Физика низких температур, 1999, т. 25, № 3, с. 277–281

Нелинейные электромагнитные волны в металлах в условиях сильного магнетизма электронов проводимости

В. Г. Песчанский[1,2], Д. И. Степаненко[2]

[1] *Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47*
E-mail: vpeschansky@ilt.kharkov.ua

[2] *Харьковский государственный университет, Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4*

Статья поступила в редакцию 28 сентября 1998 г.

Теоретически исследованы волновые процессы в некомпенсированных металлах, помещенных в квантующее магнитное поле. Показано, что в условиях, когда магнитная восприимчивость близка к $1/4\pi$, возможно распространение нелинейных электромагнитных волн с малой амплитудой. Найдены нелинейные решения системы уравнений Максвелла с учетом сильного магнетизма электронов проводимости.

Теоретично досліджено хвильові процеси в некомпенсованих металах, розміщених в квантуючому магнітному полі. Показано, що в умовах, коли магнітна сприйнятливість близька до $1/4\pi$, можливо розповсюдження нелінійних електромагнітних хвиль з малою амплітудою. Знайдено нелінійні рішення системи рівнянь Максвелла з урахуванням сильного магнетизму електронів провідності.

PACS: 72.15.Gd, 72.15.Nj

В чистых металлах при температурах жидкого гелия в присутствии сильного магнитного поля $\mathbf{H}_0$ могут распространяться слабозатухающие электромагнитные волны с частотой ω, значительно меньшей циклотронной частоты Ω электронов проводимости [1,2]. В классически сильных магнитных полях $\Omega\tau >> 1$, где τ — время свободного пробега электронов, область нелинейности в металлах практически трудно достичь. Созданию достаточно большого электрического поля препятствует высокая электропроводность, а нелинейные эффекты, обусловленные влиянием магнитного поля волны $\mathbf{H}^{\sim}$, подавлены внешним полем $\mathbf{H}_0$ и будут значительными лишь при $\mathbf{H}^{\sim}$ сравнимом с $\mathbf{H}_0$. Однако при столь низких температурах, когда необходимо учитывать квантование уровней носителей заряда в магнитном поле, нелинейность может быть существенной даже для малой амплитуды. Если расстояние между уровнями Ландау $\Delta\varepsilon \simeq \hbar\Omega$ много больше их ширины $\hbar/\tau$ и температуры носителей заряда, то квантовая осциллирующая часть магнитной восприимчивости χ может достигать значений порядка единицы ($\hbar$ — постоянная Планка). В этом случае различие между магнитным полем $\mathbf{H}$ и магнитной индукцией $\mathbf{B}$ существенно даже в проводниках, не обладающих магнитным упорядочением, и учет магнетизма среды представляет собой самосогласованную задачу. Квантование уровней энергии носителей заряда в металле определяется усредненным по областям порядка ларморовского радиуса электрона значением микроскопического поля $\mathbf{H}$, следовательно, намагниченность $\mathbf{M}$ является функцией магнитной индукции $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}^{\sim}(\mathbf{r}, t)$, где $\mathbf{B}_0$ — ее однородная часть; $\mathbf{B}^{\sim}(\mathbf{r}, t)$ — поле волны. При $\kappa^2 \equiv |1 - 4\pi\chi(\mathbf{B}_0)| << 1$ линейный член разложения магнитного поля $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$ по степеням $\mathbf{B}^{\sim}(\mathbf{r}, t)$ может оказаться того же порядка, что и нелинейные слагаемые, и уравнения Максвелла будут существенно нелинейными.

Влияние сильного магнетизма электронов проводимости на волновые процессы в компенсированных металлах исследовано в работе [3]. В настоящем сообщении рассмотрено распространение нелинейных волн в некомпенсированных металлах с неравными числами электронов n_e и дырок n_h при выполнении следующих условий:

$$\omega\tau << 1\ ,\quad kr_0 << 1\ ,$$

$$k_z\, l << 1\ ,\quad 0 < 1 - 4\pi\chi << 1\ ,$$

где $\mathbf{k} = (0,\ k\sin\theta,\ k\cos\theta)$ — волновой вектор; r_0 — радиус кривизны траектории электрона в однородном поле $\mathbf{B}_0 = (0,\ 0,\ \mathbf{B}_0)$; $l = v_F\,\tau$, v_F — фермиевская скорость.

Переменное электромагнитное поле в безграничном металле определяется системой уравнений Максвелла

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{J}\ ,\quad \mathrm{rot}\ \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\ ,\quad \mathrm{div}\ \mathbf{B} = 0\ ,\quad (1)$$

дополненной материальными уравнениями для плотности тока и намагниченности. Здесь $\mathbf{J} = \mathbf{j} + c\ \mathrm{rot}\ \mathbf{M}$ — плотность полного тока, состоящего из тока проводимости $\mathbf{j}$ и тока, индуцированного внешним магнитным поле $\mathbf{j}' = c\ \mathrm{rot}\ \mathbf{M}$; c — скорость света.

В квазистационарном случае $\omega\tau << 1$ система электронов проводимости успевает подстраиваться к мгновенным значениям переменных полей и для $\mathbf{j}$ и $\mathbf{M}$ можно воспользоваться статическими выражениями, подставив в них значения полей $\mathbf{E}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$ в данный момент времени. При $k_z\, l << 1$ в выражении для $\mathbf{j}$ можно пренебречь пространственной дисперсией и записать плотность тока проводимости в виде

$$j_i = \sigma_{ik}(B_0)\, E_k\ ,\qquad (2)$$

где $\sigma_{ik}(B_0)$ — статический тензор проводимости в однородных полях. В квазиклассическом приближении, когда расстояние между уровнями Ландау много меньше энергии Ферми ε_F, квантовые поправки к электропроводности металла, пропорциональные $(\hbar\Omega/\varepsilon_F)^{1/2}$, обычно невелики [4]. Их учет не влияет на возможность существования собственных колебаний электромагнитного поля и сводится к изменению декремента затухания волны. Поскольку ультраквантовый предел $\hbar\Omega \gtrsim \varepsilon_F$ достижим лишь в полуметаллах типа висмута, квазиклассическое описание электронных явлений в металлах с числом носителей заряда порядка одного на атом справедливо в широкой области реально возможных магнитных полей. Ниже мы воспользуемся выражением для тензора проводимости в классически сильных магнитных полях.

Используя локальный вид плотности тока (2), из системы уравнений (1) легко получить векторное уравнение для компонент нестационарного поля $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r},\ t)$:

$$\frac{\partial\tilde{\mathbf{B}}}{\partial t} = -\frac{c^2}{4\pi}\ \mathrm{rot}\ (\hat{\rho}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{H})\ ,\qquad (3)$$

где $(\hat{\rho}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{H})_k = \rho_{ki}\ (\mathrm{rot}\ \mathbf{H})_i$. , $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}(\mathbf{B})$.

В некомпенсированных металлах диагональные компоненты тензора удельного сопротивления $\rho_{ki} = (\sigma^{-1})_{ki}$ имеют одинаковый порядок величины. Не нарушая общности рассмотрения волновых процессов, будем считать их одинаковыми и равными $\rho_0 = 1/\sigma_0$, где $\sigma_0 \simeq \omega_p^2\tau/4\pi$ — статическая электропроводность металла в отсутствие магнитного поля; ω_p — частота плазменных колебаний носителей заряда. Это позволяет привести уравнение (3) к виду

$$\frac{\partial\tilde{\mathbf{B}}}{\partial t} = -\frac{c^2}{4\pi}\,(\mathbf{b}\nabla)\ \mathrm{rot}\ \mathbf{H} - \frac{c^2}{4\pi}\,\rho_0\ (\mathrm{grad\ div}\ \mathbf{H} - \Delta\mathbf{H}),\qquad (4)$$

где $b_j = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon_{jki}\,\rho_{ki}$ — вектор, дуальный тензору ρ_{ki} . При учете различия между ρ_{ii} уравнение Максвелла сохранит вид (4) при соответствующей деформации осей координат. Наибольшей из составляющих вектора $\mathbf{b}$ является b_z , определяемая холловской компонентой тензора сопротивления $\rho_{xy} = B_0\ /ce(n_e - n_h)$. Если $\Omega\tau\cos\theta >> 1$, то остальными компонентами вектора $\mathbf{b}$ в первом слагаемом правой части (4) можно пренебречь при любом виде электронного спектра и представить асимптотическое выражение вектора $\mathbf{b}$ с точностью до несущественного безразмерного множителя порядка единицы как $\mathbf{b} = (0,\ 0,\ \Omega\tau\rho_0)$.

Плотность тока $\mathbf{j}'$, индуцированного магнитным полем, определяется в основном компонентой намагниченности M_z , так как вектор $\mathbf{M}$ направлен преимущественно вдоль $\mathbf{B}_0$, и M_x , $M_y << M_z$. Запишем разложение плотности индуцированного тока по степеням $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r},\ t)$ и его производных [3,5]:

$$j'_x = c(\mathrm{rot}\ \mathbf{M})_x = c\ \chi(B_0)\ \frac{\partial\tilde{B}_z}{\partial y} - c\ \xi\ \frac{\partial\tilde{B}_z^3}{\partial y} + c\ \alpha\ r_0^2\ \frac{\partial^3\tilde{B}_z}{\partial y^3}\ ,\qquad (5)$$

где $\xi = (\beta/B_0^2)(\varepsilon_F\ /\hbar\Omega)^2$; α и β — безразмерные коэффициенты порядка единицы. Второе и третье слагаемые в выражении (5) определяются нелинейной и неоднородной добавкой к намагниченности.

После несложных преобразований получим следующее уравнение для $\tilde{B}_z(y,\ z,\ t)$:

$$\left(\frac{\omega_p^2}{c^2\Omega}\right)^2\frac{\partial^2 B_z^\sim}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial^2 H_z^\sim}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 B_z^\sim}{\partial z^2}\right)=\frac{1}{\Omega\tau}\,\frac{\omega_p^2}{c^2\Omega}\,\Delta\,\frac{\partial B_z^\sim}{\partial t}+$$

$$+\frac{1}{\Omega\tau}\left(\frac{\omega_p^2}{c^2\Omega}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{\Omega\tau}\Delta\right)\left(\frac{\partial^2 H_z^\sim}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 B_z^\sim}{\partial z^2}\right). \qquad (6)$$

В линейном приближении это уравнение описывает волны геликоидального типа с частотой

$$\omega_l=\frac{k^2c^2\Omega}{\omega_p^2}\cos\theta\sqrt{\kappa^2\sin^2\theta+\cos^2\theta}\,, \qquad (7)$$

отличающейся множителем $\sqrt{\kappa^2\sin^2\theta+\cos^2\theta}$ от частоты геликона в классически сильном магнитном поле. Нетрудно видеть, что при $\kappa^2 \ll 1$ и $\cos\theta \sim \kappa$ линейные и нелинейные по $B_z^\sim$ слагаемые являются величинами одного порядка и волновой процесс будет существенно нелинейным. При этом длина затухания

$$l_d \simeq \kappa(\omega\tau)^{-1/2}(\Omega\tau\cos\theta)^{3/2}\,\frac{c}{\omega_p}\simeq \kappa k^{-1}\Omega\tau\cos\theta \qquad (8)$$

должна значительно превышать длину волны, что справедливо при выполнении условия

$$\kappa\,\Omega\,\tau\cos\theta \gg 1\,.$$

Учет в выражении для

$$H_z^\sim=\kappa^2B_z^\sim+4\pi\xi B_z^{\sim 3}-4\pi\,\alpha\, r_0^2\,\frac{\partial^2 B_z^\sim}{\partial y^2} \qquad (9)$$

слагаемого, пропорционального $B_z^{\sim 3}$, приводит к появлению эллиптических функций в решении уравнения (6), которое в безразмерных переменных $u=B_z^\sim/b_0$, $y_1=y/L$, $z_1=\kappa z/L$, $t_1=(\kappa^2/L^2)(c^2\Omega/\omega_p^2)t$ принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}\left(\frac{\partial^2 W(u)}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2}\right)=\frac{\gamma}{\kappa^2}\,\Delta_1\,\frac{\partial u}{\partial t_1}+$$

$$+\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t_1}-\frac{\gamma}{\kappa^2}\Delta_1\right)\left(\frac{\partial^2 W(u)}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2}\right). \qquad (10)$$

Здесь

$$W(u)=\left(u+u^3-\delta\,\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}\right);$$

$$\gamma=\frac{1}{\Omega\tau}\,;\quad \delta=\frac{4\pi\,\alpha\, r_0^2}{L^2\kappa^2}\,;$$

$$b_0=B_0\sqrt{\kappa^2/4\pi\xi}\simeq \kappa B_0(\hbar\Omega/\varepsilon_F)\,;$$

$$\Delta_1=\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\kappa^2\,\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}\,;$$

L и $\kappa^{-1}L$ — характерные масштабы неоднородности нестационарного поля в направлениях y и z. Диссипативные слагаемые в правой части уравнения (10) будут малыми при выполнении неравенства $\Omega\tau\kappa^2 \gg 1$. Тогда в нулевом приближении по малому параметру $\eta=\gamma/\kappa^2$ уравнение (10) имеет волновое решение и функцию $u(\mathbf{r}_1, t)$ можно искать в виде $u=u(\psi)$, где $\psi=n_1y_1+n_2z_1-Vt_1$.

Подставляя это выражение в уравнение (10) и пренебрегая членами порядка η, получаем

$$\frac{V^2}{n_2^2}\,\frac{d^2u}{d\psi^2}+\frac{d^2}{d\psi^2}\left(s^2u+n_1^2u^3-n_1^4\delta\,\frac{d^2u}{d\psi^2}\right)=0\,, \qquad (11)$$

где $s^2=n_1^2+n_2^2$.

В случае больших длин волн решение этого уравнения можно представить в простой параметрической форме. Если $L \sim k^{-1}$ достаточно велико и $\delta \sim (kr_0/\kappa)^2 \ll 1$, то последним слагаемым в скобках можно пренебречь. Интегрируя полученное уравнение три раза по $d\psi$ и полагая $u=u(w)$, где $w=\int u\, d\psi$, после простых преобразований получаем уравнение, связывающее u и w:

$$\frac{V^2}{n_2^2}\,w^2=C^2-s^2u^2-\frac{3}{2}\,n_1^2u^4\,, \qquad (12)$$

C^2 — постоянная интегрирования. Отсюда найдем зависимость $u(\psi)$ в неявном виде:

$$d\psi=\frac{dw}{u}=-\frac{n^2}{V}\,\frac{(s^2+3n_1^2u^2)\,du}{(C^2-s^2u^2-{}^3\!/\!_2\,n_1^2u^4)^{1/2}}\,. \qquad (13)$$

Преобразуя это выражение, положим $u=\nu^{-1}\times(\sqrt{1+2\nu^2A^2}-1)^{1/2}\cos\varphi$, $A\equiv C/s$, $\nu\equiv\sqrt{3}n_1/s=[3\kappa^2\sin^2\theta/(\kappa^2\sin^2\theta+\cos^2\theta)]^{1/2}$, тогда

$$\frac{V}{n_2s}\,\frac{d\psi}{(1+2\nu^2A^2)^{1/4}}=2\sqrt{1-\mu^2\sin^2\varphi}\,d\varphi-$$

$$-\frac{d\varphi}{(1-\mu^2\sin^2\varphi)^{1/2}}\,,$$

$$\mu^2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{(1+2\nu^2A^2)^{1/2}}\right).$$

Вводя обозначение $a\equiv Vn_2^{-1}s^{-1}(1+2\nu^2A^2)^{-1/4}$ и переходя от переменных y_1, z_1, t_1 к переменным

y, z, t, представим решение уравнения (6) в параметрической форме:

$$B_z^{\sim} = B_m^{\sim} \cos \varphi(\Theta(\mathbf{r}, t)) \ , \tag{14}$$

$$\Theta(\mathbf{r}, t) \equiv k_y y + k_z z - \omega_N t + \Theta_0 =$$

$$= 2E(\varphi, \mu) - K(\varphi, \mu) \ , \tag{15}$$

где

$$\omega_N = (1 + 2\nu^2 A^2)^{1/4} \omega_l \ ;$$

$$k_y \equiv k \sin \theta = a n_1/L \ ; \quad k_z = k \cos \theta = \kappa a n_2/L \ ;$$

$$B_m^{\sim} = (b_0/\nu)(\sqrt{1 + 2\nu^2 A^2} - 1)^{1/2} \ ; \tag{16}$$

$$K(\varphi, \mu) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 - \mu^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} \ ;$$

$$E(\varphi, \mu) = \int_0^{\varphi} (1 - \mu^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} \, d\varphi$$

— эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода; Θ_0 — начальная фаза. Уравнение (15) неявно определяет φ как функцию $\Theta(\mathbf{r}, t)$.

Воспользовавшись свойством эллиптических интегралов

$$K(n \frac{\pi}{2} , \mu) = nK(\frac{\pi}{2} , \mu) \equiv nK(\mu) \ ,$$

$$E(n \frac{\pi}{2} , \mu) = nE(\frac{\pi}{2} , \mu) \equiv nE(\mu)$$

(n — целое), легко убедиться, что магнитное поле волны является периодической функцией переменной Θ с периодом $4f(\mu)$, $f(\mu) = 2E(\mu) - K(\mu)$. С изменением Θ функция $B_z^{\sim}(\Theta)$ осциллирует, принимая максимальное $+B_m^{\sim}$ и минимальное $-B_m^{\sim}$ значения соответственно в точках $\Theta_+ = = 4nf(\mu)$ и $\Theta_- = 2(2n + 1)f(\mu)$ и обращаясь в нуль при $\Theta = (2n + 1)f(\mu)$.

Переменное поле $B_z^{\sim}(\mathbf{r}, t)$ зависит от произвольного параметра A, имеющего следующий физический смысл: произведение $b_0 A$ представляет собой амплитуду линейной волны. Степень нелинейности волнового процесса характеризуется величиной $\nu^2 A^2$. Если $\nu^2 A^2 << 1$, то $\mu(A, \theta)$ и $B_m^{\sim}(A, \theta)$ можно разложить в ряд по степеням $\nu^2 A^2$:

$$\begin{aligned} \mu^2 &= \frac{1}{2} \nu^2 A^2 \left(1 - \frac{3}{2} \nu^2 A^2\right) , \\ B_m^{\sim} &= b_0 A \left(1 - \frac{1}{4} \nu^2 A^2\right) . \end{aligned} \tag{17}$$

В основном по $\nu^2 A^2$ приближении $\varphi(\mathbf{r}, t) = \Theta(\mathbf{r}, t)$ и формула (14) преобразуется в гармоническую волну с амплитудой $b_0 A$. Область значений $\cos^2 \theta >> \kappa^2$ соответствует слабонелинейному режиму. В этом случае $\nu^2 \sim \kappa^2/\cos^2 \theta$ и для значений A порядка единицы из (14), (15) нетрудно получить (с точностью до $\nu^2 A^2$)

$$B_z^{\sim}(\mathbf{r}, t) =$$

$$= B_m^{\sim} \left\{ \left(1 + \frac{3}{16} \mu^2 \right) \cos\Theta_1(\mathbf{r}, t) - \frac{3}{16} \mu^2 \cos 3\Theta_1(\mathbf{r}, t) \right\}, \tag{18}$$

где

$$\Theta_1(\mathbf{r}, t) = \left(1 + \frac{3}{4} \mu^2 \right) \Theta(\mathbf{r}, t) \ .$$

С уменьшением $\cos \theta$ осуществляется переход в область нелинейности. Волновой процесс будет существенно нелинейным при $\cos \theta \sim \kappa$ для волн с амплитудой $B_m^{\sim}$ порядка $\kappa B_0(\hbar\Omega/\varepsilon_F)$. Например, для значений $B_0 \sim 10^4$ Гс, $\hbar\Omega/\varepsilon_F \sim 10^{-4}$–$10^{-3}$, $\kappa^2 \sim 10^{-1}$ нелинейные искажения профиля волны наступают при $B_m^{\sim} \sim 1$ Гс.

Для учета диссипации можно воспользоваться стандартной теорией возмущений, полагая, что в нулевом приближении по малому параметру η решение уравнения (6) имеет вид (14), (15) с той разницей, что параметр A является медленно меняющейся функцией времени. Нахождение явного вида функции $A(t)$ весьма затруднительно из-за сложной зависимости $B_z^{\sim}$ от A. Однако легко найти простые аналитические выражения для $A(t)$ в предельном случае $t >> \Omega\tau \cos \theta/\omega_l$. С течением времени диссипация приводит к уменьшению амплитуды волны, и при $t >> \Omega\tau \cos \theta/\omega_l$ функция A является решением линеаризованной задачи. Пренебрегая в уравнении (6) нелинейными слагаемыми, получаем

$$A(t) = A(0) \, e^{-\omega' t} \ , \tag{19}$$

где

$$\omega' = \frac{1}{2} \gamma \frac{k^2 c^2 \Omega}{\omega_p^2} (1 + \kappa^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$$

— декремент затухания линейной волны.

Определение остальных компонент электромагнитного поля сводится к элементарным операциям интегрирования и дифференцирования. В основном порядке по η электромагнитное поле волны имеет следующую структуру:

$$B_y^{\sim} = - B_z^{\sim} \operatorname{ctg} \theta \ ,$$

$$B_x^{\sim} = - \frac{\omega_N \ \omega_p^2}{k^2 c^2 \Omega \sin\theta \cos\theta} B_m^{\sim} \sin\varphi \ (1 - \mu^2 \sin^2 \varphi)^{1/2},$$

$$\mathbf{E} = - \frac{c\Omega}{\omega_p^2} (\mathbf{e}_z \times \operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{B})) \ , \qquad (20)$$

где $\mathbf{e}_z = (0,\ 0,\ 1)$ — единичный вектор вдоль оси z, функция $\varphi(\Theta)$ определяется соотношением (15). В линейном приближении переменное поле представляет собой геликоидальную волну.

Мы рассмотрели влияние сильного магнетизма электронов проводимости на распространение электромагнитных волн при $0 < 1 - 4\pi\chi << 1$. В случае $\chi > 1/4\pi$ нестационарное поле $B_z^{\sim}$ описывается уравнением (6) с заменой $\kappa^2 \to - |\kappa|^2$. Линеаризируя это уравнение и полагая $B_z^{\sim} \propto \exp(-i\omega t + i\mathbf{kr})$, легко найти, что дисперсионное уравнение при $|\kappa| \sin\theta > \cos\theta$ имеет чисто мнимые корни и распределение магнитной индукции оказывается неустойчивым. Возрастание поля будет происходить до тех пор, пока этот процесс не компенсируется нелинейным слагаемым. В конечном счете развитие неустойчивости приводит к возникновению стационарной доменной структуры [6]. Если диссипативные эффекты малы, т.е. $\Omega\tau$ достаточно велико, то установление стационарной доменной структуры должно, по-видимому, сопровождаться слабозатухающими колебаниями электромагнитного поля. Амплитуда и волновое число k_y теперь не являются независимыми параметрами, а определяются величиной $|\kappa|^2 \equiv |1 - 4\pi\chi|$. Уравнение (6) при $\chi > 1/4\pi$ не интегрируется в известных элементарных и трансцендентных функциях. Однако можно качественно понять поведение системы в предельном случае $t \to \infty$. С учетом слабых диссипативных эффектов частота и волновой вектор являются медленно меняющимися функциями времени, причем $\omega \to 0$, $k_z \to 0$ при $t \to \infty$. В результате уравнение (6) переходит в стационарное уравнение $\partial H_z(B_z)/\partial y = 0$, которое легко интегрируется и определяет установившееся неоднородное распределение магнитной индукции.

1. О. В. Константинов, В. И. Перель, *ЖЭТФ* **38**, 161 (1960).
2. Э. А. Канер, В. Г. Скобов, *ЖЭТФ* **45**, 610 (1963).
3. В. Г. Песчанский, Д. И. Степаненко, *ЖЭТФ* **112**, 1841 (1997).
4. E. N. Adams and T. D. Holstein, *J. Phys. Chem. Solids* **10**, 254 (1959).
5. И. А. Привороцкий, *ЖЭТФ* **52**, 1755 (1967).
6. J. Condon, *Phys. Rev.* **145**, 526 (1965).

Non-linear electromagnetic waves in metals under strong magnetism of conduction electrons

V. G. Peschansky and D. I. Stepanenko

The wave processes in un-compensated metals in a quantizing magnetic field are investigated theoretically. It is shown that nonlinear electromagnetic waves of a small amplitude may propagate in the case where magnetic susceptibility is close to $1/4\pi$. We found the nonlinear solutions of the Maxwell equations with account of strong magnetism of conduction electrons.