

УДК 539.3

ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ НУЛЬОВИХ РАДІАЛЬНИХ НАПРУЖЕНЬ У НЕОДНОРІДНОМУ ДОВГОМУ ПОРОЖНИСТОМУ ЦИЛІНДРІ СТАЦІОНАРНИМ ТЕМПЕРАТУРНИМ ПОЛЕМ

Б. М. КАЛИНЯК

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Запропоновано метод визначення стаціонарного температурного поля, яке забезпечує нульові радіальні напруження по товщині довгого порожнистого неоднорідного вздовж радіуса циліндра, а отже, і відсутність колових напружень за нульових масових сил та осевого навантаження. Розв'язування відповідної неklasичної незв'язаної стаціонарної задачі термопружності зведено до розв'язування інтегрального рівняння Фредгольма другого роду відносно температури. Отримано точні аналітичні вирази для температурного поля та інтенсивності теплових джерел. Записано зв'язки між коефіцієнтами лінійного теплового розширення і теплопровідності матеріалу, які за заданих теплових навантажень на поверхнях забезпечують відсутність колових та радіальних напружень у циліндрі. Розраховано температурні поля та інтенсивності джерел тепла для реально існуючого матеріалу.

Ключові слова: порожнистий циліндр, функціонально-градієнтний матеріал, нульові напруження, стаціонарне температурне поле, термопружність, інтенсивність теплових джерел, обернена задача термопружності.

Сучасні технології дають можливість виготовляти матеріали зі заданими розподілами їх характеристик для продовження терміну експлуатації виготовлених з них виробів за теплових та силових навантажень. Це, зокрема, композити та функціонально-градієнтні матеріали (ФГМ), які виготовляють зі заданою неперервною зміною фізико-механічних характеристик у межах тіла для забезпечення міцності конструкцій [1–3].

Тому виникає проблема підбору такого температурного поля, коли відомі залежності характеристик матеріалу від координати, або характеристик неоднорідного матеріалу за заданих теплових і, можливо, силових навантажень, які б мінімізували або забезпечували відсутність однієї із складових напружень чи переміщень. Умови відсутності температурних напружень в оболонках встановлені раніше [4].

Нижче отримано зв'язок між стаціонарним температурним полем, характеристиками матеріалу та відомими силовими і тепловими навантаженнями на поверхнях довгого неоднорідного порожнистого циліндра за умови відсутності радіальних напружень у ньому. Для цього відповідна обернена неklasична стаціонарна незв'язана задача термопружності зведена до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду відносно однієї з компонент тензора напружень. Обернені задачі термопружності виникають також і під час розв'язування задач ідентифікації термопружних полів за неповної інформації про теплові навантаження на поверхнях або задач оптимального за швидкодією нагрівання за обмежень на напруження чи температуру [5, 6].

Формулювання задачі. Розглянемо довгий неоднорідний вздовж радіальної змінної r порожнистий циліндр з внутрішнім R_1 та зовнішнім R_2 радіусами. У ци-

ліндрі з рівномірно розподіленими сталими силовими навантаженнями p_1 та p_2 на внутрішній і зовнішній поверхнях відповідно наявне залежне від радіальної координати температурне поле $T(r)$, яке можна визначити з розв'язку стаціонарної задачі теплопровідності або експериментально. Осьові деформації вважаємо сталими ($e_z = \text{const}$). Потрібно визначити стаціонарне температурне поле, яке забезпечує нульові компоненти напруження за відомих характеристик матеріалу.

Математично проблему зводять до розв'язування системи лінійних диференціальних рівнянь незв'язаної термопружності, в якій температурне поле визначають з рівнянь теплопровідності. Рівняння зі змінними коефіцієнтами і умови на межах мають такий вигляд [7]:

рівняння рівноваги

$$\frac{d}{d\rho}(\rho^2\sigma_r) = \rho\sigma + \rho^2F; \quad (1)$$

зв'язки між деформаціями і напруженнями

$$e_r = \frac{1+\nu}{E}\sigma_r - \frac{\nu(1+\nu)}{E}\sigma - \nu e_z + (1+\nu)\Phi(T),$$

$$e_\varphi = -\frac{1+\nu}{E}\sigma_r + \frac{1-\nu^2}{E}\sigma - \nu e_z + (1+\nu)\Phi(T), \quad e_z = \frac{1}{E}\sigma_z - \frac{\nu}{E}\sigma + \Phi(T); \quad (2)$$

рівняння суцільності у напруженнях

$$\frac{d}{d\rho} \left[\frac{1-\nu^2}{E}\sigma - \nu e_z + (1+\nu)\Phi(T) \right] = \sigma_r \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1+\nu}{E} \right) + \frac{1+\nu}{E}\rho F; \quad (3)$$

умови на межах

$$\sigma_r(\rho_1) = -p_1, \quad \sigma_r(1) = -p_2, \quad \int_{\rho_1}^1 \eta \sigma_z(\eta) d\eta = \int_{\rho_1}^1 \eta [e_z E + \nu \sigma - E\Phi(T)] d\eta = p. \quad (4)$$

У рівняннях та виразах (1)–(4) $\rho = r/R_2$ – радіальна координата; $\sigma = \sigma_r + \sigma_\varphi$ – сумарні напруження; $E = E(\rho)$ – модуль пружності матеріалу, $\nu = \nu(\rho)$ – коефіцієнт Пуассона; $F = F(\rho)$ – густина масових сил; $\Phi(\rho) = \alpha_r(\rho)[T(\rho) - T_0]$; $T(\rho)$ – задане температурне поле; $\alpha_r(\rho)$ – лінійний коефіцієнт температурного розширення; T_0 – відлікова температура, за якої напруження та деформації відсутні; p – відома осьове навантаження.

Отже, потрібно визначити змінні коефіцієнти диференціального рівняння, якщо відомий його розв'язок і умови на межах. Оскільки потрібна також перевірка отриманих результатів, то запропоновано згадані дві задачі (пряму і обернену) звести до єдиного інтегрального рівняння для однієї зі змінних, наприклад радіальних напружень, і трактувати його як рівняння відносно характеристик матеріалу, напружень, температурного поля залежно від сформульованих завдань, а також використовувати запропоноване інтегральне рівняння для перевірки отриманих результатів.

Зведення задачі до розв'язування інтегрального рівняння Фредгольма відносно радіальних напружень. Якщо диференціальні рівняння рівноваги (1) та суцільності (3) проінтегрувати за радіальною змінною, виключити з них сумарні напруження з використанням умов на межах, інтегральну умову (4) і зв'язки між деформаціями та напруженнями (2), то відповідну задачу термопружності (1)–(4) можна звести до розв'язування інтегрального рівняння Фредгольма другого роду відносно радіальних напружень $\sigma_r(\rho)$ [7]

$$\sigma_r(\rho) + \int_{\rho_1}^1 K(\rho, \eta) \sigma_r(\eta) d\eta = Q(\rho), \quad (5)$$

де

$$K(\rho, \eta) = \begin{cases} K_1(\rho, \eta), & \eta < \rho \\ K_2(\rho, \eta), & \eta > \rho, \end{cases}$$

$$K_1(\rho, \eta) = \frac{1}{\rho^2} [V(\eta) - V(\rho)Z_1(\rho) + W(\eta)Z_2(\rho)] \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1+\nu}{E} \right),$$

$$K_2(\rho, \eta) = \frac{1}{\rho^2} [V(\rho) - V(\eta)Z_1(\rho) + W(\eta)Z_2(\rho)] \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1+\nu}{E} \right),$$

$$Z_1(\rho) = \frac{V(1)V(\rho) - W(1)W(\rho)}{[V^2(1) - W^2(1)]}, \quad Z_2(\rho) = \frac{W(1)V(\rho) - V(1)W(\rho)}{V^2(1) - W^2(1)},$$

$$Q(\rho) = \frac{V(\rho)}{\rho^2} \frac{d_1 V(1) - d_2 W(1)}{V^2(1) - W^2(1)} + \frac{W(\rho)}{\rho^2} \frac{d_2 V(1) - d_1 W(1)}{V^2(1) - W^2(1)} + f(\rho),$$

$$f(\rho) = -\frac{1}{\rho^2} \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{E\eta}{1-\nu^2} (1+\nu) \Phi(T(\eta)) d\eta -$$

$$-\frac{1}{\rho^2} \int_{\rho_1}^{\rho} [V(\rho) - V(\eta)] \frac{1+\nu}{E} \eta F d\eta - \frac{1}{\rho^2} \int_{\rho_1}^{\rho} \eta^2 F d\eta - \frac{1}{\rho^2} \rho_1^2 p_1,$$

$$V(\rho) = \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{\eta E}{1-\nu^2} d\eta, \quad W(\rho) = \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{\eta E \nu}{1-\nu^2} d\eta, \quad d_1 = -p_2 - f(1),$$

$$d_2 = p + \int_{\rho_1}^1 \eta E \Phi(T) d\eta + \int_{\rho_1}^1 [W(1) - W(\eta)] \frac{1+\nu}{E} \eta F d\eta + \int_{\rho_1}^1 \frac{\eta E \nu}{1-\nu^2} (1+\nu) \Phi(T) d\eta. \quad (6)$$

З формул (6) видно, що ядро інтегрального рівняння (5) неперервне. Інтегральне рівняння (5) – це рівняння Фредгольма другого роду, розв'язком якого є радіальні напруження. Тоді сумарні напруження можна визначити з рівняння, отриманого інтегруванням рівняння суцільності (3) з врахуванням умов на межах (4) [7]

$$\begin{aligned} \sigma = & \frac{E}{1-\nu^2} \int_{\rho_1}^{\rho} \sigma_r \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1+\nu}{E} \right) d\eta + A \frac{E}{1-\nu^2} + \\ & + e_z \frac{E}{1-\nu^2} \nu - \frac{E}{1-\nu^2} \int_{\rho_1}^{\rho} \eta \frac{1+\nu}{E} F d\eta - \frac{E}{1-\nu^2} (1+\nu) \Phi(T), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{де } A = \frac{d_1 V(1) - d_2 W(1)}{V^2(1) - W^2(1)} - \int_{\rho_1}^1 \sigma_r(\eta) \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1+\nu}{E} \right) \left\{ 1 - \frac{V(1)V(\eta) - W(1)W(\eta)}{V^2(1) - W^2(1)} \right\} d\eta,$$

$$e_z = \frac{d_2 V(1) - d_1 W(1)}{V^2(1) - W^2(1)} - \int_{\rho_1}^1 \sigma_r(\eta) \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1+\nu}{E} \right) \frac{W(1)V(\eta) - V(1)W(\eta)}{V^2(1) - W^2(1)} d\eta,$$

колові напруження – з формули $\sigma_\varphi(\rho) = \sigma(\rho) - \sigma_r(\rho)$; деформації – з формул (2); радіальне переміщення – з виразу Коші для деформацій та переміщень у циліндричній системі координат $u_r(\rho) = \rho e_\varphi$, де $u_r(\rho) = \bar{u}_r(\rho R_2) / R_2$, $\bar{u}_r(r) = \bar{u}_r(\rho R_2)$ – переміщення, осьові напруження – зі зв'язків між деформаціями та напруженнями (2) за використання формули (7).

Умова рівності нулевим радіальним напруженням. За цією умовою права частина інтегрального рівняння (5) дорівнює 0, тобто $Q(\rho) = 0$ і $p_1 = p_2 = 0$. Припустимо, що масові сили відсутні, тоді

$$\frac{1}{\rho^2 [V^2(1) - W^2(1)]} \{V(\rho)[d_1V(1) - d_2W(1)] + W(\rho)[d_2V(1) - d_1W(1)]\} + f(\rho) = 0. \quad (8)$$

Якщо використати вирази (6) для $V(\rho)$ і $W(\rho)$, то з рівняння (7) після його диференціювання отримаємо таке інтегральне рівняння, яке зв'язує температурне поле, навантаження і фізико-механічні характеристики матеріалу:

$$(1 + \nu(\rho))\Phi(T(\rho)) - \frac{(1 + \nu(\rho))}{V(1) + W(1)} \int_{\rho_1}^1 \frac{dV(\eta)}{d\eta} (1 + \nu(\eta))\Phi(T(\eta))d\eta = -p \frac{W(1) - V(1)\nu(\rho)}{V^2(1) - W^2(1)}.$$

Це рівняння є необхідною умовою існування нульових радіальних напружень у неоднорідному порожнистому циліндрі. Його розв'язок, як рівняння з виродженим ядром і власним значенням ядра, є такий [8]:

$$(1 + \nu(\rho))\Phi(T(\rho)) = \tilde{C} \frac{(1 + \nu(\rho))}{V(1) + W(1)} - p \frac{W(1) - V(1)\nu(\rho)}{V^2(1) - W^2(1)},$$

звідки

$$T(\rho) = \tilde{C} \frac{1}{\alpha(\rho)[V(1) + W(1)]} - p \frac{W(1) - V(1)\nu(\rho)}{\alpha(\rho)[V^2(1) - W^2(1)](1 + \nu(\rho))} + T_0. \quad (9)$$

Коли осьове навантаження відсутнє ($p = 0$) або $\nu(\rho) = \text{const}$, то вираз для температури (9) спрощується

$$T(\rho) = \frac{C}{\alpha(\rho)} + T_0, \quad (10)$$

де $C = \frac{\tilde{C}}{[V(1) + W(1)]}$. Вирази (9) і (10) є умовами рівності нулевим радіальним напруженням.

Стационарні температурні поля, які призводять до відсутності радіальних напружень. Розподіли температури (9) або (10) повинні бути розв'язком неоднорідного рівняння теплопровідності

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \lambda(\rho) \frac{dT(\rho)}{d\rho} \right) + q_v(\rho) = 0 \quad (11)$$

з умовами на поверхнях $\rho = \rho_1$ і $\rho = 1$, наприклад

$$\lambda(\rho_1) \frac{dT(\rho_1)}{d\rho} + \beta_1 [T(\rho_1) - T_1] = 0, \quad \lambda(1) \frac{dT(1)}{d\rho} + \beta_2 [T(1) - T_2] = 0, \quad (12)$$

де β_1, β_2 – коефіцієнти теплообміну з середовищами, які мають температури T_1, T_2 відповідно. Умови теплообміну на поверхнях циліндра повинні бути залежними, оскільки клас розв'язків (10) рівняння теплопровідності (11) містить одну сталу C . Отже, з умов теплообміну на межах циліндра (12) отримуємо:

$$\begin{aligned} -\lambda(\rho_1) \frac{C}{\alpha(\rho_1)^2} \frac{d\alpha(\rho_1)}{d\rho} + \beta_1 \frac{C}{\alpha(\rho_1)} &= \beta_1 T_1 - \beta_1 T_0, \\ -\lambda(1) \frac{C}{\alpha(1)^2} \frac{d\alpha(1)}{d\rho} + \beta_2 \frac{C}{\alpha(1)} &= \beta_2 T_2 - \beta_2 T_0. \end{aligned} \quad (13)$$

З виразу (13) випливає зв'язок між температурами зовнішніх середовищ, який забезпечує нульові радіальні напруження

$$\frac{T_2 - T_0}{T_1 - T_0} = \left[\frac{1}{\alpha(1)} - \frac{\lambda(1)}{\beta_2 \alpha^2(1)} \frac{d\alpha(1)}{d\rho} \right] \left[\frac{1}{\alpha(\rho_1)} - \frac{\lambda(\rho_1)}{\beta_1 \alpha^2(\rho_1)} \frac{d\alpha(\rho_1)}{d\rho} \right]^{-1}. \quad (14)$$

Подібні простіші формули можна записати для умов теплообміну з середовищами першого і другого роду. Зокрема, якщо на поверхнях циліндра задані сталі температури ($T(\rho_1) = T_1$, $T(1) = T_2$), то $C = (T_1 - T_0)\alpha(\rho_1)$ і $C = (T_2 - T_0)\alpha(1)$, а тому і $(T_1 - T_0)\alpha(\rho_1) = (T_2 - T_0)\alpha(1)$. Відповідне температурне поле, яке забезпечує нульові напруження, створюється тепловими джерелами, отриманими підставлянням виразу (9) у рівняння теплопровідності (11):

$$q_v(\rho) = -\frac{C}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[\rho \lambda(\rho) \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{\alpha(\rho)} \right) \right] - \frac{p}{\rho[V^2(1) - W^2(1)]} \frac{d}{d\rho} \left[\rho \lambda(\rho) \frac{d}{d\rho} \left(\frac{v(\rho)V(1) - W(1)}{\alpha(\rho)(1 + v(\rho))} \right) \right]. \quad (15)$$

Важливим для практики є відсутність об'ємних теплових джерел, оскільки їх створення пов'язане з технічними труднощами. Отже, формулу (15) можна трактувати як диференціальне рівняння, яке пов'язує коефіцієнт теплопровідності та температурний коефіцієнт лінійного розширення, тобто зв'язок між характеристиками матеріалів, які забезпечують нульові радіальні напруження за заданих теплових навантажень на поверхнях та відсутності теплових джерел в об'ємі циліндра. За відсутності осьових силових навантажень або постійності коефіцієнта Пуассона воно має вигляд

$$\frac{d[\rho\lambda(\rho)]}{d\rho} + \rho\lambda(\rho) \left[\frac{1}{\alpha(\rho)} \frac{d^2\alpha(\rho)}{d\rho^2} - \frac{2}{\alpha(\rho)} \left(\frac{d\alpha(\rho)}{d\rho} \right) \right] = 0. \quad (16)$$

Диференціальне рівняння (16) має точні розв'язки для $\lambda(\rho)$ і $\alpha(\rho)$:

$$\lambda(\rho) = \frac{C_1 \alpha^2(\rho)}{\rho \frac{d}{d\rho} \alpha(\rho)}, \quad (17)$$

$$\alpha(\rho) = \frac{1}{-C_1 \int \frac{1}{\rho \lambda(\rho)} d\rho + C_2}. \quad (18)$$

де C_1, C_2 – довільні сталі. Сталу C_1 можна виразити через відомі характеристики ма-

теріалу в одній з точок порожнистого циліндра $C_1 = \lambda(\rho_s) \frac{\rho_s \frac{d}{d\rho} \alpha(\rho_s)}{\alpha^2(\rho_s)}$, $\rho_s \in [\rho_1, 1]$.

Оскільки проблема створення матеріалу з довільними наперед заданими механічними і теплофізичними властивостями, взагалі кажучи, не вирішена, то для визначення інтенсивності теплових джерел скористаємося найпростішою моделлю Фойгта, яка дає змогу виразити характеристики двокомпонентного матеріалу $D(\rho)$ через характеристики його складових [9]:

$$D(\rho) = D_1 S_1(\rho) + D_2 S_2(\rho), \quad (19)$$

де D_1, D_2 – характеристики складових матеріалу; $S_1(\rho)$ – концентрація першого матеріалу в другому; $S_2(\rho)$ – концентрація другого матеріалу в першому; $S_1(\rho) + S_2(\rho) = 1$.

Приклад. Розглянемо двокомпонентний циліндр за відсутності масових сил і поздовжніх навантажень ($p = 0$), виготовлений з ФГМ з такими характеристиками його складових (кераміка (ZrO_2) з індексом c і сплав ($Ti-6Al-4V$) з індексом m) [9]: $\nu_c = \nu_1 = 0,249$; $\nu_m = \nu_2 = 0,33$; $\lambda_c = \lambda_1 = 3,13 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$; $\lambda_m = \lambda_2 = 7,5 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$; $E_c = E_1 = 1,95 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$; $E_m = E_2 = 1,16 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$; $\alpha_c = \alpha_1 = 9,5 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$; $\alpha_m = \alpha_2 = 12,0 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$. Температура, за якої напруження відсутні $T_0 = 300 \text{ K}$. Характеристики описують формулою (19) з $S_1(\rho) = \left(\frac{\rho - \rho_1}{1 - \rho_1}\right)^s$, де s – стала, яка набуває

значення $s=s_i, i = \overline{1,3}, s_1 = 1, s_2 = 2, s_3 = 4$. Відповідне температурне поле та інтенсивність теплових джерел, обчислених за формулами (10), (15), які задовольняють рівняння теплопровідності (11) зі заданим перепадом температур 100 К між поверхнями і призводять до нульових радіальних напружень за нетермочутливих характеристик ФГМ зображені на рис. 1, 2.

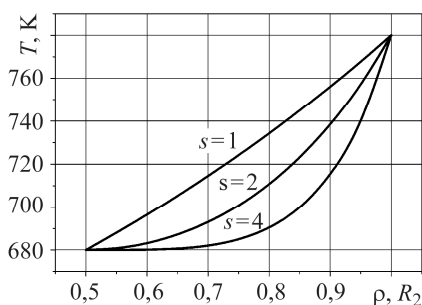


Рис. 1. Fig. 1.

Рис. 1. Температурне поле у циліндрі, виготовленому з ФГМ, яке забезпечує відсутність радіальних напружень.

Fig. 1. Temperature field in a cylinder, made from functionally-graded materials (FGM) ensuring the absence of radial stresses.

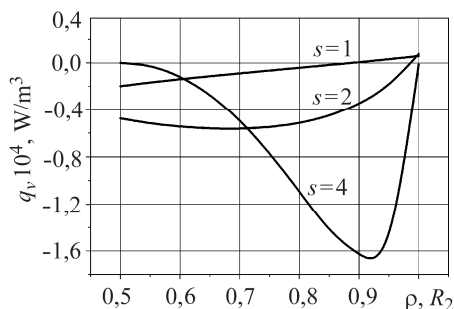


Рис. 2. Fig. 2.

Рис. 2. Залежність інтенсивності теплових джерел від радіальної змінної у циліндрі з ФГМ.

Fig. 2. Dependence of thermal sources on radial variable in the FGM cylinder.

ВИСНОВКИ

Зведення задачі термопружності до розв'язування інтегрального рівняння Фредгольма другого роду для однієї з компонент тензора напружень дало змогу: використовувати одні і ті ж запропоновані інтегральні рівняння для розв'язання прямих задач визначення термонапруженого стану порожнистого неоднорідного циліндра і обернених задач керування напруженнями підбором теплових джерел і характеристиками матеріалу неоднорідних тіл; отримати точний аналітичний вираз, який пов'язує температурне поле – розв'язок стаціонарної задачі теплопровідності, силові навантаження, характеристики матеріалу і є умовою відсутності радіальних напружень у циліндрі; одержати точні аналітичні вирази, які пов'язують температуру на межі (умови на поверхнях першого роду) або температуру навколишнього середовища і коефіцієнти тепловіддачі (умови конвективного теплообміну), що є наслідком вимоги відсутності радіальних напружень у довгому неоднорідному порожнистому циліндрі; отримати точний аналітичний вираз

для інтенсивності теплових джерел у ФГМ, які створюють температурне поле, що призводить до нульових радіальних і колових (внаслідок виконання рівняння рівноваги) напружень за відсутності масових сил та осьових навантажень; обчислити значення температурного поля та інтенсивності теплових джерел у реально існуючому функціонально-градієнтному матеріалі, які повинні забезпечити відсутність радіальних та колових напружень у неоднорідному циліндрі.

Вплив модуля пружності і коефіцієнта Пуассона на розподіл температури, який призводить до нульових радіальних та колових напружень за відсутності осьових силових навантажень та масових сил, можна компенсувати довільною сталою, яку містять вирази для температурного поля (9) або (10).

РЕЗЮМЕ. Предложен метод определения стационарного температурного поля, обеспечивающего нулевые радиальные напряжения по толщине длинного полого неоднородного вдоль радиуса цилиндра, следовательно, и отсутствие круговых напряжений при нулевых массовых силах и осевой нагрузке. Решение соответствующей неклассической несвязанной задачи термоупругости сведено к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода относительно температуры. Получены точные аналитические выражения для температурного поля и интенсивности тепловых источников. Получена зависимость между коэффициентами линейного теплового расширения и теплопроводности материала, обеспечивающая при заданных тепловых нагрузках отсутствие радиальных и круговых напряжений. Проведены расчеты температурных полей и интенсивностей тепловых источников для реально существующих материалов.

SUMMARY. The method to determine the steady temperature field, ensuring zero radial stresses by a width of a long hollow inhomogeneous along the radius cylinder and therefore the absence of circumferential stresses at zero mass forces and absence of axial loading has been proposed. The solution of corresponding non-classical steady uncoupled thermo-elasticity problem has been reduced to solving the Fredholm integral equation of the second kind relative to the temperature. The corresponding exact analytical expressions for temperature field and intensity of thermal sources have been obtained. The relation between linear thermal expansion coefficient and thermal conductivity factor providing, under known thermal loading, the absence of radial and circumferential stresses has been written. The numerical calculations of temperature fields and intensity of heat sources for real existing materials have been proposed.

1. *New Analysis for the FGM Thick Cylinders Under Combined Pressure and Temperature Loading* / K. Abrinia, H. Naei, F. Sadeghi, and F. Djuvanroodi // *American J. Appl. Sci.* – 2008. – 5, № 7. – С. 852–859.
2. *Bohidar S. K., Sharma R., and Mishra P. R.* Functionally graded materials: a critical review // *Int. J. of Research (IJR).* – 2014. – 1, № 7. – P. 289–301.
3. *Functionally graded materials in the 21st century: a workshop on trends and forecasts* / Ed.: Kiyoshi Ichikawa. – US: Springer, 2001. – XVI. – 242 p.
4. *Підступяч Я. С.* Вибрані праці. – К.: Наук. думка, 1995. – 460 с.
5. *Вигак В. М.* Управление температурными напряжениями и перемещениями. – К.: Наук. думка, 1988. – 312 с.
6. *Кушнір Р. М., Попович В. С., Ясінський А. В.* Оптимізація та ідентифікація в термомеханіці неоднорідних тіл // *Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: в 5 т.* – Львів: Сполом, 2011. – 5. – 256 с.
7. *Калиняк Б. М.* Рівняння Фредгольма 2-го роду відносно радіальних напружень для визначення термопружного стану неоднорідного порожнистого довгого циліндра // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2013. – 56, № 3. – С. 141–147.
8. *Kanwal R. P.* Linear Integral Equations: Theory and Technique. – New York; London; Toronto; Sydney; San-Francisco: Academic Press, 1971. – 298 p.
9. *Shen H.-S.* Functionally graded materials: Nonlinear analysis of plates and shells. – Boca Raton; London; New York: CRC Press, 2009. – 280 p.

Одержано 20.04.2015