

УДК 539.3

ЛОКАЛЬНЕ ПРОКОВЗУВАННЯ ТІЛ, ЗУМОВЛЕНЕ НЕОДНОРІДНИМ КОЕФІЦІЄНТОМ ТЕРТЯ

*Н. І. МАЛАНЧУК**Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів*

Досліджено контактну взаємодію двох пружних ізотропних тіл за умов плоскої деформації з урахуванням проковзування, зумовленого локальною неоднорідністю коефіцієнта тертя, за послідовного навантаження нормальними та зсувними зусиллями. Використовуючи метод комплексних потенціалів, відповідну контактну задачу звели до сингулярного інтегрального рівняння на відносний зсув меж тіл на ділянці проковзування, розв'язок якого знайшли в аналітичній формі. Проаналізовано вплив зовнішнього навантаження на відносний зсув меж тіл на цій ділянці, її довжину та контактні напруження.

Ключові слова: *контактна взаємодія, узгоджені поверхні, неоднорідний коефіцієнт тертя, зчеплення, проковзування, відносний зсув.*

Контактну взаємодію деформівних тіл з урахуванням зчеплення і проковзування сьогодні інтенсивно досліджують [1–6] через актуальні проблеми контактної міцності, фретинг-втоми та зношування. К. Johnson [2], класифікуючи підходи до розв'язання контактних задач за геометрією тіл, виділяє два основних класи поверхонь – узгоджені і неузгоджені. Вперше задачі зі зчепленням і фрикційним проковзуванням для неузгоджених тіл розв'язав С. Cattaneo [7], а огляд праць з цієї проблематики можна знайти в монографіях [1, 8].

Дослідження зчеплення і проковзування тіл узгодженої форми започатковані у працях [9–11], де вивчали локальне проковзування на лінії контакту смуги і півплощини з ідентичних матеріалів під дією зосередженої сили. Розв'язано задачі про локальне фрикційне проковзування півплощин з узгодженими межами, одна з яких має геометричну неоднорідність у вигляді плиткової виїмки, за послідовного [12, 13] або одночасного [14] навантажень стискальними і зсувними зусиллями. Вивчено взаємодію тіл з малими нерівностями меж за умови, що сили тертя виникають на всій області контакту [15, 16].

Контакт без тертя тіл з узгодженими межами за наявності між ними зазорів розглянуто в працях [17–21]. Вивчено безфрикційну взаємодію узгоджених поверхонь для різних видів локальних контактних неоднорідностей, зокрема, заповнювача міжконтактних зазорів [22–29] та поверхневого термоопору [30–34]. Досліджено [35] локальне проковзування тіл, матеріали яких однакові, в межах ділянки з пониженим коефіцієнтом тертя.

Нижче вивчено контактне проковзування пружних ізотропних тіл, зумовлене локальною поверхневою фізичною неоднорідністю з пониженим коефіцієнтом тертя, коли ділянка проковзування поширюється як у межах цієї неоднорідності, так і поза нею, за послідовного навантаження спершу стискальними, а потім зсувними зусиллями.

Формулювання задачі. Розглянемо дві пружні ізотропні півплощини D_1 (нижню) і D_2 (верхню), матеріали яких мають однакові модулі зсуву ($G_1 = G_2 = G$)

Контактна особа: Н. І. МАЛАНЧУК, e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

і коефіцієнти Пуассона ($\nu_1 = \nu_2 = \nu$). Межі обох тіл прямолінійні. Півплощини контактують за умов плоскої деформації вздовж прямої $y = 0$, $-\infty < x < \infty$, на відрізку $|x| < b$ якої локалізована фізична поверхнева неоднорідність, де коефіцієнт кулонівського тертя має параболічну залежність від координати: $f_K(x) = f((1-A)(x/b)^2 + A)$, $0 < A < 1$. Зовні цього відрізка коефіцієнт тертя – стала величина ($f_K(x) = f$, $|x| \geq b$) і його називатимемо фоновим. Стала A рівна відношенню мінімального значення коефіцієнта тертя, яке досягається в точці $x = 0$ у центрі поверхневої неоднорідності, до фонового коефіцієнта тертя ($A = f_K(0)/f$) та характеризує максимальне пониження коефіцієнта тертя.

Тіла спочатку взаємно притискаються рівномірно розподіленими на нескінченності зусиллями P , перпендикулярними до лінії контакту, які надалі залишаються незмінними. Після цього контактна пара на нескінченності піддається дії монотонно зростаючих зсувних зусиль S (рис. 1).

Зсувне навантаження не спричиняє взаємного проковзування меж тіл, допоки нормальні та дотичні контактні напруження $\sigma_y^0(x,0)$ і $\tau_{xy}^0(x,0)$, знайдені за умов повного зчеплення півплощин, задовольняють нерівність $|\tau_{xy}^0(x,0)| < f_K(x)|\sigma_y^0(x,0)|$ (надалі називатимемо її умовою зчеплення). Оскільки $\sigma_y^0(x,0) = -P$, $\tau_{xy}^0(x,0) = S$, а

$\min_x f_K(x) = f_K(0) = fA$, то за дії зсувних зусиль з діапазону $0 < S < S_0$, де $S_0 = fAP$

– критичне значення зсувних зусиль, тіла перебуватимуть у зчепленні. Якщо ж зсувне навантаження S перевищить S_0 на як завгодно малу величину, то умова зчеплення порушиться в околі початку координат, де коефіцієнт тертя мінімальний, і розпочнеться фрикційне проковзування тіл. За подальшого монотонного зростання зсувного навантаження в діапазоні $S_0 < S < fP$ довжина ділянки проковзування зростатиме. Як тільки зсувне навантаження досягне величини $S = fP$, то тіла проковзуватимуть вздовж всієї лінії контакту півплощин.

Розглянемо таке зсувне навантаження S , $S_0 < S < fP$, за якого відбувається локальне проковзування вздовж деякої ділянки $|x| < c$. Зауважимо, що ділянка проковзування може знаходитися як у межах ділянки з пониженим коефіцієнтом тертя ($c < b$), так і поширюватися поза її межі ($c \geq b$). На ній виникають дотичні напруження $\tau_{xy}(x,0)$, зумовлені силами тертя та зв'язані з контактним тиском

$|\sigma_y(x,0)|$ законом Кулона–Амонтона $|\tau_{xy}(x,0)| = f_K(x)|\sigma_y(x,0)|$.

Контактно-крайові умови сформульованої задачі матимуть вигляд:

- на ділянках зчеплення ($y = 0$, $|x| \geq c$)

$$\begin{aligned} \sigma_y^-(x,0) &= \sigma_y^+(x,0), & \tau_{xy}^-(x,0) &= \tau_{xy}^+(x,0), \\ u^-(x,0) &= u^+(x,0), & v^-(x,0) &= v^+(x,0); \end{aligned} \quad (1)$$

- на ділянці проковзування ($y = 0$, $-c < x < c$)

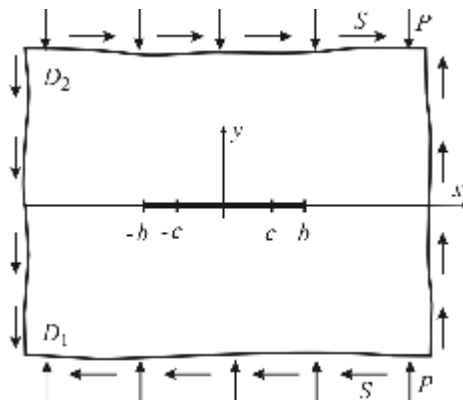


Рис. 1. Контакт тіл.

Fig. 1. Contact of solids D_1 and D_2 .
(P – normal load; S – shear load;
($-b, b$) – zone of friction coefficient
reduction; ($-c, c$) – slip zone).

$$\sigma_y^-(x, 0) = \sigma_y^+(x, 0), \quad \tau_{xy}^-(x, 0) = \tau_{xy}^+(x, 0), \quad (2)$$

$$v^-(x, 0) = v^+(x, 0), \quad (3)$$

$$\tau_{xy}^-(x, 0) = -f_K(x)\sigma_y^-(x, 0); \quad (4)$$

- на нескінченності

$$\begin{aligned} \sigma_y(x, \pm\infty) &= -P, \quad \tau_{xy}(x, \pm\infty) = S, \quad -\infty < x < \infty, \\ \sigma_x(\pm\infty, y) &= 0, \quad \tau_{xy}(\pm\infty, y) = S, \quad -\infty < y < \infty. \end{aligned} \quad (5)$$

Поза ділянкою проковзування контактні напруження задовольняють нерівність (умову зчеплення)

$$\tau_{xy}(x, 0) < f_K(x) |\sigma_y(x, 0)|, \quad |x| > c. \quad (6)$$

Тут σ_y , σ_x , τ_{xy} – компоненти тензора напружень; u , v – компоненти вектора переміщень; індексами “–”, “+” позначено граничні значення функцій на лінії спряження у півплощинах D_1 , D_2 . Знак “–” біля коефіцієнта тертя в умові (4) вибрали з фізичних міркувань, враховуючи напрям проковзування меж тіл. Потрібно визначити розмір ділянки проковзування, відносний зсув меж тіл вздовж неї та контактні напруження.

Методика розв’язування. За вищесформульованих умов на ділянці проковзування виникає відносний зсув меж півплощин $U(x) = u^-(x, 0) - u^+(x, 0)$, $|x| < c$. Використаємо комплексні подання напружень та похідних від переміщень через функцію $U(x)$ [12]:

$$\begin{aligned} \sigma_y - i\tau_{xy} &= \Phi_l(z) - \Phi_l(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_l'(z)} - P + iS, \\ 2G(u' + iv') &= \kappa\Phi_l(z) + \Phi_l(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_l'(z)} + (3 - \kappa)P/4, \\ \Phi_1(z) &= \frac{(-1)^l G}{\pi i(1 + \kappa)} \int_{-c}^c \frac{U'(t)dt}{t - z}, \quad \Phi_2(z) = -\Phi_1(z), \quad z \in D_l, \quad l = 1, 2. \end{aligned} \quad (7)$$

Тут $z = x + iy$ – комплексна змінна, $\kappa = 3 - 4\nu$. Комплексні потенціали $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$ зникають на нескінченності ($\Phi_l(\infty) = 0$, $l = 1, 2$).

Зауважимо, що подання (7) задовольняють всі контактні-крайові умови задачі (1)–(5), крім умови (4). Визначивши з подань (7) нормальні та дотичні контактні напруження

$$\sigma_y(x, 0) = -P, \quad -\infty < x < \infty, \quad (8)$$

$$\tau_{xy}(x, 0) = \frac{-2G}{\pi(1 + \kappa)} \int_{-c}^c \frac{U'(t)dt}{t - x} + S, \quad -\infty < x < \infty, \quad (9)$$

і задовольнивши умову (4), отримаємо сингулярне інтегральне рівняння (СІР) для визначення похідної від відносного зсуву меж тіл:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \frac{U'(t)dt}{t - x} = \frac{1 + \kappa}{2G} (S - f_K(x)P), \quad |x| \leq c. \quad (10)$$

Зі співвідношення (8) та умов (4), (6) випливає, що проковзування не змінює нормальних контактних напружень $\sigma_y(x, 0)$, а дотичні нормальні напруження $\tau_{xy}(x, 0)$ обмежені вздовж всієї лінії контакту. Зі співвідношення (9), враховуючи асимптотичну поведінку інтеграла Коші поблизу кінців відрізка інтегрування [36],

отримуємо, що для обмеженості $\tau_{xy}(x,0)$ необхідно, щоб функція $U'(x)$, яку визначаємо з рівняння (10), була обмежена і задовольняла умову $U'(\pm c) = 0$. Такий розв'язок СІР (10) існує тоді, коли його права частина задовольняє умову [36]

$$\frac{1+\kappa}{2G} \int_{-c}^c \frac{S - f_k(t)P}{\sqrt{c^2 - t^2}} dt = 0. \quad (11)$$

Згідно з теорією СІР [36], знаходимо обмежений розв'язок рівняння (10):

$$U'(x) = \frac{1+\kappa}{2G} fP(1-A) \frac{x}{b} \sqrt{\frac{c^2}{b^2} - \frac{x^2}{b^2}}, \quad |x| \leq c, \quad c \leq b,$$

$$U'(x) = \frac{(1+\kappa)(1-A)fP}{\pi G} \left[\frac{\Gamma(c, x, b) - \Gamma(c, x, -b)}{4} \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right) + \frac{x}{b} \cdot \arcsin \frac{b}{c} \cdot \sqrt{\frac{c^2}{b^2} - \frac{x^2}{b^2}} \right],$$

$$|x| \leq c, \quad c > b. \quad (12)$$

Тут

$$\Gamma(c, x, \xi) = \ln \frac{c^2 - \xi x + \sqrt{(c^2 - x^2)(c^2 - \xi^2)}}{c^2 - \xi x - \sqrt{(c^2 - x^2)(c^2 - \xi^2)}}.$$

Якщо ділянка проковзування лежить у межах відрізка з пониженим коефіцієнтом тертя ($c \leq b$), то з умови (11) зразу визначаємо її довжину:

$$c = b \sqrt{2 \frac{S/Pf - A}{1-A}}, \quad c \leq b. \quad (13)$$

Якщо ж проковзування поширилося поза межі цього відрізка ($c > b$), то з умови (11) отримуємо трансцендентне рівняння

$$\left(2 - \frac{c^2}{b^2} \right) \cdot \arcsin \frac{b}{c} + \sqrt{\frac{c^2}{b^2} - 1} = \pi \cdot \frac{1 - S/fP}{1-A}, \quad c > b, \quad (14)$$

для визначення довжини ділянки проковзування.

З рівнянь (13) і (14) бачимо, що розмір ділянки проковзування залежить від сталої A та відношення зсувного зусилля до стискального, помноженого на фоновий коефіцієнт тертя S/fP , проте зовсім не залежить від пружних сталей матеріалу.

Внаслідок неперервності дотичних переміщень з переходом через точки $x = \pm c$ розмежування ділянок зчеплення і проковзування функція $U(x)$ повинна задовольняти умову $U(\pm c) = 0$. Інтегруючи співвідношення (12) з урахуванням цієї умови, визначимо відносний зсув меж тіл на ділянці проковзування:

$$U(x) = -\frac{1+\kappa}{6Gb^2} fP(1-A)(c^2 - x^2)^{3/2}, \quad |x| \leq c, \quad c \leq b,$$

$$U(x) = \frac{1+\kappa}{4\pi G} (1-A) fP \left[(x-b)\Gamma(c, x, b) - (x+b)\Gamma(c, x, -b) - \frac{x^3}{3b^2} (\Gamma(c, x, b) - \Gamma(c, x, -b)) + \right.$$

$$\left. + \frac{2b}{3} \ln \left(\frac{\left(1 - \sqrt{1 - x^2/c^2} - x^2/b^2 - x^2/b^2 \sqrt{1 - b^2/c^2} \right) \left(\sqrt{c^2/b^2 - 1} + c/b \right)}{\left(1 - \sqrt{1 - x^2/c^2} - x^2/b^2 + x^2/b^2 \sqrt{1 - b^2/c^2} \right) \left(\sqrt{c^2/b^2 - 1} - c/b \right)} \right) + \right.$$

$$+\frac{4}{3b}\sqrt{(c^2-x^2)(c^2-b^2)}-\frac{4}{3b^2}\cdot\arcsin\frac{b}{c}\cdot(c^2-x^2)^{3/2}], |x|\leq c, c\geq b.$$

З рівності (9), враховуючи (12), знаходимо контактні дотичні напруження:

$$\tau_{xy}(x,0) = (1-A) fP \left(\frac{x^2}{b^2} - \frac{c^2}{2b^2} \right) + S, |x| \leq c, c \leq b,$$

$$\tau_{xy}(x,0) = -(1-A) fP \left(\frac{|x|}{b} \sqrt{\frac{x^2}{b^2} - \frac{c^2}{b^2}} - \frac{x^2}{b^2} + \frac{c^2}{2b^2} \right) + S, |x| \geq c, c \leq b;$$

$$\tau_{xy}(x,0) = -\frac{1-A}{\pi} fP \left[\frac{1}{2\pi} \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right) \int_{-c}^c \frac{(\Gamma(c,t,b) - \Gamma(c,x,b)) - (\Gamma(c,t,-b) - \Gamma(c,x,-b))}{t-x} dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi} \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right) (\Gamma(c,x,b) - \Gamma(c,x,-b)) \ln \left| \frac{c-x}{c+x} \right| - \sqrt{\frac{c^2}{b^2} - 1} - 2 \arcsin \frac{b}{c} \left(\frac{x^2}{b^2} - \frac{c^2}{2b^2} \right) \right] + S,$$

$$|x| \leq c, c \geq b,$$

$$\tau_{xy}(x,0) = S - \frac{1-A}{\pi} fP \left[\frac{1}{2\pi} \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right) \int_{-c}^c \frac{\Gamma(c,t,b) - \Gamma(c,t,-b)}{t-x} dt - \sqrt{\frac{c^2}{b^2} - 1} + \right.$$

$$\left. + 2 \arcsin \frac{b}{c} \left(\frac{|x|}{b} \sqrt{\frac{x^2}{b^2} - \frac{c^2}{b^2}} - \frac{x^2}{b^2} + \frac{c^2}{2b^2} \right) \right], |x| \geq c, c \geq b. \quad (15)$$

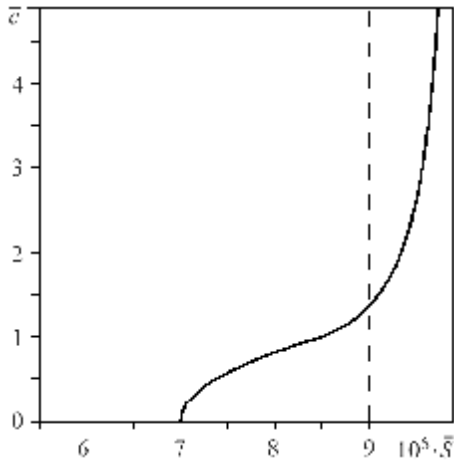


Рис. 2. Залежність півдовжини ділянки проковзування \bar{c} від зсувних зусиль на нескінченності \bar{S} .

Fig. 2. Dependence of a half-length of the slip region ($\bar{c} = c/b$) on the shear forces at infinity ($\bar{S} = S/G$).

цей ріст повільний. Поза його межами ($\bar{c} > 1$) довжина ділянки проковзування збільшується значно швидше. Як тільки зсувні зусилля досягнуть значення $\bar{S} = \bar{f}\bar{P}$, існуватиме глобальне проковзування меж тіл ($\bar{c} \rightarrow \infty$).

Інтеграли, що входять у праву частину виразу (15), регулярні.

Аналіз результатів. Результати обчислень, коли коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,2$, фоновий коефіцієнт тертя $f = 0,1$, стала $A = 0,7$, нормальне навантаження $\bar{P} = 10^{-5}$ ($\bar{P} = P/G$), проілюстровано на рис. 2–4 для безрозмірних величин – координати $\bar{x} = x/b$, півдовжини ділянки проковзування $\bar{c} = c/b$, відносного зсуву меж тіл $\bar{U} = U/b$, дотичних напружень $\bar{\tau}_{xy} = \tau_{xy}/G$, нормальних напружень $\bar{\sigma}_y = \sigma_y/G$, зсувного навантаження $\bar{S} = S/G$.

Залежність довжини ділянки проковзування від зсувних зусиль, як видно з формул (13), (14), нелінійна (рис. 2). Зі збільшенням зсувних зусиль вона зростає. В межах відрізка з пониженим коефіцієнтом тертя ($\bar{c} \leq 1$)

Зі збільшенням довжини ділянки проковзування зростає відносний зсув меж тіл, який досягає свого максимального значення в центрі неоднорідності, де коефіцієнт тертя найменший (рис. 3). Коли ділянка проковзування виходить за межі відрізка пониженого коефіцієнта тертя (криві 2–4), графіки мають незначний злам у точках $\bar{x} = \pm 1$.

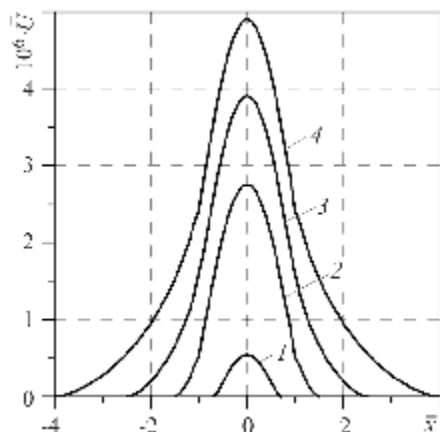


Рис. 3. Fig. 3.

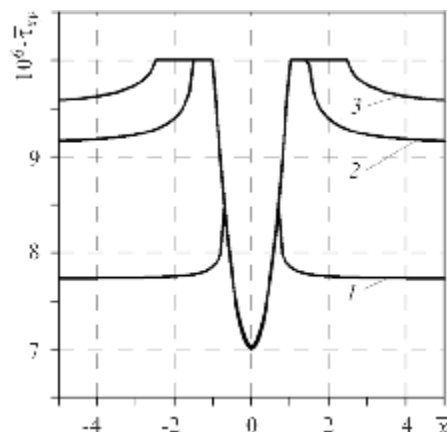


Рис. 4. Fig. 4.

Рис. 3. Відносний зсув меж тіл \bar{U} на ділянці проковзування \bar{c} ($1 - \bar{c} = 0,7$, $\bar{S} = 7,7 \cdot 10^{-6}$; $2 - \bar{c} = 1,5$, $\bar{S} = 9,1 \cdot 10^{-6}$; $3 - \bar{c} = 2,5$, $\bar{S} = 9,5 \cdot 10^{-6}$; $4 - \bar{c} = 4$, $\bar{S} = 9,7 \cdot 10^{-6}$).

Fig. 3. Relative tangential shift of bodies boundaries $\bar{U} = U/b$ on a slip region \bar{c} ($1 - \bar{c} = 0.7$ – half-lengths of the slip region, $\bar{S} = 7.7 \cdot 10^{-6}$ – shear load; $2 - \bar{c} = 1.5$, $\bar{S} = 9.1 \cdot 10^{-6}$; $3 - \bar{c} = 2.5$, $\bar{S} = 9.5 \cdot 10^{-6}$; $4 - \bar{c} = 4$, $\bar{S} = 9.7 \cdot 10^{-6}$).

Рис. 4. Розподіл дотичних $\bar{\tau}_{xy}$ напружень для різних довжин ділянки проковзування ($1 - \bar{c} = 0,7$, $\bar{S} = 7,7 \cdot 10^{-6}$; $2 - \bar{c} = 1,5$, $\bar{S} = 9,1 \cdot 10^{-6}$; $3 - \bar{c} = 2,5$, $\bar{S} = 9,5 \cdot 10^{-6}$).

Fig. 4. Distribution of tangential stresses, $\bar{\tau}_{xy}$ ($\bar{\tau}_{xy} = \tau_{xy}/G$), over the contact surface for different lengths of the slip zone ($1 - \bar{c} = 0.7$, $\bar{S} = 7.7 \cdot 10^{-6}$; $2 - \bar{c} = 1.5$, $\bar{S} = 9.1 \cdot 10^{-6}$; $3 - \bar{c} = 2.5$, $\bar{S} = 9.5 \cdot 10^{-6}$).

Зі збільшенням зсувних зусиль зростають дотичні контактні напруження (рис. 4). Крива 1 відповідає зсувному зусиллю, за якого ділянка проковзування знаходиться в межах відрізка з пониженим коефіцієнтом тертя, криві 2 та 3 – зусиллям, за яких проковзування поширюється за межі цього відрізка. На ділянці проковзування дотичні напруження рівні контактному тиску, помноженому на коефіцієнт тертя. Віддаляючись від її країв, напруження $\bar{\tau}_{xy}$ монотонно спадають до своїх значень, заданих на нескінченності. Допоки проковзування локалізується в межах ділянки пониженого коефіцієнта тертя (крива 1), графік дотичних контактних напружень має піки, розташовані на краях ділянки проковзування, а їх максимальні значення зростають зі збільшенням зсувних зусиль. Коли ж проковзування виходить за межі цієї ділянки, то максимальні дотичні напруження перестають залежати від зсувних зусиль. Вони рівні прикладеному стискальному навантаженню, помноженому на фоновий коефіцієнт тертя (криві 2, 3), та локалізуються вздовж деяких відрізків ділянки проковзування, що прилягають до ділянки з пониженим коефіцієнтом тертя. Довжина цих відрізків з ростом зсувного навантаження збільшується.

ВИСНОВКИ

Досліджено контактну взаємодію тіл з урахуванням локального фрикційного проковзування, зумовленого відрізком з пониженим коефіцієнтом тертя. Встановлено, що довжина ділянки проковзування не залежить від пружних сталих матеріалів тіл (якщо їх матеріали однакові). Вона зростає зі збільшенням відношення зсувних та стискальних зусиль і спадає з ростом фонового коефіцієнта тертя. Як тільки край ділянки проковзування досягне краю відрізка з пониженим коефіцієнтом тертя, то з подальшим підвищенням зсувних зусиль вона монотонно поширюється на всю поверхню спряження. Відносний зсув меж тіл зростає зі збільшенням довжини ділянки проковзування і досягає максимуму на її середині, де коефіцієнт тертя мінімальний. Максимальні значення дотичних контактних напружень зростають зі збільшенням зсувних зусиль, доки проковзування локалізується в межах ділянки пониженого коефіцієнта тертя. Коли ж воно виходить за ці межі, то максимальні дотичні напруження дорівнюють прикладеному стискальному навантаженню, помноженому на фоновий коефіцієнт тертя.

РЕЗЮМЕ. Исследовано контактное взаимодействие двух упругих тел в условиях плоской деформации с учетом проскальзывания, обусловленного локальной неоднородностью коэффициента трения, при последовательном нагружении нормальными и сдвиговыми усилиями. Соответствующая контактная задача с использованием метода комплексных потенциалов сведена к сингулярному интегральному уравнению на относительный сдвиг границ тел на участке проскальзывания, которое решено аналитически. Проанализировано влияние внешней нагрузки на относительный сдвиг границ тел на участке проскальзывания, длину этого участка и контактные напряжения.

SUMMARY. The contact interaction of two elastic solids, having a local surface defect under plane deformation, with account of slipping, caused by local heterogeneity of the friction coefficient under subsequent shear and normal loading, is studied. Using the complex potentials the corresponding contact problem is reduced to a singular integral equation for relative shear of the bodies boundaries, which is solved analytically. The influence of the external loading on the relative shear of the boundaries of bodies in the slip region, length of this region and contact stresses are analyzed.

1. Hills D. A., Nowell D., and Sackfield A. Mechanics of elastic contact. – Butterworth-Heinemann, Oxford, 1993.
2. Johnson K. L. Contact Mechanics. – Cambridge Univ. Press: Cambridge, 1985.
3. Goryacheva I. G., Rajeev P. T., and Farris T. N. Wear in partial slip contact // J. Tribology. – 2001. – **123**. – P. 848–856.
4. Panasyuk V. V., Datsyshyn O. P., and Shchur R. B. Residual durability of solids contacting under conditions of fretting fatigue // Materials Science. – 2000. – **36**, № 2. – P. 153–169.
5. Datsyshyn O. P. and Kadyra V. M. A fracture mechanics approach to prediction of pitting under fretting fatigue conditions // Int. J. of Fatigue. – 2006. – **28**, № 4. – P. 375–385.
6. Дацисьин О. П., Кадыра В. М. Розвиток крайових тріщин під час фретинг-втоми за умов зчеплення/проковзування в контакті між тілами // Машинознавство. – 2006. – № 3. – С. 9–15.
7. Cattaneo C. Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli sforzi // Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei. – 1938. – **27**. – P. 342–348.
8. Острык В. И., Улитко А. Ф. Метод Винера–Хопфа в контактных задачах теории упругости. – К.: Наук. думка, 2006. – 328 с.
9. Comninou M., Schmueser D., and Dundurs J. Frictional slip between a layer and a substrate caused by a normal load // Int. J. Engn. Sci. – 1980. – **18**. – P. 131–137.
10. Schmueser D., Comninou M., and Dundurs J. Separation and slip between a layer and substrate caused by a tensile load // Ibid. – 1980. – **18**. – P. 1149–1155.
11. Comninou M. and Barber J. Frictional slip between a layer and a substrate due to a periodic tangential surface force // Int. J. Solids and Structures. – 1983. – **19**, № 6. – P. 533–539.
12. Martynyak R. M., Malanchuk N. I., and Monastyr's'kyi B. E. Shear of two half planes pressed to each other and containing a surface groove. Part 1. Full contact // Materials Science. – 2005. – **41**, № 2. – P. 178–185.

13. *Martynyak R. M., Malanchuk N. I., and Monastyr's'kyi B. E.* Shear of two half planes pressed to each other and containing a surface groove. Part 2. Incomplete contact // *Materials Science*. – 2006. – **42**, № 4. – P. 551–559.
14. *Мартиняк Р. М., Маланчук Н. І., Монастирський Б. Є.* Пружна взаємодія двох півплощин за локального зсуву границь на ділянці міжконтактного просвіту // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2005. – **48**, № 3. – С. 101–109.
15. *Martynyak R. and Kryshchak A.* Friction contact of two elastic half-planes with local recesses in boundary // *J. Friction and Wear*. – 2000. – **21**, № 4. – P. 6–15.
16. *Martynyak R. and Kryshchak A.* Friction contact of two elastic half-planes with wavy surfaces // *Ibid.* – 2000. – **21**, № 5. – P. 1–8.
17. *Kryshchak A. and Martynyak R.* Strength of a system of mated anisotropic half-planes with surface recesses // *Int. J. Engn. Sci.* – 2001. – **39**. – P. 403–413.
18. *Monastyr's'kyi B. Ye.* Axially symmetric contact problem for half-spaces with geometrically perturbed surface // *Materials Science*. – 1999. – **35**, № 6. – P. 777–782.
19. *Monastyr's'kyi B. and Martynyak R.* Contact of two half spaces one of which contains a ring-shaped pit. Part 1. Singular integral equation // *Materials Science*. – 2003. – **39**, № 2. – P. 206–213.
20. *Shvets R. M., Martynyak R. M., and Kryshchak A. A.* Discontinuous contact of an anisotropic half-plane and a rigid base with disturbed surface // *Int. J. Engn. Sci.* – 1996. – **34**, № 2. – P. 183–200.
21. *Kubenko V. D.* Nonstationary Plane Elastic Contact Problem for Matched Cylindrical Surfaces // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – **40**, № 1. – P. 51–60.
22. *Kit G. S., Martynyak R., and Machishin I. M.* The effect of fluid in the contact gap on the stress state of conjugate bodies // *Ibid.* – 2003. – **39**, № 3. – P. 292–299.
23. *Martynyak R. M. and Slobodyan B. S.* Contact of elastic half spaces in the presence of an elliptic gap filled with liquid // *Materials Science*. – 2009. – **45**, № 1. – P. 66–71.
24. *Martynyak R. M. and Chumak K. A.* Thermoelastic contact of half-spaces with equal thermal distortivities in the presence of a heat-permeable intersurface gap // *J. Math. Sci.* – 2010. – P. 1–16.
25. *Martynyak R. M., Slobodyan B. S., and Zelenyak V. M.* Pressure of an elastic half space on a rigid base with rectangular hole in the case of a liquid bridge between them // *Ibid.* – 2009. – **160**, № 4. – P. 470–477.
26. *Martynyak R. M.* The contact of a half-space and an uneven base in the presence of an intercontact gap filled by an ideal gas // *Ibid.* – 2001. – **107**, № 1. – P. 3680–3685.
27. *Martynyak R. M. and Slobodyan B. S.* Influence of liquid bridges in the intersurface gap on the contact of bodies made of compliant materials // *Materials Science*. – 2008. – **44**, № 2. – P. 147–155.
28. *Martynyak R. M.* Mechanothermodiffusion interaction of bodies with regard for the filler of intercontact gaps // *Materials Science*. – 2000. – **36**, № 2. – P. 300–304.
29. *Martynyak R. M.* Instability of thermoelastic interaction between a half-space and a rigid base through a thin liquid layer // *J. Math. Sci.* – 2000. – **99**, № 5. – P. 1607–1615.
30. *Kryshchak A. A. and Martynyak R. M.* Lamination of anisotropic half-spaces in the presence of contact thermal resistance // *Int. Appl. Mech.* – 1999. – **35**, № 2. – P. 159–164.
31. *Kryshchak A. A. and Martynyak R. M.* Thermoelastic contact of anisotropic half spaces with thermal resistance // *Ibid.* – 1998. – **34**, № 7. – P. 629–634.
32. *Martynyak R. M., Honchar Kh. I., and Nahalka S. P.* Simulation of thermomechanical closure of an initially open interface crack with heat resistance // *Materials Science*. – 2003. – **39**, № 5. – P. 672–681.
33. *Martynyak R. M.* Thermal opening of an initially closed interface crack under conditions of imperfect thermal contact between its lips // *Materials Science*. – 1999. – **35**, № 5. – P. 612–622.
34. *Martynyak R. M. and Chumak K. A.* Thermoelastic delamination of bodies in the presence of a heat-conducting filler of the intercontact gap // *Materials Science*. – 2009. – **45**, № 4. – P. 1–10.
35. *Маланчук Н., Швець Р., Мартиняк Р.* Локальне проковзування тіл, зумовлене поверхневими неоднорідностями за дії силових і теплових навантажень // *Машинознавство*. – 2007. – № 7. – С. 15–20.
36. *Мухелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. – 600 с.

Одержано 21.10.2009