УДК 519.872

# УМОВА СТІЙКОСТІ СИСТЕМИ ОБСЛУГОВУВАННЯ $GI/G/1$ З $T$-ПОВЕРНЕННЯМ ЗАЯВОК

**О.В. КОБА**

Розглянуто систему обслуговування $GI/G/1$, в якій у випадку зайнятості каналу заявка спрямовується на орбіту, з якої повертається через сталий час $T$. Нехай $a$ — середній інтервал між заявками, $\tau$ — середній час обслуговування. Тоді за умови $(T+\tau)/a<1$ існує стаціонарний режим системи. Доведено, що цю умову неможливо істотно покращити.

**1. Вступні зауваження.** Розв'язувана в даній статті задача належить до аналізу систем обслуговування з повторенням заявок (з повторними викликами) [1, 2]. У випадку, що розглядається, час, через який заявки повторюються, дорівнює сталому $T$ із ймовірністю 1. Нашим завданням буде встановлення достатньої умови стійкості системи, якщо відомі значення $T$, середнього часу $\tau$ обслуговування заявки та середнього часу $a$ між надходженням заявок.

Слід зазначити, що фактично всю теорію систем з поверненням заявок розвинено для випадку, коли час перебування заявки на орбіті має експоненціальну щільність розподілу. В цьому разі важливо знати тільки загальне число цих заявок, що і пояснює розвинення теорії систем саме з марковським поверненням.

Між тим, у задачах прикладного характеру, особливо у задачах з автоматизацією, марковська модель не є адекватною. Час перебування заявки на орбіті в таких системах часто є детермінованим [3] або має загальний розподіл.

Це і спричинило появу деяких інших робіт автора, наприклад, [4, 5].

**2. Достатня умова стійкості системи.** Розглянемо систему з поверненням заявок типу $GI/G/1$ з $T$-поверненням. Моменти надходження заявок в систему $t_n,\ n\ge 0,\ t_0=0$. Інтервали між надходженням заявок $\xi_n=t_n-t_{n-1},\ n\ge 1$. Позначимо $A(x)$ функцію розподілу довжини інтервалу $\xi_n$ між надходженням заявок, $B(x)$ — функцію розподілу часу обслуговування $n$-ї заявки. Нехай

$$a=\int_0^\infty x\,dA(x),\quad \tau=\int_0^\infty x\,dB(x),$$

$T$ — сталий час перебування заявки на орбіті, $W_n$ — час чекання $n$-ї заявки. Вважатимемо, що в початковий момент часу система вільна від заявок.

**Теорема 1.** За умови

$$\frac{T+\tau}{a}<1$$

випадкова величина $W_n$ має граничний розподіл, тобто

$$\mathrm{P}\{W_n \le x\} \underset{n\to\infty}{\to} F(x),$$

де $F(x)$ — деяка функція розподілу.

**Доведення.** Теорему буде доведено за допомогою порівняння даної системи з поверненням заявок з системою $GI/G/1$ з чеканням, у якої $\xi_n$ — те ж саме, що і у вихідної системи, а час обслуговування $\eta_n = T + Y_n$.

Відомо [6], що за умови

$$\rho = \frac{\mathrm{E}\{\eta_n\}}{\mathrm{E}\{\xi_n\}} < 1$$

математичне сподівання числа заявок, які обслужені за період зайнятості системи $GI/G/1$, скінченне.

Без обмеження загальності покладемо, що період зайнятості системи $GI/G/1$ починається в момент $t_0$ надходження першої заявки. Якщо $N_Q$ — число заявок, що обслужені за цей період зайнятості, то для будь-якого $n \ge 0$ маємо

$$\mathrm{P}\{N_Q > n\} = \mathrm{P}\{\eta_0 \ge \xi_1, \ldots, \eta_0 + \ldots + \eta_{n-1} \ge \xi_1 + \ldots + \xi_n\}.$$

Повернемося тепер до системи обслуговування з поверненням заявок. Нехай $N_{RQ}$ — число заявок, які обслужені за період зайнятості, що почався в момент $t_0$. Цей період складається з часу обслуговування $Y_k$ та інтервалів між ними довжиною $U_k$. Очевидно,

$$\mathrm{P}\{N_{RQ} > n\} = \mathrm{P}\{Y_0 \ge \xi_1,\ Y_0 + U_1 + Y_1 \ge \xi_1 + \xi_2, \ldots$$

$$\ldots, Y_0 + U_1 + Y_1 + \ldots + U_{n-1} + Y_{n-1} \ge \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n\}. \qquad (1)$$

Розглянемо стан системи з поверненням заявок в момент закінчення деякого обслуговування. Якщо до цього моменту період зайнятості не закінчився, то деяке число заявок знаходиться на орбіті, тому повернення з орбіти відбудеться раніше, ніж через час $T$. Таким чином, $U_k \le T$. Тоді з (1) випливає, що

$$\mathrm{P}\{N_{RQ} > n\} \le \mathrm{P}\{(Y_0 + T) \ge \xi_1, \ldots, (Y_0 + T) + \ldots + (Y_{n-1} + T) \ge \xi_1 + \ldots + \xi_n\} =$$

$$= \mathrm{P}\{\eta_0 \ge \xi_1, \ldots, \eta_0 + \ldots + \eta_{n-1} \ge \xi_1 + \ldots + \xi_n\} = \mathrm{P}\{N_Q > n\}.$$

Підсумовуючи по $n$, знайдемо

$$\mathrm{E}\{N_{RQ}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}\{N_{RQ} > n\} \le \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}\{N_Q > n\} = \mathrm{E}\{N_Q\} < \infty . \qquad (2)$$

Якщо в моменти $t_n$ заявка, що надходить, застає систему вільною, то відбувається деяка рекурентна подія. З (2) випливає, що вона додатна.

Оцінимо умовну ймовірність $q$ події $\{$*в момент* $(t_{n+1}-)$ *система вільна*$\}$ при умові $\{$*в момент* $(t_n-)$ *система вільна*$\}$.

Маємо

$$q = \mathrm{P}\{Y_{n-1} \le \xi_n\}.$$

Якщо припустити, що $q = 0$, то

$$\mathrm{P}\left\{\frac{1}{n}(Y_0 + \ldots + Y_{n-1}) \le \frac{1}{n}(\xi_1 + \ldots + \xi_n)\right\} = 0$$

для будь-якого $n$, що неможливо, оскільки за законом великих чисел

$$\frac{1}{n}(Y_0 + \ldots + Y_{n-1}) \underset{n\to\infty}{\to} \tau ,$$

$$\frac{1}{n}(\xi_1 + \ldots + \xi_n) \underset{n\to\infty}{\to} a \quad \text{(за ймовірністю)}$$

і $\tau < a$. Таким чином, $q > 0$, а тому рекурентна подія аперіодична. Оскільки вона також додатна, то є ергодичною. Існування граничного розподілу $W_n$ виводиться з теорії рекурентних подій [7].

Теорему доведено.

**3. Неможливість поліпшення отриманої оцінки.**

**Теорема 2.** Для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує така система $RQ$ з $T$-поверненням, для якої

$$\frac{T + \tau}{a} = 1 + \varepsilon$$

і час чекання $W_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$ за ймовірністю.

**Доведення.** Візьмемо довільне $p \in (0,1)$ і припустимо, що $T = 1$, $\mathrm{P}\{\xi_n = 1\} = p,\ \mathrm{P}\{\xi_n = 0\} = q = 1 - p.$ Відносно $Y_n$ припустимо лише, що вони додатні, з математичним сподіванням $\tau < \infty$.

У будь-який момент $t = n$ в систему надходить група $S_n$ заявок (припустимо, що $S_n$ незалежні випадкові величини), де

$$\mathrm{P}\{S_n = k\} = pq^{k-1},\ \ k \ge 1,$$

звідки

$$\mathrm{E}\{S_n\} = \frac{1}{p}.$$

Позначимо $L_n$ число заявок на орбіті в момент $(n+).$ Для цієї величини виконується рекурентна нерівність

$$L_n \geq (L_{n-1} + S_n - 1)_+, \tag{3}$$

оскільки в момент $n$ повертаються всі заявки, відправлені на орбіту в момент $n-1$ і до них приєднується нова група $S_n$ заявок, за виключенням однієї, що вже обслуговується, якщо $L_{n-1} + S_n > 0$ і попереднє обслуговування закінчено. (Якщо $Y_n \leq 1$ з ймовірністю 1, то (3) буде рівністю.)

Рівняння

$$L_n = (L_{n-1} + S_n - 1)_+$$

можна інтерпретувати як співвідношення для величини черги в системі $GI/D/1$, в якій час обслуговування дорівнює 1, і в будь-який момент $t = n$ надходить геометрично розподілена група заявок. Оскільки навантаження такої системи

$$\rho = \frac{\mathrm{E}\{S_n\}\mathrm{E}\{Y_n\}}{\mathrm{E}\{\textit{інтервал між пучками}\}} = \frac{(1/p)1}{1} = \frac{1}{p} > 1,$$

то [7]

$$L_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty \tag{4}$$

з ймовірністю 1. (Перехід від рівності до нерівності (3) лише підсилює твердження.)

Позначимо $Q_n$ число заявок на орбіті в момент $(t_n)$. Тоді $Q_n \geq L_{t_n - 1}$. Очевидно, $t_n \to \infty$ при $n \to \infty$ з ймовірністю 1. Звідси і з (4)

$$Q_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty \tag{5}$$

з ймовірністю 1. Якщо $Q_n \geq K$, то також $Q_{n+i} \geq K - i$, $i > 0$, а тому ймовірність того, що $n$-а заявка не буде взята на обслуговування за час $k$,

$$\mathrm{P}\{W_n > k\} \geq \frac{K - k - 1}{K}. \tag{6}$$

Внаслідок (5) права частина (6) прямує до 1 при $n \to \infty$ при будь-якому $k$, тобто $W_n \to \infty$, $n \to \infty$ за ймовірністю.

Оскільки в даному прикладі $T = 1$, $\mathrm{E}\{\xi_n\} = a = p$, то

$$\frac{T+\tau}{a} = \frac{1+\tau}{p}.$$

Щоб задовольнити умову теореми, достатньо взяти $\tau < \varepsilon$ і покласти $p = \dfrac{1+\tau}{1+\varepsilon}$.

Теорему доведено.

**4. Умова, за якої кожна заявка буде обслужена.** У п. 2 було виведено достатню умову стійкості системи обслуговування з $T$-поверненням типу $GI/G/1$, яку в загальному випадку покращити неможливо (теорема 2). Проте у випадку конкретних розподілів потоку та обслуговування, напевне, можливі й точніші оцінки, але ця задача складна. Так, точна умова стійкості системи $M/D/1$ з $T$-поверненням авторові невідома.

У цьому параграфі доведемо, що у випадку системи $M/D/1$ за умови $\rho = \lambda\tau < 1$ і будь-якого $T \geq \tau$ кожна заявка буде обслужена із ймовірністю 1.

Нехай $t_n$ — момент надходження $n$-ї заявки. Введемо подію $C_{nk}$ :{$n$ *-та заявка не взята на обслуговування до моменту* $m + kt$ *включно*}. Якщо ця подія наступила, то в кожний з моментів $t_n, t_n + T, ..., t_n + kT$ обслуговується або яка-небудь з перших $n-1$ заявок, або заявка, що надійшла в деякому інтервалі

$$(t_n jT - \tau, t_n + jT),\ 1 \leq j \leq k .$$

Загальне число таких заявок — пуассонівська випадкова величина $N_{nk}$ з параметром $k\rho$ .

Таким чином, маємо

$$\mathrm{P}\{C_{nk}\} \leq \mathrm{P}\{N_{nk} > k - n\}.$$

Оскільки математичне сподівання

$$\mathrm{E}\{N_{nk}\} = k\rho$$

і дисперсія

$$\sigma^2\{N_{nk}\} = k\rho ,$$

то за нерівністю Чебишева при $k > n/(1-\rho)$

$$\mathrm{P}\{N_{nk} > k - n\} = \mathrm{P}\{N_{nk} - \mathrm{E}\{N_{nk}\} > k(1-\rho) - n\} \leq \frac{k\rho}{(k(1-\rho)-n)^2} \underset{k\to\infty}{\to} 0.$$

За аксіомою неперервності знаходимо, що із ймовірністю 1 знайдеться таке $k_n$, при якому $n$-та заявка обслужиться в інтервалі $(t_n + k_n T$ , $t_n + k_n T + \tau)$ , що і треба було довести.

**ЛІТЕРАТУРА**


1. *Yang T., Templeton J.G.C.* A survey on retrial queues // Queueing Systems. — 1987. — № 2. — P. 201–233.
2. *Falin G.I., Templeton J.G.C.* Retrial Queues. — London: Chapman & Hall, 1997. — 328 p.
3. *Lakatos L.* A probability model connected with landing of airplanes // Safety and Reliability. — A.A.Balkema / Rotterdam / Brookfield. — 1999. — **1**. — P. 151–154.
4. *Коба О.В.* Достаточное условие эргодичности системы *M/D/1* с *T*-возвращением и приоритетом задержанных заявок // Доповіді НАН України.— 2003. — № 5. — С.17–20.
5. *Коба О.В.* Стаціонарні характеристики системи масового обслуговування *GI/G/1* із *T*-поверненням при обслуговуванні в порядку черги // Вісник національного авіаційного ун-ту. — 2003. — № 1. — С. 122–125.
6. *Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. — М.: Наука, 1987. — 336 с.
7. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. **1**. — М.: Мир, 1984. — 528 с.


*Надійшла 05.04.2004*