УДК 539.3

ЗВЕДЕННЯ ТРИВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ЗГИНУ ТОВСТИХ ПЛАСТИН ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОХ ДВОВИМІРНИХ ЗАДАЧ

В. П. РЕВЕНКО

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Запропоновано нову теорію згину товстої пластини, коли її напружений стан не описують гіпотези Кірхгофа–Лява або Тимошенка. Тривимірний напружено-деформований стан пластини розділено на симетричні згин і стиск. Для опису симетричного згину використано три гармонічних функції. Інтегруванням по товщині пластини виражено згинальні, крутні моменти і поперечні сили через дві двовимірні функції. Задоволені співвідношення тривимірної теорії пружності і побудовано замкнуту систему рівнянь у часткових похідних шостого порядку на введені функції без використання гіпотез про геометричний характер деформування пластини. Запропоновано аналітично-числовий метод їх розв'язання.

Ключові слова: *власні функції, товстостінний двошаровий циліндр, тривимірний напружений стан, тензор напружень.*

Пластини, до яких прикладені згинальні навантаження, широко використовують у будівельних та інженерних конструкціях [1–7]. Відомо [1–3], що згин товстих пластин потрібно розглядати як тривимірну задачу теорії пружності. У праці [8] нову теорію завантажених товстих пластин подали на основі теорії Кірхгофа–Лява з урахуванням градієнта згинального моменту, вважаючи, що прогини серединної поверхні суттєві. Виявили [9], що за згинання товстої пластини поперечною силою (у межах тривимірної теорії пружності) нормалі до недеформованої серединної поверхні значно відхиляються від нормалі до деформованої, а також викривляються. Відомі теорії згину пластин [1–8] постулюють характер деформації нормалі до серединної поверхні пластини і прямо не враховують крутний момент, прикладений до контуру пластини.

Нижче використано тривимірні подання напружень, а моменти та поперечні зусилля виражено через дві двовимірні функції, які визначено із рівнянь у часткових похідних.

Формулювання задачі і подання розв'язку. Розглянемо тривимірну статичну задачу теорії пружності для товстої пластини сталої товщини h, серединна поверхня якої займає область S і збігається з площиною Oxy декартової системи координат $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$. До обох поверхонь пластини ($z = h_j$, $h_1 = h/2$, $h_2 = -h/2$) прикладені нормальні $q_j(x,y)$, $i=\overline{1,2}$ навантаження, а дотичні – відсутні. Тривимірну теорію так навантаженої пластини розділимо на дві задачі: симетричні згин

$$u_i(x,y,-z) = -u_i(x,y,z)\,,\ i=\overline{1,2}\,,\ u_3(x,y,-z) = u_3(x,y,z) \tag{1}$$

і стиск

$$u_i(x,y,-z) = u_i(x,y,z)\,,\ i=\overline{1,2}\,,\ u_3(x,y,-z) = -u_3(x,y,z)\,,$$

Контактна особа: В. П. РЕВЕНКО, e-mail: victorrev@ukr.net

де u_i – переміщення у напрямку осей декартової системи координат. Для першої задачі нормальні навантаження поверхонь пластини рівні і направлені в одному напрямку:

$$\sigma_z(x,y,h_1)=g^+(x,y)\,,\qquad \sigma_z(x,y,h_2)=-g^+(x,y)\,, \tag{2}$$

а для другої – протилежно:

$$\sigma_z\left(x,y,\frac{h}{2}\right)=p^+(x,y),\qquad \sigma_z\left(x,y,-\frac{h}{2}\right)=p^+(x,y)\,,$$

де $g^+=\frac{1}{2}(q_1+q_2)$; $p^+=\frac{1}{2}(q_1-q_2)$; знаки “+”, “–“ описують відповідно функції на верхній $z=h_1$ і нижній $z=-h_1$ поверхнях пластини.

Знайдений раніше [10] загальний вираз розв’язку рівнянь Ляме можна подати у такому вигляді:

$$u_x=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y},\qquad u_y=\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x},\qquad u_z=\frac{\partial P}{\partial z}-4(1-\nu)\Phi\,, \tag{3}$$

де $P=z\Phi+\Psi$; Φ, Ψ, Q – тривимірні гармонічні функції переміщень; ν – коефіцієнт Пуассона. Функція P задовольняє рівняння

$$\Delta P+\frac{\partial^2}{\partial z^2}P=2\frac{\partial}{\partial z}\Phi\,, \tag{4}$$

де $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – двовимірний оператор Лапласа. Запишемо загальний вираз для нормальних

$$\sigma_j=2G\left[\frac{\partial^2 P}{\partial x_j^2}-2\nu\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}-(-1)^j\frac{\partial^2 Q}{\partial x_1\partial x_2}\right],\qquad \sigma_3=2G\left[\frac{\partial^2 P}{\partial x_3^2}-2(2-\nu)\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right] \tag{5}$$

та дотичних

$$\tau_{12}=G\left[2\frac{\partial^2 P}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 Q}{\partial x_1^2}\right],$$

$$\tau_{j3}=G\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left[2\frac{\partial P}{\partial x_3}-4(1-\nu)\Phi\right]-(-1)^j\frac{\partial^2 Q}{\partial x_{3-j}\partial x_3}\right],\qquad j=\overline{1,2} \tag{6}$$

напружень, де $G=E/2(1+\nu)$, E – модулі зсуву і Юнґа.

Детально розглянемо симетричний згин пластини. Тоді, як випливає зі співвідношень (1), (3), функції P, Ψ, Q будуть непарні відносно змінної z, а функція Φ – парна. Спочатку розглянемо випадок, коли другі похідні за змінною z від функцій переміщень не дорівнюють нулю.

Із умов симетричності введених функцій маємо умови:

$$\frac{\partial P^+}{\partial z}=\frac{\partial P^-}{\partial z},\qquad \frac{\partial\Psi^+}{\partial z}=\frac{\partial\Psi^-}{\partial z},\qquad \frac{\partial Q^+}{\partial z}=\frac{\partial Q^-}{\partial z},\qquad \Phi^-=\Phi^+\,. \tag{7}$$

Використаємо тривимірну теорію пружності і побудуємо двовимірну теорію згину товстої пластини. Для цього підставимо у відомі вирази [1, 2, 4] моментів і поперечних зусиль тривимірні напруження (5), (6):

$$M_j=\int_{-h_1}^{h_1} z\sigma_j dz=2G\left[\frac{\partial^2 P_1}{\partial x_j^2}-2\nu\psi-(-1)^j\frac{\partial^2 Q_1}{\partial x_1\partial x_2}\right],$$

$$H=\int_{-h_1}^{h_1} z\tau_{12}dz=G\left[2\frac{\partial^2 P_1}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 Q_1}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 Q_1}{\partial x_1^2}\right], \tag{8}$$

$$N_j=2G\left[2\frac{\partial}{\partial x_j}[P^+-(1-\nu)\tilde{\Phi}]-(-1)^j\frac{\partial Q^+}{\partial x_j}\right],\quad j=\overline{1,2},$$

де введено інтегральні функції $P_1=\int_{-h_1}^{h_1} zPdz$, $Q_1=\int_{-h_1}^{h_1} zQdz$, $\tilde{\Phi}=\int_{-h_1}^{h_1}\Phi dz$,

$$\psi=\int_{-h_1}^{h_1} z\frac{\partial}{\partial z}\Phi dz=h\Phi^+-\tilde{\Phi}. \tag{9}$$

Наведемо рівняння рівноваги пластини [1, 2]:

$$N_1=\frac{\partial M_1}{\partial x_1}+\frac{\partial H}{\partial x_2},\ N_2=\frac{\partial M_2}{\partial x_2}+\frac{\partial H}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x_1}+\frac{\partial N_2}{\partial x_2}+2g^+=0. \tag{10}$$

Поперечні сили визначимо також із рівнянь (10):

$$N_j=2G\left\{\frac{\partial}{\partial x_j}[\Delta P_1-2\nu\psi]-(-1)^j\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\Delta Q_1\right\},\quad j=\overline{1,2}. \tag{11}$$

Врахувавши рівняння на введені функції P_1, Q_1 і порівнюючи поперечні зусилля (8), (11), знайдемо:

$$\Delta P_1=2[P^+ +\nu\psi-(1-\nu)\tilde{\Phi}],\quad \Delta Q_1=2Q^+. \tag{12}$$

Використавши формули (5), (6), виразимо крайові умови (2) і умови відсутності дотичних навантажень на бічних поверхнях пластини так:

$$\sigma_3=g^+(x,y)=2G\left[\frac{\partial^2 P^+}{\partial x_3^2}-2(2-\nu)\frac{\partial\Phi^+}{\partial x_3}\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[2\frac{\partial P^+}{\partial x_3}-4(1-\nu)\Phi^+\right]-(-1)^j\frac{\partial^2 Q^+}{\partial x_{3-j}\partial x_3}=0,\quad j=\overline{1,2}. \tag{13}$$

Із двох останніх рівнянь (13) і другого (12) після деяких перетворень одержимо:

$$\frac{\partial P^+}{\partial x_3}-2(1-\nu)\Phi^+=0,\quad \frac{\partial Q^+}{\partial x_3}=0. \tag{14}$$

Для визначення функції ψ знайдемо нормальне переміщення верхньої поверхні пластини $u_z^+=\frac{\partial P^+}{\partial z}-4(1-\nu)\Phi^+$, яке після врахування першого співвідношення (14) набуде вигляду

$$u_z^+=-2(1-\nu)\Phi^+. \tag{15}$$

Розрахуємо середнє переміщення u_z уздовж нормалі до серединної поверхні пластини:

$$\tilde{u}_z = \frac{1}{h}\int_{-h_1}^{h_1} u_z dz = \frac{1}{h}(2P^+ - 4(1-\nu)\tilde{\Phi}) . \tag{16}$$

Зі співвідношень (15), (16) одержимо $P^+ = 2(1-\nu)\tilde{\Phi} - h(1-\nu)\Phi^+$, або після врахування співвідношення (9)

$$P^+ = (1-\nu)(\tilde{\Phi} - \psi) . \tag{17}$$

Використаємо умови (14), (17), візьмемо до уваги перше рівняння (12) та знайдемо:

$$\psi = -\frac{1}{2(1-2\nu)}\Delta P_1 . \tag{18}$$

Після врахування виразу (18) згинні моменти (8) і поперечні зусилля (11) відповідно набудуть вигляду

$$M_j = \int_{-h_1}^{h_1} z\sigma_j dz = 2G\left[\frac{\partial^2 P_1}{\partial x_j^2} + \frac{\nu}{(1-2\nu)}\Delta P_1 - (-1)^j \frac{\partial^2 Q_1}{\partial x_1 \partial x_2}\right],$$

$$N_j = G\left[2\frac{1-\nu}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial x_j}\Delta P_1 - (-1)^j \frac{\partial}{\partial x_{3-j}}\Delta Q_1\right], \quad j = \overline{1,2} . \tag{19}$$

Підставимо зусилля (19) в останнє співвідношення (10) і знайдемо визначальне рівняння для функції P_1:

$$\Delta^2 P_1 = -\frac{1-2\nu}{(1-\nu)G} g^+(x,y) . \tag{20}$$

Отже, моменти і поперечні зусилля виразили через функцію P_1, яка задовольняє бігармонічне рівняння (20), і функцію Q_1, що задовольняє друге рівняння (12) з невідомою правою частиною.

Побудуємо розв'язок другого рівняння (12), де права частина задовольняє другу умову (14). Для цього функції Q, Q_1, Q^+ задамо у вигляді скінченних рядів відносно змінної z:

$$Q = \sum_{k=1}^{N} z^{2k-1} f_k(x,y) , \quad Q_1 = \sum_{k=1}^{N} I_k f_k(x,y) , \quad Q^+ = \sum_{k=1}^{N} h_1^{2k-1} f_k(x,y) , \tag{21}$$

де N – задане натуральне число; $I_k = \int_{-h_1}^{h_1} z^{2k} dz = \frac{2}{2k+1} h_1^{2k+1}$; $f_k(x,y)$ – невідомі функції. З другої умови (14) випливає:

$$f_N(x,y) = \sum_{k=1}^{N-1} a_k f_k(x,y) , \tag{22}$$

де $a_k = -\frac{2k-1}{2N-1} h_1^{2k-2N}$. Підставимо гармонічну функцію Q, яку задає перший розклад (21), у тривимірне рівняння Лапласа, прирівняємо коефіцієнти за однакових степенів змінної z та одержимо систему рекурентних рівнянь:

$$\Delta f_k = -2k(2k+1) f_{k+1} , \quad k = \overline{1, N-1} . \tag{23}$$

Підставимо другу і третю суму ряду (21) у друге рівняння (12) і, використовуючи співвідношення (23) та математичні перетворення, позбудемось функції $f_N(x,y)$, тобто запишемо аналог рівняння (22) для $N-1$:

$$f_{N-1}(x,y) = -\frac{1}{b_{N-1}} \sum_{k=1}^{N-2} b_k f_k(x,y), \tag{24}$$

де

$$b_k = 2(k-1)(2k-1)(I_{k-1} + a_{k-1} I_N) +$$
$$+(N-1)(2N-1)(I_{N-1} + a_{N-1} I_N) a_k - 2(h_1^{2k-1} + h_1^{2N-1} a_k).$$

Якщо замість співвідношення (22) використати залежності (24) і виконати аналогічні обчислення, то визначимо функцію $f_{N-2}(x, y)$. Таким чином, можна редукувати подання розв'язку вихідного рівняння. Покажемо, як працює цей алгоритм. Покладемо $N = 3$ і з формули (24) одержимо:

$$f_2(x,y) = -\frac{b_1}{b_2} f_1(x,y),$$

де функція $f_1(x, y)$ задовольняє рівняння (23), коли $k = 1$. Звідси

$$\Delta f_1 = 6\frac{b_1}{b_2} f_1(x,y). \tag{25}$$

Розв'язавши рівняння (20), (25), подамо функції P_1, Q_1 як суму рядів.

Підставимо знайдені розподілені моменти і поперечні зусилля у відомі крайові умови [1] та одержимо крайові умови на контурі пластини L:

$$[\frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 Q_1}{\partial x_1 \partial x_2}]\sin 2\theta - 2[2\frac{\partial^2 P_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 Q_1}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 Q_1}{\partial x_1^2}]\cos 2\theta = \frac{1}{G} H_g |_L,$$

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2}\sin^2\theta + \frac{\nu}{(1-2\nu)}\Delta P_1 - \frac{\partial^2 Q_1}{\partial x \partial xy}\cos 2\theta + \frac{\partial^2 P_1}{\partial y^2}\cos^2\theta +$$

$$+\frac{1}{2}[2\frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 Q_1}{\partial x^2}]\sin 2\theta = \frac{1}{2G} M_g |_L, \tag{26}$$

$$[2\frac{1-\nu}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial x}\Delta P_1 + \frac{\partial}{\partial y}\Delta Q_1]\cos\theta + [2\frac{1-\nu}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial y}\Delta P_1 - \frac{\partial}{\partial x}\Delta Q_1]\sin\theta = \frac{1}{G} N_g |_L,$$

де H_g, M_g – зовнішні крутний і згинний моменти; N_g – поперечне зусилля; θ – кут між віссю Oy і нормаллю до контуру пластини L.

Вважатимемо, що крайова задача (20), (25), (26) розв'язана і знайдено розподілені моменти та поперечні зусилля, через які визначають напруження на поверхні пластини. Визначимо тепер переміщення на її поверхнях.

Розглянемо випадок, коди другі похідні за змінною z від введених функцій дорівнюють нулю, тоді шукані функції

$$\Phi = \Phi_0(x,y), \quad \Psi = z\Psi_0(x,y), \quad Q = zQ_0(x,y), \quad P = zP_0, \tag{27}$$

де $P_0 = z\Phi_0 + \Psi_0$, $\Delta\Phi_0 = 0$, $\Delta\Psi_0 = 0$. Врахувавши залежності (27), знайдемо моменти

$$M_j = 2GI_1\left[\frac{\partial^2 P_0}{\partial x_j^2} - (-1)^j \frac{\partial^2 Q_0}{\partial x_1 \partial x_2}\right], \quad H = GI_1\left[2\frac{\partial^2 P_0}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 Q_0}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 Q_0}{\partial x_1^2}\right]. \tag{28}$$

З умов (14) випливає $g^{+} = 0$, $N_j = 0$, $j = \overline{1,2}$, а введені функції зв'язані залежностями

$$2\frac{\partial}{\partial x_j}[P_0 - (1-\nu)\Phi_0] = (-1)^j \frac{\partial}{\partial x_{3-j}} Q_0, \quad j = \overline{1,2}.$$

Знайдені за формулами (28) розподілені моменти повинні задовольняти на контурі пластини перші дві крайові умови (26).

ВИСНОВКИ

Встановлено, що на основі тривимірної теорії пружності можна побудувати, не використовуючи гіпотез про розподіл переміщень і напружень, двовимірну теорію симетричного згину товстої пластини. Моменти і поперечні зусилля виражено через дві функції: перша задовольняє бігармонічне рівняння, а друга – двовимірне гармонічне з невідомою правою частиною. Крутні моменти виражено через введені функції. Побудовано рекурентні формули і розроблено методику знаходження у вигляді скінченного ряду розв'язку другого рівняння. Вперше побудовано теорію згину товстих пластин, яка явно враховує крутний момент, і задовольняє задані вздовж криволінійного контуру пластини згинальні і крутні моменти та поперечні зусилля.

РЕЗЮМЕ. Предложена новая теория изгиба толстой пластины, когда ее напряженное состояние не описывают гипотезы Кирхгофа–Лява или Тимошенко. Трехмерное напряженно-деформированное состояние пластины разделено на симметричный изгиб и сжатие. Для описания симметричного изгиба использованы три гармоничные функции. Путем интегрирования по толщине пластины изгибные, крутящие моменты и поперечные усилия выражены через две двумерные функции. Удовлетворены соотношения теории упругости и без использования гипотез о геометрическом характере деформирования пластины построена замкнутая система уравнений в частных производных шестого порядка. Предложен аналитико-численный метод их решения.

SUMMARY. A new theory of a thick plate bending, when its stress state is not deseribed by the hypothesis of Kirchhoff–Love or Tymoshenko, is proposed. To describe its symmetric bending three harmonic functions are proposed. For the description of its symmetric bending three harmonious functions are proposed. The components of the stress tensor are integrated over the thickness of the plate. Bending and torsional moments and also shear forces in two-dimensional functions are expressed. The ratios of the elasticity theory are satisfied without the use of the hypotheses on the geometric character of the plate deformation. A closed system of partial differential equations of the sixth order is constructed. The analytical and numerical methods for their solution are proposed.

1. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. – М.: Наука, 1987. – 360 с.
2. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. – М.: Физматгиз, 1966. – 636 с.
3. *Космодамианский А. С., Шалдырван В. А.* Толстые многосвязные пластины. – К.: Наук. думка, 1978. – 240 с.
4. *Доннелл Л. Г.* Балки, пластины и оболочки. – М.: Наука, 1982. – 568 с.
5. *Lukasiewicz S.* Local Loads in Plates and Shells. Monographs and Textbooks on Mechanics of Solids and Fluids // Alphen aan den Rijn: Sijthoff & Noordhoff, 1979. – 570 p.
6. *Noor A. K.* Bibliography of Monographs and Surveys on Shells // Appl. Mech. Rev. – 1990. – **43**, № 9. – P. 223–234.
7. *Kobayashi H.* A Survey of Books and Monographs on Plates // Mem. Fac. Eng., Osaka City Univ. – 1997. – **38**. – P. 73–98.
8. *Lebée A. and Sab K. A.* bending gradient model for thick plates. Part I: Theory // Int. J. of Solids and Struct. – 2010. – **48**, № 20. – P. 2878–2888.
9. *Ревенко В. П.* О решении трехмерных уравнений линейной теории упругости // Прикл. механика. – 2009. – **45**, № 7. – С. 52–65. (Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, № 7 – P. 730–741.)

Одержано 11.02.2015