УДК 539.3

ПРУЖНИЙ ПІВПРОСТІР З НЕОДНОРІДНИМ ПОКРИВОМ ПІД ДІЄЮ ДОТИЧНИХ ЗУСИЛЬ

Р. КУЛЬЧИЦЬКИЙ-ЖИГАЙЛО, А. БАЙКОВСЬКИЙ

Білостоцький технічний університет, Польща

Розглянуто тривимірну задачу теорії пружності про навантаження неоднорідного півпростору дотичними зусиллями, розподіленими в круговій області його поверхні. Півпростір складається з однорідної основи і поверхневого неоднорідного шару, коефіцієнт Пуассона якого сталий, а залежність модуля Юнґа від відстані до поверхні півпростору описує показникова функція. Розв'язок задачі теорії пружності, що враховує неперервну залежність модуля Юнґа від координати, порівняно з розв'язком задачі, в якій неоднорідний шар замінено пакетом однорідних шарів.

Ключові слова: *пружний півпростір, неоднорідний покрив, дотичне навантаження.*

Методи розв'язування задач теорії пружності для неоднорідного півпростору, механічні властивості якого залежать від відстані до його поверхні, розроблялись уже в 50–70-х роках минулого століття [1–11]. В останньому десятиріччі увага дослідників зосередилась [12–21] на обчисленні напружень у неоднорідному пружному покриві, який використовують для поліпшення трибологічних характеристик пар тертя. Поряд з аналітичними методами розв'язування [12–16] використовують підхід, згідно з яким неоднорідний покрив моделюють пакетом однорідних чи неоднорідних шарів [17–21].

Аналізуючи напружений стан, що виникає за контактної взаємодії тіл, дослідники часто зосереджуються на обчисленні розтягальних напружень в околі ненавантаженої поверхні тіл [22–25]. У задачі про ковзання кулі по поверхні однорідного півпростору [23], чи півпростору покритого однорідним шаром [25], припускають, що ділянкою контакту є круг, а сили тертя розподілені за еліптичним законом. Розглядувана задача є тривимірна, методи розв'язування якої у випадку неоднорідного покриву мало розроблені.

Нижче запропоновано аналітичний метод розв'язування тривимірної задачі теорії пружності про навантаження дотичними зусиллями поверхні пружного півпростору з неоднорідним пружним покривом, коефіцієнт Пуассона якого сталий, а залежність модуля Юнґа від відстані до поверхні півпростору описує показникова функція. Паралельно розглянуто моделювання покриву пакетом однорідних пружних шарів. Проаналізовано різницю між розподілами розтягальних напружень на ненавантаженій поверхні неоднорідного півпростору, що виникає внаслідок використання двох моделей неоднорідного покриву.

Формулювання задачі. Нехай по деякій області Ω поверхні $z = h = H/a$ пружного неоднорідного півпростору (рис. 1) розподілене дотичне навантаження $\tau_x(x, y)$, де x, y, z – безрозмірні прямокутні координати, віднесені до характерного лінійного розміру a області Ω, H – товщина покриву.

Неоднорідний півпростір складається з однорідного ізотропного півпростору з модулем Юнґа E_0 і коефіцієнтом Пуассона μ та неоднорідного покриву, кое-

Контактна особа: Р. КУЛЬЧИЦЬКИЙ-ЖИГАЙЛО, e-mail: r.kulczycki@pb.edu.pl

фіцієнт Пуассона якого сталий і рівний μ. Залежність модуля Юнґа від координати z описує функція

$$E(z) = E_0 \exp(\beta z),\ \ \beta = h^{-1} \ln(E_1/E_0),\ \ 0 \le z \le h\ ,$$

де E_1 – модуль Юнґа на поверхні неоднорідного півпростору.

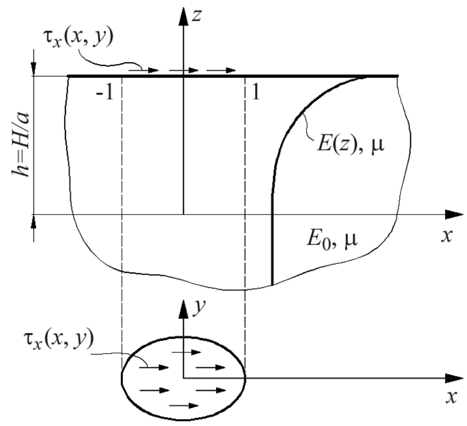

Рис. 1. Схема задачі теорії пружності для півпростору, покритого неоднорідним покривом.

Fig. 1. A scheme of the problem of the elasticity theory for a functionally graded coated half-space.

Середовище з неперервною зміною механічних властивостей. Розглядувану задачу теорії пружності зведено до розв'язування диференційних рівнянь

$$\Delta u_x^{(i)} + d_0 \left(\frac{\partial \theta_1^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_z^{(i)}}{\partial x \partial z} \right) + \beta_i \left(\frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial x} \right) = 0, \quad i = 0, 1\,; \tag{1}$$

$$\Delta u_y^{(i)} + d_0 \left(\frac{\partial \theta_1^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial^2 u_z^{(i)}}{\partial y \partial z} \right) + \beta_i \left(\frac{\partial u_y^{(i)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial y} \right) = 0, \quad i = 0, 1\,; \tag{2}$$

$$\Delta u_z^{(i)} + d_0 \left(\frac{\partial \theta_1^{(i)}}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_z^{(i)}}{\partial z^2} \right) + \frac{2\beta_i}{1 - \iota^2} \left(\iota^2 \theta_1^{(i)} + \frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial z} \right) = 0, \quad i = 0, 1 \tag{3}$$

за крайових умов на поверхні неоднорідного півпростору

$$\sigma_{xz}^{(1)}(x, y, h) = \tau_x(x, y) H(x, y),\ \ \sigma_{yz}^{(1)}(x, y, h) = \sigma_{zz}^{(1)}(x, y, h) = 0\,, \tag{4}$$

умов ідеального механічного контакту між покривом і однорідним півпростором

$$\mathbf{u}^{(0)}(x, y, 0) = \mathbf{u}^{(1)}(x, y, 0)\,, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(0)}(x, y, 0) \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(x, y, 0) \cdot \mathbf{n} \tag{6}$$

та умов на нескінченності:

$$\mathbf{u}^{(i)}(x, y, z) \to 0,\ x^2 + y^2 + z^2 \to \infty\,, \tag{7}$$

де

$$\theta_1^{(i)} = \frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial u_y^{(i)}}{\partial y}, \quad i = 0, 1\,, \tag{8}$$

$\mathbf{u}^{(i)}$ – безрозмірний, віднесений до параметра a, вектор пружного переміщення; $\boldsymbol{\sigma}^{(i)}$ – тензор напруження; індекс $i = 0$ описує параметри і функції стану в однорідному півпросторі; $i = 1$ – у неоднорідному покриві; $\beta_0 = 0$; $\beta_1 = \beta$; $\iota^2 = \mu/(1 - \mu)$; $d_0 = 1/(1 - 2\mu)$; $H(x, y) = 1$, якщо $(x, y) \in \Omega$, $H(x, y) = 0$, якщо $(x, y) \notin \Omega$; $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$.

Загальний розв'язок диференційних рівнянь (1)–(3) шукаємо за допомогою двовимірного інтегрального перетворення Фур'є

$$\tilde{f}(\xi,\eta,z)=FF\left(f(x,y,z),x\to\xi,y\to\eta\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y,z)\exp\left(-ix\xi-iy\eta\right)dxdy\,.$$

Для його побудови зручно [26] використати функції $\theta_1^{(i)}$ (8), $u_z^{(i)}$ і

$$\chi^{(i)}=\frac{\partial u_x^{(i)}}{\partial y}-\frac{\partial u_y^{(i)}}{\partial x},\quad i=0,1,\tag{9}$$

трансформанти Фур'є яких знайдемо у вигляді

$$2\tilde{\theta}_1^{(0)}(\xi,\eta,z)=-\left((2+d_0)a_{-1}(\xi,\eta)+d_0sza_{-1}(\xi,\eta)+2a_0(\xi,\eta)s\right)\exp(sz),\tag{10}$$

$$2\tilde{u}_z^{(0)}(\xi,\eta,z)=\left(d_0za_{-1}(\xi,\eta)+2a_0(\xi,\eta)\right)\exp(sz),\tag{11}$$

$$\tilde{\chi}^{(0)}(\xi,\eta,z)=b_0(\xi,\eta)\exp(sz),\tag{12}$$

$$\begin{bmatrix}\tilde{\theta}_1^{(1)}(\xi,\eta,z)\\ \tilde{u}_z^{(1)}(\xi,\eta,z)\end{bmatrix}=\sum_{j=1}^{4}a_j(\xi,\eta)\begin{bmatrix}\left(s^2+\beta^2-m_j^2\right)\exp\left(m_jz\right)\\ m_j^{-1}\left(m_j^2-s^2-\iota^2\beta^2\right)\exp\left(m_jz\right)\end{bmatrix},\tag{13}$$

$$\tilde{\chi}^{(1)}(\xi,\eta,z)=b_1(\xi,\eta)\exp\left(\breve{\beta}_1z\right)+b_2(\xi,\eta)\exp\left(\breve{\beta}_2z\right),\tag{14}$$

де $a_j(\xi,\eta)$, $j=-1,\ldots,4$, $b_j(\xi,\eta)$, $j=0,1,2$ – невідомі функції параметрів інтегрального перетворення; $\breve{\beta}_1=-\breve{\beta}-\sqrt{\breve{\beta}^2+s^2}$; $\breve{\beta}_2=-\breve{\beta}+\sqrt{\breve{\beta}^2+s^2}$; $\breve{\beta}=\beta/2$; $s^2=\xi^2+\eta^2$; m_j, $j=1,\ldots,4$ – корені характеристичного рівняння [27]

$$\left(m^2-s^2\right)^2+2m\beta\left(m^2-s^2\right)+\beta^2\left(m^2+\iota^2s^2\right)=0\,.$$

Функції, описані формулами (10)–(14), задовольняють умови на нескінченності (7). Для визначення невідомих функцій $a_j(\xi,\eta)$, $j=-1,\ldots,4$ і $b_j(\xi,\eta)$, $j=0,$ 1, 2 використовують крайові умови (4)–(6), які в просторі трансформант Фур'є мають вигляд

$$\left.\left(\iota^2\tilde{\theta}_1^{(1)}+\frac{d\tilde{u}_z^{(1)}}{dz}\right)\right|_{z=h}=0,\quad\left.\left(\frac{d\tilde{\theta}_1^{(1)}}{dz}-s^2\tilde{u}_z^{(1)}\right)\right|_{z=h}=\frac{i\xi\tilde{\tau}_x(\xi,\eta)}{G_1},\tag{15}$$

$$\tilde{u}_z^{(1)}\big|_{z=0}=\tilde{u}_z^{(0)}\big|_{z=0},\ \tilde{\theta}_1^{(1)}\big|_{z=0}=\tilde{\theta}_1^{(0)}\big|_{z=0},\tag{16}$$

$$\left.\left(\iota^2\tilde{\theta}_1^{(1)}+\frac{d\tilde{u}_z^{(1)}}{dz}\right)\right|_{z=0}=\left.\left(\iota^2\tilde{\theta}_1^{(0)}+\frac{d\tilde{u}_z^{(0)}}{dz}\right)\right|_{z=0},\tag{17}$$

$$\left.\left(\frac{d\tilde{\theta}_1^{(1)}}{dz}-s^2\tilde{u}_z^{(1)}\right)\right|_{z=0}=\left.\left(\frac{d\tilde{\theta}_1^{(0)}}{dz}-s^2\tilde{u}_z^{(0)}\right)\right|_{z=0},\tag{18}$$

$$\left.\frac{d\tilde{\chi}^{(1)}}{dz}\right|_{z=h}=\frac{i\eta\tilde{\tau}_x(\xi,\eta)}{G_1},\tag{19}$$

$$\tilde{\chi}^{(1)}\big|_{z=0} = \tilde{\chi}^{(0)}\big|_{z=0}, \left.\frac{d\tilde{\chi}^{(1)}}{dz}\right|_{z=0} = \left.\frac{d\tilde{\chi}^{(0)}}{dz}\right|_{z=0}, \tag{20}$$

де G_1 – модуль зсуву на поверхні неоднорідного півпростору. Як випливає із співвідношень (10)–(14) і крайових умов (15)–(20) трансформанти $\tilde{\chi}^{(i)}$, i = 0, 1 можемо обчислити незалежно від трансформант $\tilde{\theta}_1^{(i)}$ і $\tilde{u}_z^{(i)}$, i = 0, 1. Задовольняючи крайові умови (15)–(20), функції $a_j(\xi, \eta)$, j = –1, …, 4 і $b_j(\xi, \eta)$, j = 0, 1, 2 запишемо у вигляді

$$a_j(\xi,\eta) = -\frac{i\xi\tilde{\tau}_x(\xi,\eta)}{2G_1 s}\breve{a}_j(s),\; b_j(\xi,\eta) = \frac{i\eta\tilde{\tau}_x(\xi,\eta)}{G_1 s}\breve{b}_j(s),$$

де функції $\breve{a}_j(s)$, j = –1, …, 4 і $\breve{b}_j(s)$, j = 0, 1, 2 – розв'язки систем лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{6} A_{ij}^{(1)}\breve{a}_{j-2} = s\delta_{i2},\; i = 1, 2, ..., 6, \quad \sum_{j=1}^{3} B_{ij}^{(1)}\breve{b}_{j-1} = s\delta_{i3},\; i = 1, 2, 3, \tag{21}$$

δ_{ij} – символ Кронекера. Ненульові коефіцієнти системи рівні:

$$A_{1j}^{(1)} = \left(m_{j-2}^2 - s^2\right)\exp\left(m_{j-2}h\right), \quad A_{2j}^{(1)} = \left(m_{j-2}^2 - s^2\right)\left(m_{j-2} + \beta\right)\exp\left(m_{j-2}h\right),$$

$$A_{3j}^{(1)} = 2m_{j-2}^{-1}s\left(m_{j-2}^2 - s^2 - \iota^2\beta^2\right), \quad A_{4j}^{(1)} = 2\left(m_{j-2}^2 - s^2 - \beta^2\right),$$

$$A_{5j}^{(1)} = 2\left(m_{j-2}^2 - s^2\right), \quad A_{6j}^{(1)} = 2s^{-1}\left(m_{j-2}^2 - s^2\right)\left(m_{j-2} + \beta\right), \quad j = 3, 4, 5, 6,$$

$$A_{41}^{(1)} = -\left(2 + d_0\right), \quad A_{51}^{(1)} = -1, \quad A_{61}^{(1)} = -\left(1 + d_0\right), \quad A_{32}^{(1)} = A_{42}^{(1)} = A_{52}^{(1)} = A_{62}^{(1)} = -2s,$$

$$B_{12}^{(1)} = B_{13}^{(1)} = -B_{11}^{(1)} = -B_{21}^{(1)} = 1, \quad B_{2j}^{(1)} = s^{-1}\breve{\beta}_{j-1}, \quad B_{3j}^{(1)} = \breve{\beta}_{j-1}\exp\left(\breve{\beta}_{j-1}h\right), \quad j = 2, 3.$$

У задачах теорії пружності про навантаження однорідного чи неоднорідного півпростору дотичними зусиллями найбільшу увагу приділяють [22–25] аналізу напруження σ_{xx} на поверхні півпростору. Трансформанта Фур'є цього напруження у розглядуваній задачі має вигляд

$$\tilde{\sigma}_{xx}^{(1)}(\xi,\eta,h) = -i\xi s^{-1}\tilde{\tau}_x(\xi,\eta)\left(\beta^2\left(\iota^2 + 1\right)\breve{A}(s) - \eta^2 s^{-2}\left(\beta^2\breve{A}(s) + 2\breve{B}(s)\right)\right), \tag{22}$$

де $\breve{A}(s) = \sum_{j=1}^{4}\breve{a}_j(s)\exp\left(m_j h\right)$; $\breve{B}(s) = \sum_{j=1}^{2}\breve{b}_j(s)\exp\left(\breve{\beta}_j h\right)$.

Слід відзначити, що під час виведення формули (22) використано перше рівняння першої системи рівнянь (21).

У контактних задачах про ковзання абсолютно жорсткої кулі по поверхні однорідного чи неоднорідного пружного півпростору часто приймають [23, 25], що ділянкою контакту є круг радіуса a, а дотичне навантаження, викликане силами тертя, розподілене за еліптичним законом:

$$\tau_x(x,y) = p_0\sqrt{1-r^2}, \quad \tilde{\tau}_x(\xi,\eta) = \bar{\tau}_x(s) = \sqrt{\pi/2}\,p_0\,J_{3/2}(s)\big/s^{3/2},$$

де $J_{3/2}(s)$ – функція Бесселя; $r^2 = x^2 + y^2$.

Зробивши такі самі припущення і повернувшись до простору оригіналів у формулі (22), отримаємо співвідношення

$$\sigma_{xx}^{(1)}(x,y,h)=\frac{x}{r}\beta^2\left(\iota^2+1\right)\int_0^\infty s\bar{\tau}_x(s)\breve{A}(s)J_1(sr)\,ds-$$

$$-\frac{x}{r}\int_0^\infty s\bar{\tau}_x(s)\left(\beta^2\breve{A}(s)+2\breve{B}(s)\right)\left(\frac{y^2}{r^2}J_1(sr)-\frac{3y^2-x^2}{r^2}\frac{J_2(sr)}{sr}\right)ds,$$

де $J_1(sr)$, $J_2(sr)$ – функції Бесселя.

Отримані інтеграли обчислюємо з врахуванням асимптотичної поведінки функцій $\breve{A}(s)$ і $\breve{B}(s)$, коли $s\to\infty$:

$$\lim_{s\to\infty}\breve{A}(s)=-\frac{2}{\beta^2\left(1+\iota^2\right)},\quad \lim_{s\to\infty}\breve{B}(s)=1.$$

Інтеграли, в яких ці функції замінено їх асимптотиками, знаходимо аналітично. Дають вони розподіл напруження, характерний для однорідного півпростору [23]. Для визначення решти інтегралів застосовуємо квадратуру Ґаусса.

Моделювання неоднорідного покриву за допомогою пакета шарів. Розділимо поверхневий шар на n шарів однакової товщини $h'=h/n$ (рис. 2).

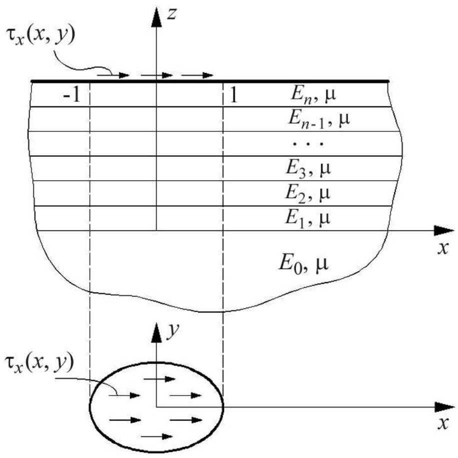

Рис. 2. Схема задачі теорії пружності для півпростору, покритого пакетом шарів.

Fig. 2. A scheme of the problem of the elasticity theory for a multi-layered coated half-space.

Вважатимемо, що всі шари однорідні. Їх механічні властивості опишемо за допомогою модулів Юнґа і коефіцієнтів Пуассона:

$$E_i=\frac{1}{h'}\int_{(i-1)h'}^{ih'}E(z)\,dz=$$

$$=\frac{2E_0\exp\left((i-0,5)\beta h'\right)\sinh\left(0,5\beta h'\right)}{\beta h'},$$

$$\mu_i=\frac{1}{h'}\int_{(i-1)h'}^{ih'}\mu\,dz=\mu,\quad i=1,\,2,\ldots,\,n,$$

де значенню індекса i відповідає номер шару в пакеті. Нумерація починається знизу (рис. 2) від шару, що безпосередньо контактує з пружним однорідним півпростором.

Загальний розв’язок рівнянь теорії пружності в шарах пакета, записаний у просторі трансформант Фур’є, має вигляд

$$\begin{aligned}2\tilde{\theta}_1^{(i)}(\xi,\eta,z)=&\left\{(2+d_i)\sinh\left(s(h_i-z)\right)+d_is(h_i-z)\cosh\left(s(h_i-z)\right)\right\}a_{4i-3}(\xi,\eta)+\\&+\left\{(2+d_i)\cosh\left(s(h_i-z)\right)+d_is(h_i-z)\sinh\left(s(h_i-z)\right)\right\}a_{4i-2}(\xi,\eta)+\\&+2s\cosh\left(s(h_i-z)\right)a_{4i-1}(\xi,\eta)+2s\sinh\left(s(h_i-z)\right)a_{4i}(\xi,\eta),\quad i=1,\,\ldots,\,n;\end{aligned}\tag{23}$$

$$\begin{aligned}2\tilde{u}_z^{(i)}(\xi,\eta,z)=&\,d_i(h_i-z)\sinh\left(s(h_i-z)\right)a_{4i-3}(\xi,\eta)+\\&+d_i(h_i-z)\cosh\left(s(h_i-z)\right)a_{4i-2}(\xi,\eta)+\\&+2\sinh\left(s(h_i-z)\right)a_{4i-1}(\xi,\eta)+2\cosh\left(s(h_i-z)\right)a_{4i}(\xi,\eta),\quad i=1,\,\ldots,\,n;\end{aligned}\tag{24}$$

$$\tilde{\chi}^{(i)}(\xi,\eta,z)=\sinh\left(s\left(h_i-z\right)\right)b_{2i-1}(\xi,\eta)+\cosh\left(s\left(h_i-z\right)\right)b_{2i}(\xi,\eta),\quad i=1,\ ...,\ n, \qquad (25)$$

де $d_i = 1/(1-2\mu_i)$, $h_i = ih'$, $\mu_i = \mu$, $i = 1, ..., n$.

Загальний розв’язок в однорідному півпросторі $z \le 0$ описують формули (10)–(12). Співвідношення (10)–(12) і (23)–(25) містять $4n + 2$ невідомі функції $a_j(\xi, \eta)$, $j = -1, 0, \dots, 4n$ і $2n + 1$ невідому функцію $b_j(\xi, \eta)$, $j = 0, \dots, 2n$. Для їх визначення слід задовольнити три крайові умови на поверхні неоднорідного півпростору, шість крайових умов між однорідною основою і пакетом однорідних шарів і $6n - 6$ крайових умов між шарами пакета. Задовольняючи описані вище крайові умови, отримуємо дві системи лінійних алгебричних рівнянь. Перша система містить $4n + 2$ рівнянь і служить для визначення невідомих функцій $a_j(\xi, \eta)$, $j = -1, 0, \dots, 4n$. З другої системи, що містить $2n + 1$ рівнянь, визначаємо невідомі функції $b_j(\xi, \eta)$, $j = 0, \dots, 2n$. Оскільки в кожній з систем рівнянь тільки одне рівняння неоднорідне, їх розв’язок запишемо у вигляді

$$a_j(\xi,\eta)=-\frac{i\xi\tilde{\tau}_x(\xi,\eta)}{G_n s}\breve{a}_j(s),\ b_j(\xi,\eta)=-\frac{i\eta\tilde{\tau}_x(\xi,\eta)}{G_n s}\breve{b}_j(s),$$

де функції $\breve{a}_j(s)$, $j = -1, \dots, 4n$ і $\breve{b}_j(s)$, $j = 0, \dots, 2n$ – розв’язки систем лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{4n+2} A_{ij}^{(2)}\breve{a}_{j-2}=\delta_{i,4n+2},\quad i=1,\ 2,...,\ 4n+2,\quad \sum_{j=1}^{2n+1} B_{ij}^{(2)}\breve{b}_{j-1}=\delta_{i,2n+1},\quad i=1,\ 2,\ ...,\ 2n+1.$$

Ненульові коефіцієнти системи рівні:

$$A_{11}^{(2)}=\left(2+d_0\right),A_{12}^{(2)}=-A_{22}^{(2)}=2s,A_{31}^{(2)}=G_0^*,A_{41}^{(2)}=-G_0^*\left(1+d_0\right),A_{32}^{(2)}=-A_{42}^{(2)}=2G_0^*s,$$

$$A_{4i+1,4i}^{(2)}=-\left(2+d_i\right),\ A_{4i+1,4i+1}^{(2)}=A_{4i+2,4i+2}^{(2)}=-2s,\ A_{4i+3,4i}^{(2)}=-G_i^*,$$

$$A_{4i+4,4i-1}^{(2)}=-G_i^*\left(1+d_i\right),\ A_{4i+3,4i+1}^{(2)}=A_{4i+4,4i+2}^{(2)}=-2sG_i^*,\ i=1,\ ...,\ n-1,$$

$$A_{4i+1,4i+3}^{(2)}=\left(2+d_{i+1}\right)\sinh\left(sh'\right)+d_{i+1}sh'\cosh\left(sh'\right),\ A_{4i+1,4i+5}^{(2)}=A_{4i+3,4i+5}^{(2)}=2s\cosh\left(sh'\right),$$

$$A_{4i+1,4i+4}^{(2)}=\left(2+d_{i+1}\right)\cosh\left(sh'\right)+d_{i+1}sh'\sinh\left(sh'\right),\ A_{4i+1,4i+6}^{(2)}=A_{4i+3,4i+6}^{(2)}=2s\sinh\left(sh'\right),$$

$$A_{4i+4,4i+3}^{(2)}=\left(1+d_{i+1}\right)\cosh\left(sh'\right)+d_{i+1}sh'\sinh\left(sh'\right),\ A_{4i+2,4i+5}^{(2)}=A_{4i+4,4i+5}^{(2)}=2s\sinh\left(sh'\right),$$

$$A_{4i+4,4i+4}^{(2)}=\left(1+d_{i+1}\right)\sinh\left(sh'\right)+d_{i+1}sh'\cosh\left(sh'\right),\ A_{4i+2,4i+6}^{(2)}=A_{4i+4,4i+6}^{(2)}=2s\cosh\left(sh'\right),$$

$$A_{4i+2,4i+3}^{(2)}=d_{i+1}sh'\sinh\left(sh'\right),\ A_{4i+3,4i+3}^{(2)}=\sinh\left(sh'\right)+d_{i+1}sh'\cosh\left(sh'\right),$$

$$A_{4i+2,4i+4}^{(2)}=d_{i+1}sh'\cosh\left(sh'\right),\ A_{4i+3,4i+4}^{(2)}=\cosh\left(sh'\right)+d_{i+1}sh'\sinh\left(sh'\right),\ i=0,\ ...,\ n-1,$$

$$A_{4n+1,4n}^{(2)}=1,\ A_{4n+2,4n-1}^{(2)}=\left(1+d_n\right),\ A_{4n+1,4n+1}^{(2)}=A_{4n+2,4n+2}^{(2)}=2s,$$

$$B_{11}^{(2)}=-1,B_{21}^{(2)}=G_0^*,\ B_{2i+1,2i+1}^{(2)}=-1,\ B_{2i+2,2i}^{(2)}=-G_i^*,\ i=1,\ ...,\ n-1,\ B_{2n+1,2n}^{(2)}=1,$$

$$B_{2i+1,2i+2}^{(2)}=B_{2i+2,2i+3}^{(2)}=\sinh\left(sh'\right),\ B_{2i+1,2i+3}^{(2)}=B_{2i+2,2i+2}^{(2)}=\cosh\left(sh'\right),\ i=0,\ ...,\ n-1,$$

де $G_i^*=G_i/G_{i+1},\ i=0,\ ...,\ n-1$.

Трансформанта Фур'є напруження σ_{xx} на поверхні неоднорідного півпростору має вигляд

$$\tilde{\sigma}_{xx}^{(n)}(\xi,\eta,h)=-i\xi s^{-1}\left(2d_n\breve{a}_{4n-2}(s)-\eta^2 s^{-2}\left((1+d_n)\breve{a}_{4n-2}(s)-2\breve{b}_{2n}(s)\right)\right)\tilde{\tau}_x(\xi,\eta).$$

Припускаючи, що областю навантаження є круг радіуса a, а дотичні зусилля розподілені за еліптичним законом, у просторі оригіналів отримаємо співвідношення

$$\sigma_{xx}^{(n)}(x,y,h)=\frac{2d_n x}{r}\int_0^\infty s\overline{\tau}_x(s)\breve{a}_{4n-2}(s)J_1(sr)\,ds-$$

$$-\frac{x}{r}\int_0^\infty s\overline{\tau}_x(s)\left((1+d_n)\breve{a}_{4n-2}(s)-2\breve{b}_{2n}(s)\right)\left(\frac{y^2}{r^2}J_1(sr)-\frac{3y^2-x^2}{r^2}\frac{J_2(sr)}{sr}\right)ds.$$

Отримані інтеграли обчислюємо з врахуванням асимптотичної поведінки функцій $\breve{a}_{4n-2}(s)$ і $\breve{b}_{2n}(s)$, коли $s\to\infty$:

$$\lim_{s\to\infty}\breve{a}_{4n-2}(s)=-d_n^{-1},\quad \lim_{s\to\infty}\breve{b}_{2n}(s)=-1.$$

Як і в попередньому розділі, інтеграли, в яких функції $\breve{a}_{4n-2}(s)$ і $\breve{b}_{2n}(s)$ замінено їх асимптотиками, дають напруження, характерні для однорідного півпростору [23].

Слід відзначити, що для обчислення двовимірних інтегралів, що виникають за оберненого двовимірного інтегрального перетворення Фур'є, зручно використовувати полярні координати. Внутрішній інтеграл за кутовою координатою не містить функцій, що отримуються з розв'язків систем лінійних алгебричних рівнянь. Матриця системи рівнянь для визначення функцій θ_1 і u_z збігається з відповідною матрицею, що виникає в двовимірній [28] чи осесиметричній [29] задачі для шаруватого півпростору.

Аналіз результатів. Оцінюючи вихідні співвідношення, робимо висновок, що розподіл напруження σ_{xx} на поверхні неоднорідного півпростору в задачі для моделювання неоднорідного покриву за допомогою пакета шарів залежить від чотирьох безрозмірних параметрів: товщини покриву h, співвідношення між модулями Юнґа на поверхні неоднорідного півпростору і основи E_1/E_0, коефіцієнта Пуассона μ і кількості шарів у пакеті n. Аналогічний розподіл для неоднорідного покриву, який отримуємо з урахуванням неперервної залежності механічних властивостей від координати, визначають перші три вказані параметри. Нижче вважатимемо, що $\mu = 1/3$; $E_1/E_0 = 0{,}125$; 0,5; 4 або 8; $h = 0{,}2$; 0,4 або 0,8.

Залежність напруження σ_{xx} в точці $x = -1$, $y = 0$, $z = h$ та похибок (%) його обчислення, отриманих моделюванням неоднорідного покриву пакетом n шарів, від параметрів E_1/E_0 і h

E_1/E_0	h	σ_{xx}, коли $n=\infty$	$n = 10$	$n = 20$	$n = 40$	$n = 80$
0,125	0,2	0,7808	8,43	4,42	2,31	1,20
	0,4	0,9747	8,06	4,30	2,26	1,18
	0,8	1,1813	7,53	4,11	2,18	1,14
8	0,2	4,5276	–9,19	4,83	–2,49	–1,27
	0,4	3,4128	–8,74	–4,67	–2,43	–1,25
	0,8	2,6936	–8,01	–4,40	–2,33	–1,21

Значення напружень, обчислені в задачі для поверхневого покриву з неперервною зміною механічних властивостей, наведено в таблиці. Відносну похибку їх обчислення, знайдену моделюванням неоднорідного покриву пакетом n однорідних шарів, подано в позиціях n = 10; 20; 40 і 80. Як бачимо, зі збільшенням кількості шарів удвічі похибка зменшується також майже вдвічі. Якщо розглянемо 80 шарів у пакеті і якщо $0,125 \le E_1/E_0 \le 8$, похибка обчислення напруження σ_{xx} в точці $x = -1$, $y = 0$, $z = h$ не перевищує 1,5%.

Про узгодження між розв’язками, що ґрунтуються на двох описаних вище моделях неоднорідного покриву, свідчать також результати обчислення, наведені на рис. 3. Суцільними лініями тут позначено розв’язок, який отримуємо у задачі з неперервною зміною механічних властивостей. Ромби – результати для пакета, що складається з 20 однорідних шарів. Як випливає з рис. 3, найбільшу абсолютну похибку під час обчислень напружень отримуємо на межі ділянки навантаження.

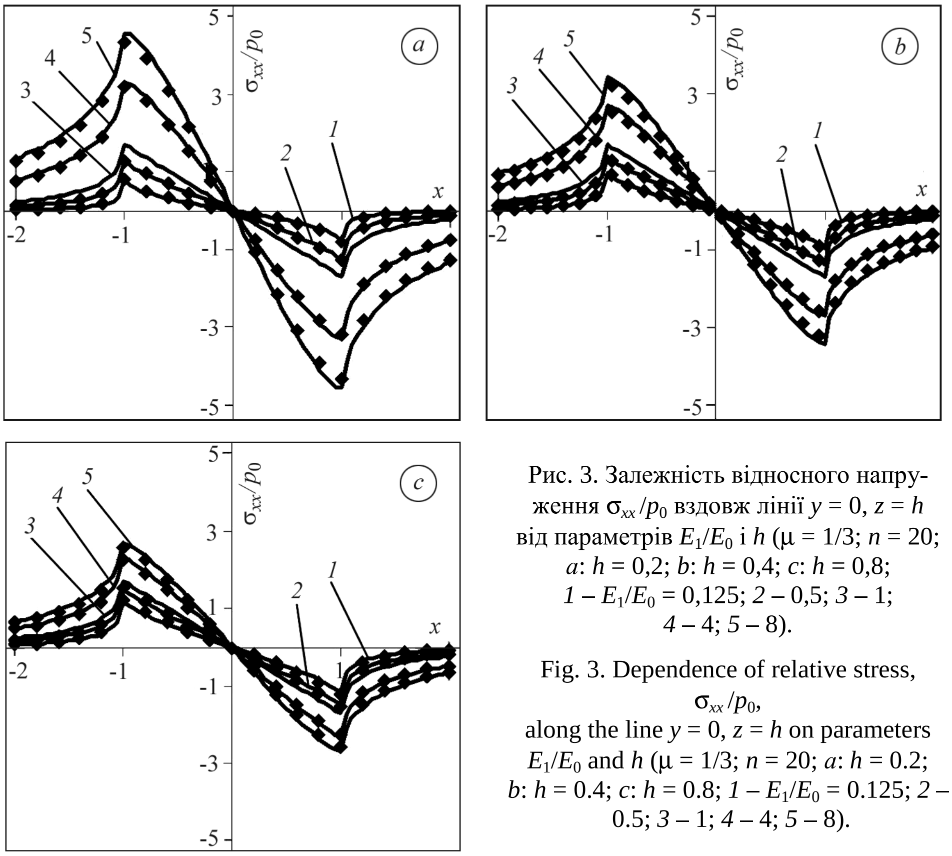

Рис. 3. Залежність відносного напруження σ_{xx}/p_0 вздовж лінії $y = 0$, $z = h$ від параметрів E_1/E_0 і h ($\mu = 1/3$; $n = 20$; *a*: $h = 0,2$; *b*: $h = 0,4$; *c*: $h = 0,8$; *1* – $E_1/E_0 = 0,125$; *2* – 0,5; *3* – 1; *4* – 4; *5* – 8).

Fig. 3. Dependence of relative stress, σ_{xx}/p_0, along the line $y = 0$, $z = h$ on parameters E_1/E_0 and h ($\mu = 1/3$; $n = 20$; *a*: $h = 0.2$; *b*: $h = 0.4$; *c*: $h = 0.8$; *1* – $E_1/E_0 = 0.125$; *2* – 0.5; *3* – 1; *4* – 4; *5* – 8).

Найбільше розтягальне напруження, як і в задачі для однорідного півпростору [23], чи півпростору покритого однорідним шаром [25], виникає в точці $x = -1$, $y = 0$, $z = h$ (рис. 3).

ВИСНОВКИ

Тривимірну задачу теорії пружності про навантаження поверхні пружного півпростору дотичними зусиллями зведено до знаходження трансформант Фур’є вертикальної компоненти вектора переміщення і двох допоміжних функцій, описаних формулами (8) і (9). Розв’язок розглядуваної задачі для пакета з 20–80 однорідних шарів добре узгоджується з розв’язком для неоднорідного покриву, коефіцієнт Пуассона якого сталий, а залежність модуля Юнґа від координати z

описує показникова функція. Це є вагомим аргументом до моделювання поверхневого шару з неперервною зміною механічних властивостей пакетом однорідних шарів.

Характер розтягальних напружень, що виникають біля ненавантаженої поверхні неоднорідного півпростору з описаними вище механічними властивостями, такий як для однорідного півпростору [22–23] чи півпростору, покритого однорідним шаром з іншими механічними властивостями [24–25].

РЕЗЮМЕ. Рассмотрена трехмерная задача теории упругости о нагружении неоднородного полупространства касательными усилиями, распределенными в круговой области его поверхности. Полупространство состоит из однородного основания и поверхностного неоднородного слоя, коэффициент Пуассона которого постоянный, а зависимость модуля Юнга от расстояния до поверхности полупространства описывает показательная функция. Решение задачи теории упругости, учитывающее непрерывную зависимость модуля Юнга от координаты, сравнено с решением задачи, в которой неоднородный слой заменен пакетом однородных слоев.

SUMMARY. A three-dimensional problem of the elasticity theory for a functionally graded coated half-space under shear loading, distributed in the circular area of its siurface, is considered. The Young's modulus of the graded coating is assumed to be an exponential function and the Poisson's ratio is a constant. The solutions of the problem of the theory of elasticity for a functionally graded coated half-space and the one obtained within the framework of a multi-layered coated half-space are compared.

Працю виконано за проектом W/WM/12/2010, що реалізується в Білостоцькій політехніці і фінансується Комітетом наукових досліджень Польщі.

1. *Коренев Б. Г.* Штамп, лежащий на упругом полупространстве, модуль упругости которого является функцией глубины // Докл. АН СССР. – 1957. – **112**, № 5. – С. 823–826.
2. *Моссаковский В. И.* Давление круглого штампа на упругое полупространство, модуль упругости которого является степенной функцией глубины // Прикл. математика и механика. – 1958. – **22**, № 1. – С. 123–125.
3. *Коган Б. И., Зинченко В. Д.* Напряженное состояние неоднородного слоя, покоящегося на упругом полупространстве // Изв. вузов. Сер. Строительство и архитектура. – 1960. – № 3. – С. 8–18.
4. *Раков А. К., Рвачев В. П.* Контактная задача теории упругости для полупространства, модуль упругости которого есть степенная функция глубины // Доп. АН УССР. – 1961. – № 3. – С. 286–290.
5. *Тер-Мкртичьян Л. Н.* Некоторые задачи теории упругости неоднородных упругих сред // Прикл. математика и механика. – 1961. – **25**, № 6. – С. 1120–1125.
6. *Ростовцев Н. А.* К теории упругости неоднородной среды // Там же. – 1964. – **28**, № 4. – С. 601–611.
7. *Шевляков Ю. А., Наумов Ю. А., Чистяк В. Н.* К расчету неоднородных оснований // Прикл. механика. – 1968. – **4**, № 9. – С. 66–73.
8. *Попов Г. Я.* Осесимметричная контактная задача для упругого неоднородного полупространства при наличии сцепления // Прикл. математика и механика. – 1973. – **37**, № 6. – С. 1109–1116.
9. *Плевако В. П.* О возможности использования гармонических функций при решении задач теории упругости неоднородных сред // Там же. – 1972. – **36**, № 5. – С. 886–894.
10. *Плевако В. П.* Неоднородный слой, сцепленный с полупространством под воздействием внутренних и внешних сил // Там же. – 1974. – **38**, № 5. – С. 865–875.
11. *Kassir M. K. and Chuaprasert M. F.* A rigid punch in contact with a non-homogeneous elastic solid // Trans. ASME: J. Appl. Mech. – 1974. – **41**. – P. 1019–1024.
12. *Guler M. A. and Erdogan F.* Contact mechanics of graded coatings // Int. J. Solids Struct. – 2004. – **41**. – P. 3865–3889.

13. *Guler M. A. and Erdogan F.* Contact mechanics of two deformable elastic solids with graded coatings // Mech. Mater. – 2006. – **38**. – P. 633–647.
14. *Guler M. A. and Erdogan F.* The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings // Int. J. Mech. Sci. – 2007. – **49**. – P. 161–182.
15. *Analitycal* solution of the spherical indentation problem for a half-space with gradients with the depth elastic properties / S. M. Aizikovich, V. M. Alexandrov, J. J. Kalker et al. // Int. J. Solids Struct. – 2002. – **39**. – P. 2745–2772.
16. *Liu T.-J. and Wang Y.-S.* Axisymmetric frictionless contact problem of a functionally graded coating with exponentially varying modulus // Acta Mech. – 2008. – **199**. – P. 151–165.
17. *Ke L.-L. and Wang Y.-S.* Two-dimensional contact mechanics of functionally graded materials with arbitrary spatial variations of material properties // Int. J. Solids Struct. – 2006. – **43**. – P. 5779–5798.
18. *Ke L.-L. and Wang Y.-S.* Two-dimensional sliding frictional contact of functionally graded materials // Eur. J. Mech. A/Solids. – 2007. – **26**. – P. 171–188.
19. *Liu T.-J., Wang Y.-S., and Zhang C.* Axisymmetric frictionless contact of functionally graded materials // Archive of Appl. Mech. – 2008. – **78**. – P. 267–282.
20. *Liu T.-J. and Wang Y.-S.* Reissner-Sagoci problem for functionally graded materials with arbitrary spatial variation of material properties // Mech. Res. Commun. – 2009. – **36**. – P. 322–329.
21. *Кульчицький-Жигайло Р., Роговський Г.* Осесиметрична контактна задача про втискування абсолютно жорсткої кулі в пружний півпростір з неоднорідним покривом // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2009. – **45**, № 6. – С. 82–92.
22. *Smith J. O. and Liu C. K.* Stresses due to tangential and normal loads on an elastic solid with application to some contact stress problems // Trans. ASME: J. Appl. Mech. – 1953. – **20**, № 2. – P. 157–166.
23. *Hamilton G. M. and Goodman L. E.* The stress field created by a circular sliding contact // Trans. ASME: J. Appl. Mech. – 1966. – **33**. – P. 371–376.
24. *Diao D. F., Kato K., and Hayashi K.* The maximum tensile stress on a hard coating under sliding friction // Tribology Int. – 1994. – **27**, № 4. – P. 267–272.
25. *Schwarzer N.* Coating desing due to analytical modeling of mechanical contact problems on multiplayer systems // Surface & Coatings Technology. – 2000. – **133–134**. – P. 397–402.
26. *Галазюк В. А.* О напряженно-деформированном состоянии упругой пластины с некруговым цилиндрическим вырезом // Докл. АН УССР, сер. А. – 1985. – № 3. – С. 20–24.
27. *Ozturk M. and Erdogan F.* Axisymmetric crack problem in bonded materials with a graded interfacial region // Int. J. Solids Struct. – 1996. – **33**. – P. 193–219.
28. *Колодзейчик В., Кульчицький-Жигайло Р.* Тиск бокової поверхні циліндра на періодично шаруватий півпростір // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – **43**, № 3. – С. 51–57.

    (*Kolodziejczyk W. and Kul’chyts’kyi-Zhyhailo R.* Pressure of the Lateral Surface of a Cylinder on a Periodically Layered Half Space // Materials Science. – 2007. – **43**, № 3. – P. 351–360.)
29. *Kulchytsky-Zhyhailo R. and Kolodziejczyk W.* On axisymmetrical contact problem of pressure of a rigid sphere into a periodically two-layered semi-space // Int. J. Mech. Sci. – 2007. – **49**. – P. 704–711.

Одержано 06.04.2010