УДК 536.24

ГРАНИЧНА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ШАРУ З ЧУЖОРІДНИМ ЦИЛІНДРИЧНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

В. І. ГАВРИШ, Д. В. ФЕДАСЮК, А. І. КОСАЧ

Національний університет "Львівська політехніка"

За узагальненими функціями отримано рівняння теплопровідності з розривними та сингулярними коефіцієнтами для ізотропного шару з чужорідним включенням циліндричної форми, що виділяє тепло. За допомогою кусково-лінійної апроксимації температури на межових поверхнях включення та інтегрального перетворення Ганкеля побудовано аналітичний розв'язок граничної задачі теплопровідності з тепловіддачею. Виконано числовий аналіз для розглядуваної системи.

Ключові слова: *ізотропний шар, теплопровідність, тепловіддача, чужорідне включення, конвективний теплообмін, ідеальний тепловий контакт, надлишкова температура.*

Під час проектування окремих вузлів та елементів конструкцій мікроелектронної апаратури необхідно математично моделювати теплові процеси в структурах із чужорідними включеннями, що є одним із важливих етапів сучасних інженерних досліджень. Для побудови та вивчення таких моделей потрібно розробити нові ефективні методи розв'язування крайових задач математичної фізики.

Чужорідні включення в структурах значно ускладнюють математичні моделі, однак з їх урахуванням підвищується точність результатів дослідження, а це вимагає побудови нових алгоритмів та розробки відповідних програмних засобів для аналізу температурних режимів в окремих вузлах та конструктивних елементах мікроелектронних пристроїв.

Деякі дослідження теплопровідності тіл одновимірної кусково-однорідної структури виконано раніше [1]. Розглянуто [2] плоскі задачі теплопровідності для кусково-однорідних тіл з тріщинами, які зведено до розв'язування сингулярних інтегральних рівнянь методом механічних квадратур.

Нижче сформульовано граничну осесиметричну стаціонарну задачу теплопровідності та побудовано аналітичний розв'язок для ізотропного шару з чужорідним включенням циліндричної форми та тепловіддачею. Наближений аналітичний розв'язок для півпростору з таким включенням, розміри якого є малі, отримано в праці [3]. Наведено [4, 5] загальні рівняння теплопровідності для кусково-однорідних тіл.

Формулювання задачі. Розглянемо ізотропний шар товщиною $2l + h + d$, в якому знаходиться циліндричне включення з радіусом R та висотою $2l$, віднесений до циліндричної системи координат (r, φ, z) із початком у центрі включення. В області $\Omega_0 = \{(r,z): r \le R, |z| \le l\}$, що займає включення, діють рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла потужністю q_0. На межових поверхнях включення $K_R = \{(R,z): |z| \le l\}$ та $K_{\pm l} = \{(r, \pm l): r \le R\}$ відбувається ідеальний тепловий контакт, а на аналогічних поверхнях шару $\Gamma_\pm = \{(r, \pm l \pm h): 0 < r < \infty\}$ задано конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем зі сталою температурою t_c (рис. 1).

Контактна особа: А. І. КОСАЧ, e-mail: kosand88@gmail.com

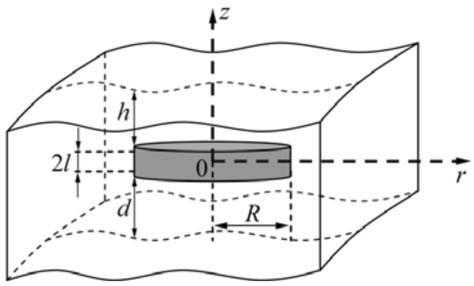

Рис. 1. Ізотропний шар з чужорідним циліндричним включенням, що виділяє тепло.

Fig. 1. An isotropic layer with a foreign heat dissipating cylindrical inclusion.

Побудова вихідного рівняння теплопровідності. Розподіл осесиметричного стаціонарного температурного поля $t(r,z)$ в розглядуваній системі можна отримати шляхом розв'язання рівняння теплопровідності [4, 5]

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\lambda(r,z)\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)+ \\ +\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(r,z)\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)= \\ =-q_0\cdot S_-(R-r)\cdot N(z) \tag{1}$$

з граничними умовами

$$\lambda_1\frac{\partial\theta}{\partial z}\bigg|_{z=l+h}=-\alpha_+\,\theta\big|_{z=l+h},\ \lambda_1\frac{\partial\theta}{\partial z}\bigg|_{z=-l-d}=\alpha_-\,\theta\big|_{z=-l-d},\quad \theta\big|_{r\to\infty}=0,\ \frac{\partial\theta}{\partial r}\bigg|_{r\to\infty}=0, \tag{2}$$

де

$$\lambda(r,z)=\lambda_1+(\lambda_0-\lambda_1)\cdot S_-(R-r)\cdot N(z)- \tag{3}$$

коефіцієнт теплопровідності неоднорідного шару; λ_1,λ_0 – коефіцієнти теплопровідності основного матеріалу та включення; $\alpha_\pm$ – коефіцієнти тепловіддачі з межових поверхонь $\Gamma_\pm=\{(r,\pm l\pm h):0<r<\infty\}$; $\theta=t-t_c$; $N(z)=S_-(z+l)-S_+(z-l)$;

$S_\pm(\zeta)=\begin{cases}1, & \zeta>0,\\ 0{,}5\mp 0{,}5, & \zeta=0,\\ 0, & \zeta<0\end{cases}$ – асиметричні одиничні функції [6].

Введемо функцію [7, 8]

$$T=\lambda(r,z)\cdot\theta \tag{4}$$

і продиференціюємо її за змінними r та z, враховуючи опис коефіцієнта теплопровідності $\lambda(r,z)$ (3). У результаті отримаємо:

$$\lambda(r,z)\frac{\partial\theta}{\partial r}=\frac{\partial T}{\partial r}+(\lambda_0-\lambda_1)\cdot\theta\big|_{r=R}\cdot N(z)\cdot\delta_+(r-R), \\ \lambda(r,z)\frac{\partial\theta}{\partial z}=\frac{\partial T}{\partial z}+(\lambda_0-\lambda_1)\cdot\left[\theta\big|_{z=l}\cdot\delta_+(z-l)-\theta\big|_{z=-l}\cdot\delta_-(z+l)\right]\cdot S_-(r-R), \tag{5}$$

де $\delta_\pm(\zeta)=\dfrac{dS_\pm(\zeta)}{d\zeta}$ – асиметричні дельта-функції Дірака [6].

Підставивши вирази (5) у співвідношення (1), приходимо до диференціального рівняння з частинними похідними із розривними та сингулярними коефіцієнтами [8]:

$$\Delta T+(\lambda_0-\lambda_1)\left\{\left[\frac{1}{R}\delta_+(r-R)+\delta'_+(r-R)\right]\cdot\theta\big|_{r=R}\cdot N(z)+\right. \\ \left.+\left[\theta\big|_{z=l}\cdot\delta'_+(z-l)-\theta\big|_{z=-l}\cdot\delta'_-(z+l)\right]\cdot S_-(R-r)\right\}=-q_0\cdot S_-(R-r)\cdot N(z). \tag{6}$$

Тут $\Delta=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial}{\partial r}\right)+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа в циліндричній системі координат.

Побудова аналітичного розв'язку задачі. Апроксимуємо функції $\theta\big|_{r=R}$, $\theta\big|_{z=\pm l}$ у вигляді [8]

$$\begin{gathered}
\theta\big|_{r=R} = \theta_1^{(R)} + \sum_{i=1}^{n-1} (\theta_{i+1}^{(R)} - \theta_i^{(R)}) \cdot S_-(z - z_i), \\
\theta\big|_{z=l} = \theta_1^{(l)} + \sum_{j=1}^{m-1} (\theta_{j+1}^{(l)} - \theta_j^{(l)}) \cdot S_-(r - r_j), \\
\theta\big|_{z=-l} = \theta_1^{(-l)} + \sum_{k=1}^{p-1} (\theta_{k+1}^{(-l)} - \theta_k^{(-l)}) \cdot S_-(r - r_k),
\end{gathered} \tag{7}$$

де $z_i \in \left]-l;l\right[$; $z_1 \le z_2 \le ... \le z_{n-1}$; $r_j \in \left]0;R\right[$; $r_1 \le r_2 \le ... \le r_{m-1}$; $r_k \in \left]0;R\right[$; $r_1 \le r_2 \le ... \le r_{p-1}$; $\theta_i^{(R)}$, $\theta_j^{(l)}$, $\theta_k^{(-l)}$ – невідомі апроксимаційні значення температури.

Підставивши вирази (7) у рівняння (6), отримаємо:

$$\begin{gathered}
\Delta T = (\lambda_1 - \lambda_0)\left\{\left[\frac{1}{R}\delta_+(r-R) + \delta'_+(r-R)\right]\left[\theta_1^{(R)} N(z) + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\theta_{i+1}^{(R)} - \theta_i^{(R)}\right) N(z, z_i)\right] + \right. \\
+\left[\theta_1^{(l)} S_-(R-r) + \sum_{j=1}^{m-1} (\theta_{j+1}^{(l)} - \theta_j^{(l)}) \cdot M(r, r_j)\right]\delta'_+(z-l) - \\
\left. - \left[\theta_1^{(-l)} S_-(R-r) + \sum_{k=1}^{p-1} (\theta_{k+1}^{(-l)} - \theta_k^{(-l)}) \cdot M(r, r_k)\right]\delta'_-(z+l)\right\} - q_0 S_-(R-r) N(z).
\end{gathered} \tag{8}$$

Тут $N(z, z_i) = S_-(z - z_i) + S_+(z - l)$; $M(r, r_s) = S_-(r - r_s) - S_+(r - R)$, $s = j, k$.

Застосувавши інтегральне перетворення Ганкеля за координатою r до рівняння (8) та граничних умов (2) із урахуванням співвідношення (4), приходимо до звичайного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{gathered}
\frac{d\overline{T}}{dz^2} - \xi^2 \overline{T} = (\lambda_1 - \lambda_0)\left\{R\xi I_1(R\xi)\left[\theta_1^{(R)} N(z) + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\theta_{i+1}^{(R)} - \theta_i^{(R)}\right) N(z, z_i)\right] + \right. \\
+\frac{1}{\xi}\left[(R \cdot I_1(R\xi) \cdot \theta_1^{(l)} + \sum_{j=1}^{m-1} (\theta_{j+1}^{(l)} - \theta_j^{(l)})(R \cdot I_1(R\xi) - r_j I_1(r_j \xi)))\delta'_+(z-l) - \right. \\
\left.\left. -(R \cdot I_1(R\xi) \cdot \theta_1^{(-l)} + \sum_{k=1}^{p-1} (\theta_{k+1}^{(-l)} - \theta_k^{(-l)})(R \cdot I_1(R\xi) - r_k I_1(r_k \xi)))\delta'_-(z+l)\right]\right\} - \\
-\frac{Rq_0}{\xi} I_1(R\xi) N(z)
\end{gathered} \tag{9}$$

і граничних умов

$$\left.\frac{d\overline{T}}{dz}\right|_{z=l+h} = -\frac{\alpha_1}{\lambda_1}\overline{T}\Big|_{z=l+h}, \quad \left.\frac{d\overline{T}}{dz}\right|_{z=-l-d} = \frac{\alpha_2}{\lambda_1}\overline{T}\Big|_{z=-l-d}, \tag{10}$$

де $\overline{T} = \int_0^\infty r \cdot I_0(r\xi) T dr$ – трансформанта функції T; ξ – параметр інтегрального перетворення Ганкеля; $I_\nu(\zeta)$ – функція Бесселя першого роду ν-го порядку.

Розв'язавши граничну задачу (9), (10) та застосувавши обернене інтегральне перетворення Ганкеля, одержимо вираз

$$T(r,z) = (\lambda_1 - \lambda_0)\Big[R(\theta_1^{(R)}F_1(r,z) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}(\theta_{i+1}^{(R)} - \theta_i^{(R)})F_1(r,z,z_i) + \theta_1^{(l)}F_2(r,z) - \theta_1^{(-l)}F_3(r,z)) +$$

$$+\sum_{j=1}^{m-1}\left(\theta_{j+1}^{(l)} - \theta_i^{(l)}\right)F_2(r,z,r_j) - \sum_{k=1}^{p-1}\left(\theta_{k+1}^{(-l)} - \theta_k^{(-l)}\right)F_3(r,z,r_k)\Big] - Rq_0F_4(r,z), \qquad (11)$$

де

$$F_t(r,z) = \int_0^\infty I_1(R\xi)I_0(r\xi)\varphi_t(\xi,z)d\xi,\ t=\overline{1,4}; F_1(r,z,z_i) = \int_0^\infty I_1(R\xi)I_0(r\xi)\varphi_1(\xi,z,z_i)d\xi;$$

$$F_t(r,z,r_s) = \int_0^\infty \big[RI_1(R\xi) - r_sI_1(r_s\xi)\big]\cdot I_0(r\xi)\varphi_t(\xi,z)d\xi,\ t=\overline{2,3}; s=j,k;$$

$$\varphi_1(\xi,z) = ch\xi(z+l)S_-(z+l) - ch\xi(z-l)S_+(z-l) - N(z) + f_1(\xi)\Phi(\xi,z);$$

$$\varphi_2(\xi,z) = ch\xi(z-l)S_+(z-l) + f_2(\xi)\Phi(\xi,z); \varphi_3(\xi,z) = ch\xi(z+l)S_-(z+l) + f_3(\xi)\Phi(\xi,z);$$

$$\varphi_4(\xi,z) = \frac{1}{\xi^2}\varphi_1(\xi,z); \varphi_1(\xi,z,z_i) = ch\xi(z-z_i)S_-(z-z_i) - ch\xi(z-l)S_+(z-l) - N(z,z_i) +$$

$$+f_1(\xi,z_i)\Phi(\xi,z); \Phi(\xi,z) = \frac{1}{P(\xi)}\cdot\left[(\xi+\frac{\alpha_-}{\lambda_1})e^{\xi(z+l+d)} + (\xi-\frac{\alpha_-}{\lambda_1})e^{-\xi(z+l+d)}\right];$$

$$P(\xi) = (\xi-\frac{\alpha_+}{\lambda_1})\cdot(\xi-\frac{\alpha_-}{\lambda_1})e^{-\xi(2l+h+d)} - (\xi+\frac{\alpha_+}{\lambda_1})\cdot(\xi+\frac{\alpha_-}{\lambda_1})e^{\xi(2l+h+d)};$$

$$f_1(\xi) = \xi\big[sh\xi(2l+h) - sh\xi h\big] + \frac{\alpha_+}{\lambda_1}\big[ch\xi(2l+h) - ch\xi h\big];\ f_2(\xi) = \xi sh\xi h + \frac{\alpha_+}{\lambda_1}ch\xi h;$$

$$f_3(\xi) = \xi sh\xi(2l+h) + \frac{\alpha_+}{\lambda_1}ch\xi(2l+h); f_1(\xi,z_i) =$$

$$= \xi\big[sh\xi(l+h-z_i) - sh\xi h\big] + \frac{\alpha_+}{\lambda_1}\big[ch\xi(l+h-z_i) - ch\xi h\big].$$

Невідомі апроксимаційні значення температури $\theta_i^{(R)}$, $\theta_j^{(l)}$, $\theta_k^{(-l)}$ знаходимо, розв'язуючи систему $n+m+p$ лінійних алгебричних рівнянь, отриманих з виразу (11).

Отже, шукане температурне поле в неоднорідному шарі описує формула (11). Зі співвідношення (11) дістаємо значення температури в довільній точці шару та чужорідного включення.

Аналіз числових результатів. Виконано числовий аналіз безрозмірної надлишкової температури $T^* = T/(q_0R^2)$ для значень критерію Біо $\mathrm{Bi}_1 = \alpha_+ \cdot R/\lambda_1$, $\mathrm{Bi}_2 = \alpha \cdot R/\lambda_1$ і таких вихідних даних: матеріал шару – кераміка ВК94–І $(\lambda_1 = 13{,}4\ \mathrm{W/(m{\times}K)})$, матеріал включення – срібло $(\lambda_0 = 419\ \mathrm{W/(m{\times}K)})$, $p = m = 5$ – кількість розбиттів інтервалу $]0;R[$; $n = 10$ – кількість розбиттів інтервалу $]-l;l[$; $L = l/R = 1$; $D = d/R = 1$.

Побудовано (рис. 2) залежність температури T^* від безрозмірних координат $\rho = r/R$ та $Z = z/R$ для $H = = h/R = 2$, $\text{Bi}_1 = 10$, $\text{Bi}_2 = 15$. Як бачимо, максимальна температура досягається в області включення, причому для значень $\rho \geq 5$ і $-2 \leq Z \leq 3$ вона практично дорівнює температурі середовища t_c.

Рис. 3*a* ілюструє зміну температури T^* залежно від аксіальної *Z*, а рис. 3*b* – цю ж зміну від радіальної ρ координат для $H = h/R = 2$, $\text{Bi}_1 = 10$, $\text{Bi}_2 = 15$. Як видно із графіків, на межових поверхнях *Z* = –2, *Z* = 3 шару та для $\rho \geq 5$ температура практично дорівнює температурі середовища.

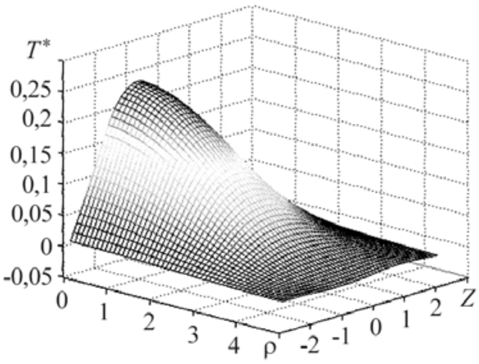

Рис. 2. Залежність надлишкової безрозмірної температури T^* від безрозмірних координат ρ та *Z*.

Fig. 2. Dependence of dimensionless excess temperature, T^*, on dimensionless coordinates ρ and *Z*.

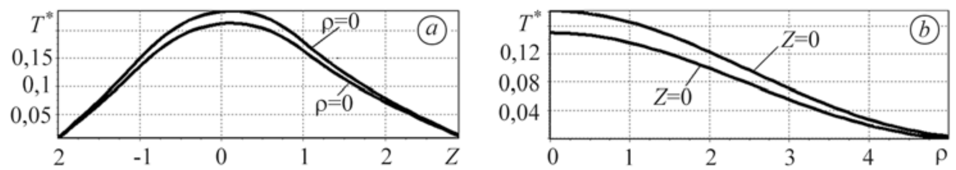

Рис. 3. Залежність надлишкової безрозмірної температури T^* від безрозмірних координат *Z* (*a*) та ρ (*b*) .

Fig. 3. Dependence of dimensionless excess temperature, T^*, on dimensionless coordinates *Z* (*a*) and ρ (*b*).

Побудовано (рис. 4*a*) залежність температури T^* від координати *Z* для різних значень критерію Bi_1, коли $H = h/R = 2$, $\text{Bi}_2 = 15$. Як бачимо, тепловіддача впливає на розподіл температури для вказаних даних і в області включення, причому зі збільшенням критерію Bi_1 температура падає. Рис. 4*b* відтворює зміну температури T^* від величини *H* (безрозмірна відстань від межової поверхні шару $Z = L + H$ до межової поверхні включення $Z = L$) для $\text{Bi}_1 = 10$, $\text{Bi}_2 = 15$, $\rho = 0{,}5$, $Z = 0{,}5$. Із зростанням параметра *H* температура підвищується, що відповідає поданій моделі.

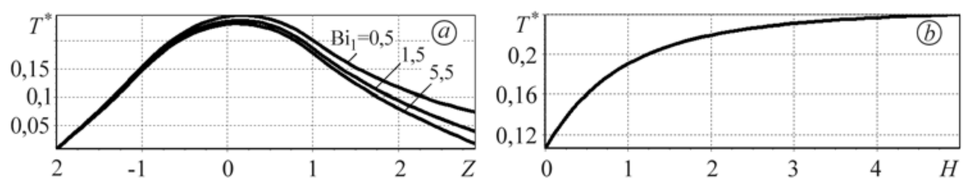

Рис. 4. Залежність надлишкової безрозмірної температури T^* від безрозмірної координати *Z* для ρ = 0,5 (*a*) та параметра *H* (*b*).

Fig. 4. Dependence of dimensionless excess temperature, T^*, on dimensionless coordinate *Z* for ρ = 0.5 (*a*) and parameter *H* (*b*).

ВИСНОВКИ

Запропонована методика знаходження температури в шарі з чужорідним включенням і тепловіддачею дає можливість ефективно досліджувати температурні режими в конструктивних елементах мікроелектронних пристроїв, що необхідно для їх теплового проектування, підвищення термотривкості та продовження терміну експлуатації. Проаналізовано числові результати, отримані на основі розробленого алгоритму та програмних засобів, і встановлено, що для вказаних матеріалів шару, включення та значень геометричних параметрів тепловіддача впливає на розподіл температурного поля і в області включення, причому для радіальної $\rho \geq 5$ та аксіальної $-2 \leq Z \leq 3$ координат вона практично дорівнює температурі середовища.

РЕЗЮМЕ. С использованием обобщенных функций получено уравнение теплопроводности с разрывными и сингулярными коэффициентами для изотропного слоя с инородным тепловыделяющим включением цилиндрической формы. С помощью кусочно-линейной аппроксимации температуры на граничных поверхностях включения и интегрального преобразования Ханкеля построено аналитическое решение граничной задачи теплопроводности с теплоотдачей. Выполнен численный анализ для рассматриваемой системы.

SUMMARY. The heat equation with discontinuous and singular coefficients for an isotropic layer with a foreign heat dissipating cylindrical inclusion has been obtained using general functions. The analytical solution of thermal conduction boundary problem with heat emission has been conducted by means of piecewise-linear approximation of temperature on the inclusion limiting surfaces and integral Hankel transform. Numerical analysis for the system under consideration has been conducted.

1. *Беляев Н. В., Рядно А. А.* Методы теории теплопроводности. Ч. I. – М.: Высш. шк., 1982. – 327 с.
2. *Саврук М. П., Зеленяк В. М.* Двовимірні задачі термопружності для кусково-однорідних тіл з тріщинами: монографія. – Львів: Вид-во "Растр-7", 2009. – 212 с.
3. *Температурное* поле в полупространстве с инородным включением / Ю. М. Коляно, Ю. М. Кричевец, Е. Г. Иваник, В. И. Гаврыш // Инж.-физ. журн. – 1988. – **55**, № 6. – С.1006 –1011.
4. *Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М.* Термоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984. – 368 с.
5. *Коляно Ю. М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.
6. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1977. – 720 с.
7. *Коляно Ю. М., Кричевец Ю. М., Гаврыш В. И.* Уравнение теплопроводности для элементов микроэлектроники // Радиоэлектронное материаловедение. Ч. II. – Львов, 1989. – С. 175–183.
8. *Гавриш В. І., Волошин М. М.* Визначення температурного поля в окремому елементі інтегральної схеми // Тези доп. Першої міжнар. конф. "Конструкційні та функціональні матеріали" КФМ'93. Теорія, експеримент, взаємодія. 20–23 вересня 1993. – Львів, 1993. – С. 32–33.

Одержано 17.05.2010