{k}_{s2} = 0$ (что будет соответствовать режиму с замкнутыми концами) и удерживая лишь слагаемые, пропорциональные \mathbf{k}_{s1} в первой степени, мы приходим в точности к выражению (61) для тока в слое 2.

При разомкнутых концах следует исходить из минимума свободной энергии и рассматривать множитель $e^{i\mathbf{k}_{s2}\mathbf{r}}$ как отклик системы на ток в слое 1. Необходимо вычислить производную $\partial F / \partial \mathbf{k}_{s2}$ и приравнять ее нулю. Полученное уравнение определит значение волнового вектора \mathbf{k}_{s2} . Однако условие $\partial F / \partial \mathbf{k}_{s2} = 0$ в силу (66) означает, что ток в слое 2 будет равен нулю.

Остановимся на этом вопросе подробнее. Будем описывать возникшую ситуацию в терминах двух токов. Если полевой оператор, действующий в слое α , имеет вид $\hat{\Psi}_\alpha = \exp \{ i\mathbf{k}_{s\alpha} \mathbf{r} \} \hat{\psi}_\alpha$, то, перейдя в выражении (21) для оператора плотности потока частиц $\hat{\mathbf{j}}$ от операторов $\hat{\Psi}_\alpha$, $\hat{\Psi}_\alpha^+$ к $\hat{\psi}_\alpha$, $\hat{\psi}_\alpha^+$, получаем

$$\hat{\mathbf{j}}_\alpha(\hat{\Psi}(\mathbf{r})) = \frac{\hbar \mathbf{k}_{s\alpha}}{M} \hat{\psi}_\alpha^+(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{j}}_\alpha(\hat{\psi}(\mathbf{r})). \quad (67)$$

Первое слагаемое в правой части (67) зависит от величины $\mathbf{k}_{s\alpha}$ и определяет компоненту сверхтекучего тока в слое α , непосредственно связанную с разностью фаз параметра порядка на концах слоя. Второе слагаемое в правой части (67) не зависит от $\mathbf{k}_{s\alpha}$ и определяется взаимодействием между слоями. В случае разомкнутых концов из минимума свободной энергии следует, что эти два слагаемых в точности компенсируют друг друга. Если же концы структуры замкнуты, то первое слагаемое принимает дискретный ряд значений, тогда как второе — непрерывный. В этом случае их сумма может быть отлична от нуля.

Найдем величину плотности тока увлечения \mathbf{j}_2 в случае кулоновских бозе-газов. При этом будем предполагать, что выполняются неравенства

$$d \gg d_0, \quad T \ll T_0 \equiv \left(\frac{2\pi n Q^2 \hbar^2}{M \epsilon_0 d} \right)^{1/2}. \quad (68)$$

Первое из этих неравенств позволяет опустить в выражениях для энергетического спектра (7) слагаемое $\epsilon^2(k)$ под знаком радикала. При выполнении второго неравенства можно пренебречь возбуждениями «+»-мод при отличных от нуля температурах. Последнее утверждение вытекает из того, что при данной температуре T возбужденны моды, у которых $E(k) \leq T$. Предельное волновое число, удовлетворяющее этому условию, есть

$$k_c \approx \left(\frac{M\epsilon_0 T^2}{2\pi Q^2 n \hbar^2 d} \right)^{1/2}, \quad (69)$$

а при $k < k_c$ отношение $E_+^2/E_-^2 > T_0/2T \gg 1$.

Оценки показывают, что условия (68) легко выполнимы на эксперименте. Так, для характерных значений $n = 10^{15} \text{ см}^{-2}$, $M = 2m_0$, где m_0 — масса свободного электрона, $Q = 2e$, $\epsilon_0 = 10$, $d = 10^{-6} \text{ см}$, имеем $d_0 = 6 \cdot 10^{-9} \text{ см}$, $T_0 \approx 4 \cdot 10^3 \text{ К}$.

С учетом (68) получаем из (61) следующее выражение для плотности тока увлечения заряженных бозе-газов:

$$\mathbf{j}_2 = \frac{1}{8\pi n_s} \frac{\hbar^2}{M d^4} \frac{1}{T_0} \left\{ 0,0406 - 2\zeta(3) \left(\frac{T}{T_0} \right)^3 \right\} \mathbf{j}_1. \quad (70)$$

Здесь $\zeta(y)$ — дзета-функция Римана, а T_0 — температура, введенная в (68).

Прежде чем обсуждать эксперимент по обнаружению увлечения между электронами в пространственно разделенных сверхпроводящих системах, следует отметить принципиальные особенности этого эффекта. В случае нормальных систем в одном проводящем слое пропускают ток, а в другом слое, концы которого разомкнуты, измеряют разность потенциалов. Этот метод не пригоден для сверхпроводящих слоев, так как электрическое поле не может существовать в сверхпроводнике. Условием существования эффекта является замкнутость вторичной цепи. В отличие от нормальных систем эффект передачи движения связан не с передачей импульса от одного слоя к другому (в рассматриваемом приближении в гамильтониане отсутствуют диссипационные слагаемые), а с перераспределением сверхтока между слоями. Последнее утверждение вытекает из того факта, что добавка к току в слое 1, вычисленная аналогично (61), равна току в слое 2, но имеет противоположный знак.

Особенности эффекта увлечения в двухслойных сверхпроводящих системах обуславливают необходимость экспериментального измерения,

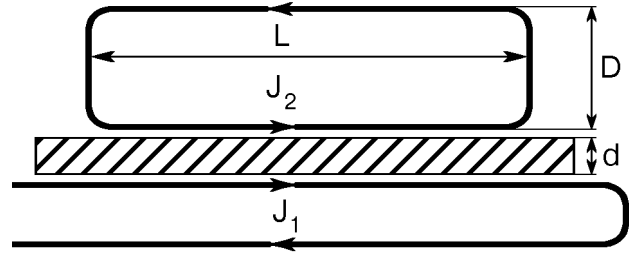


Рис. 1. Схематическое изображение эксперимента по обнаружению эффекта увлечения между сверхпроводящими слоями. Нижний сверхпроводящий слой загибнут, чтобы избежать возбуждения тока в верхнем слое за счет магнитного поля нижнего слоя.

например, магнитного потока, создаваемого круговым сверхтоком во вторичной цепи. Найдем величину потока для случая, изображенного на рис. 1. В полное выражение для плотности электрического тока \mathbf{J}_2 в слое 2 (мы обозначаем его большой буквой, чтобы отличить от плотности потока частиц \mathbf{j}_2) входит дополнительное слагаемое, связанное с порождаемым этим током магнитным полем:

$$\mathbf{J}_2 = \frac{Q\hbar \mathbf{k}_{s2}}{M} n_s + Q\mathbf{j}_2 - \frac{Q^2 n_s}{Mc} \mathbf{A}, \quad (71)$$

где \mathbf{A} — векторный потенциал этого поля. Оценки (70) показывают, что величина \mathbf{j}_2 достаточно мала и минимуму энергии отвечает $\mathbf{k}_{s2} = 0$.

Полный ток в нижней и верхней пленках должен равняться соответственно $-(Q^2 n_s / Mc)\mathbf{A}_L + Q\mathbf{j}_2$ и $-(Q^2 n_s / Mc)\mathbf{A}_H$, где \mathbf{A}_L и \mathbf{A}_H — значения векторного потенциала в нижней и верхней пленках. Решая уравнение Максвелла $\text{rot } \mathbf{H} = 4\pi\mathbf{J}/c$, нетрудно найти, что

$$J_2 = \frac{Qj_2}{2 + \gamma}, \quad \text{где } \gamma = \frac{4\pi n_s Q^2 D}{Mc^2}. \quad (72)$$

Здесь D — расстояние между верхней и нижней пленками вторичной цепи (см. рис. 1). Связанный с током J_2 магнитный поток между пленками равен

$$\Phi \equiv HDL = \frac{4\pi}{c} \frac{Qj_2}{2 + \gamma} DL. \quad (73)$$

При $\gamma \ll 1$ магнитный поток линейно растет с увеличением D . При $\gamma \approx 1$ он выходит на насыщение и при $\gamma \gg 1$ поток Φ от D уже не зависит. При этом

$$\Phi = \Phi_{\max} = \frac{0,02e\hbar L J_1}{Q^2 T_0 (2\pi n_s d^2)^2} \Phi_0, \quad (74)$$

где $\Phi_0 = hc/2e$ — квант магнитного потока.

Приведем теперь численные оценки. При $n_s = n = 10^{15} \text{ см}^{-2}$, $Q = 2e$, $M = 2m_0$ безразмерная константа γ порядка единицы при $D \approx 10^{-4} \text{ см}$. Если $D \gg 10^{-4} \text{ см}$, то $\gamma \gg 1$ и поток $\Phi = \Phi_{\max}$. При оценке потока Φ_{\max} следует учитывать, что он сильно зависит от d ($\Phi_{\max} \sim d^{-7/2}$) и брать d как можно меньше. При этом d должно оставаться достаточно большим, чтобы можно было пренебрегать туннелированием электронов через диэлектрический слой, разделяющий первичную и вторичную цепи. Для $d \approx 50 \text{ \AA}$, $L = 1 \text{ см}$, $v_{s1} = 10^4 \text{ см/с}$, поток $\Phi_{\max} \approx 3 \cdot 10^{-5} \Phi_0$.

Таким образом, на основании микроскопического расчета с помощью метода Боголюбова и с использованием формализма коллективных переменных установлено существование эффекта передачи движения между двумерными бозе-газами, разделенными тонкой прослойкой. Результаты получены для произвольного вида взаимодействия между слоями и подробно исследован случай заряженных бозе-газов. Ситуация с заряженными бозе-газами, как мы полагаем, качественно верно описывает явление увлечения между двумерными пленками из «куперовских» сверхпроводников. Для случая заряженных бозе-газов найдена зависимость тока увлечения от температуры и толщины разделяющей прослойки. При любом виде потенциала взаимодействия эффект существует как при отличной от нуля температуре, так и при $T = 0$, причем в случае заряженных бозе-газов величина тока увлечения падает с ростом температуры. В отличие от нормальных систем передача движения между сверхтекучими слоями существует лишь при замкнутых концах вторичной цепи. Она связана не с передачей импульса между слоями, а с установлением за счет межслоевого взаимодействия единого когерентного состояния, в котором в обоих слоях скоррелированы фазы параметров порядка. Предложена схема эксперимента по обнаружению предсказанного явления. Расчет показывает, что величина магнитного потока, возникающего во вторичной цепи в результате увлечения, находится в пределах, доступных для измерений современными средствами.

Настоящая работа частично поддержана грантом INTAS № 97-0972.

1. С. И. Шевченко, *ФНТ* **2**, 505 (1976).
2. Ю. Е. Лозовик, В. И. Юдсон, *ЖЭТФ* **71**, 738 (1976).
3. L. Swierkowski and D. Nelson, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 240 (1991).
4. E. Shimshon, *Phys. Rev.* **B51**, 9415 (1995).
5. P. M. Solomon, P. J. Price, D. J. Frank, and D. C. L. Tulipe, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 2508 (1989).
6. T. J. Gramila, J. P. Eisenstein, A. H. MacDonald, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1216 (1991).
7. T. J. Gramila, J. P. Eisenstein, A. H. MacDonald, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, *Phys. Rev.* **B47**, 12957 (1993).
8. H. Rubel, E. H. Linfield, D. A. Ritchie, K. M. Brown, M. Pepper, and G. A. C. Jones, *Semicond. Sci. Technol.* **10**, 1229 (1995).
9. U. Sivan, P. M. Solomon, and H. Shtrikman, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1195 (1992).
10. N. Giordano and J. D. Monnier, *Phys. Rev.* **B50**, 9363 (1994).
11. X. Huang, G. Bazán, and G. H. Bernstein, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4051 (1995).
12. М. Б. Погребинский, *Физика и техника полупроводников* **11**, 637 (1977).
13. P. J. Price, *Physica* **B117**, 750 (1983).
14. Р. Н. Гуржи, А. И. Копелиович, *Письма в ЖЭТФ* **26**, вып. 3, 150 (1977).
15. B. Laikhtman and P. M. Solomon, *Phys. Rev.* **B41**, 9921 (1990).
16. I. I. Boiko and Yu. M. Sirenko, *Phys. Status Solidi* **159**, 805 (1990).
17. A. G. Rojo and G. D. Mahan, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 2074 (1992).
18. Ji-Min Duan, *Europhys. Lett.* **29**, 489 (1995).
19. L. Zheng and A. H. MacDonald, *Phys. Rev.* **B48**, 8203 (1993).
20. A.-P. Jahuo and H. Smith, *Phys. Rev.* **B47**, 4420 (1993).
21. K. Flensberg, B. Yu-Kuang Hu, A.-P. Jahuo, and D. Huang, *Phys. Rev.* **B52**, 14761 (1995).
22. K. Flensberg and B. Yu-Kuang Hu, *Phys. Rev.* **B52**, 14796 (1995).
23. B. Tanatar, *Solid State Communs.* **99**, 1 (1996).
24. H. C. Tso, P. Vasilopoulos, and F. M. Peeters, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 2516 (1992).
25. J. Mao, Qi Huang, W. Cheng, and J. Zhon, *J. Phys.: Condens. Matter* **5**, 5019 (1993).
26. I. Giaever, *Phys. Rev. Lett.* **15**, 825 (1965).
27. A. Kamenev and Y. Oreg, *Phys. Rev.* **B52**, 7516 (1995).
28. J.-M. Duan and S. Yip, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 3647 (1993).
29. С. И. Шевченко, С. В. Терентьев, *ФНТ* **23**, 1088 (1997).
30. K. Flensberg and B. Y.-K. Hu, *Phys. Rev.* **B52**, 14796 (1995).
31. V. Arajá, J. Halinen, V. Halonen, E. Krotschek, and M. Saarela, *Phys. Rev.* **B55**, 12925 (1997).
32. Ю. А. Непомнящий, *ЖЭТФ* **85**, 1244 (1983).
33. В. Н. Попов, *Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике*, Атомиздат, Москва (1976).

On momentum transport in a system of
two-dimensional superfluid Bose-gases
separated by a thin layer

S. V. Terentjev and S. I. Shevchenko

An effect of momentum transport between superfluid $2D$ Bose-gases separated by a thin layer is

predicted on the basis of microscopic calculations. The effect is shown to exist both at nonzero temperatures and at $T = 0$ and only if the secondary circuit is closed. A relation between drag current and temperature and thickness of the separating layer is obtained for charged Bose-gases. An experiment is proposed to measure the effect predicted.