УДК 539.3

ВИЗНАЧЕННЯ ТРИВИМІРНОГО НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ТОВСТОСТІННОГО ДВОШАРОВОГО ЦИЛІНДРА

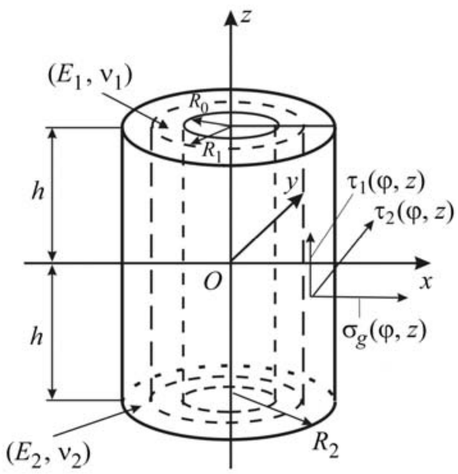
В. П. РЕВЕНКО

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Шляхом відокремлення кутової змінної дослідження тривимірного напружено-деформованого стану скінченного товстостінного двошарового циліндра зведено до розв'язання одновимірних крайових задач. Компоненти вектора переміщень і тензора напружень подано у вигляді рядів, які визначають побудовані власні функції. Розроблено метод аналітично-числового розв'язання крайових задач для двошарового циліндра. Вперше теоретично встановлено числові критерії збіжності методу і показано, що точність задоволення крайових умов оцінює одне число – мінімум квадратичної форми.

Ключові слова: *власні функції, товстостінний двошаровий циліндр, тривимірний напружений стан, тензор напружень.*

Багатошарові пружні циліндри, особливо двошарові – поширені елементи будівельних та інженерних конструкцій. Наведено [1–3] огляд праць з розв'язування осесиметричних задач для багатошарових циліндрів, напружено-деформований стан (НДС) яких залежить тільки від однієї просторової змінної, а також з урахуванням динамічних ефектів [4–6]. Під час розрахунку статичного напруженого стану двошарових циліндричних тіл широко використовують спрощені двовимірні моделі циліндричних оболонок [7, 8].



Багатошаровий циліндр.

A multi-layer cylinder.

Формулювання задачі і її розв'язок. Знайдемо тривимірний НДС двошарового товстостінного циліндра, який знаходиться в стані статичної рівноваги і має два шари: $D_j = \{(r, \varphi, z) \in ([R_{j-1}, R_j] \times [0, 2\pi] \times [-h, h])\}$ з характеристиками матеріалу E_j, ν_j, $j = \overline{1,2}$ (див. рисунок). До його бічних поверхонь $r_1 = R_0$, $r_2 = R_2$ прикладені навантаження

$$\sigma_r(r_j, \varphi, z) = \sigma_1^j(\varphi, z), \quad \tau_{rz}(r_j, \varphi, z) = \tau_1^j(\varphi, z), \quad \tau_{r\varphi}(r_j, \varphi, z) = \tau_2^j(\varphi, z), \tag{1}$$

де $j = \overline{1,2}$, $\sigma_1^j, \tau_1^j, \tau_2^j$ – відомі функції. Торці циліндра ненавантажені:

$$\sigma_z(r, \varphi, \pm h) = 0, \quad \tau_{rz}(r, \varphi, \pm h) = 0, \quad \tau_{z\varphi}(r, \varphi, \pm h) = 0. \tag{2}$$

Контактна особа: В. П. РЕВЕНКО, e-mail: victorrev@ukr.net

На поверхні з'єднання шарів виконуються умови ідеального контакту:

$$u_r^2 = u_r^1, \quad u_\varphi^2 = u_\varphi^1, \quad u_z^2 = u_z^1, \quad r = R_1, \tag{3}$$

$$\sigma_r^2 = \sigma_r^1, \quad \tau_{r\varphi}^2 = \tau_{r\varphi}^1, \quad \tau_{rz}^2 = \tau_{rz}^1, \quad r = R_1. \tag{4}$$

Для визначення пружних переміщень $u_r^j, u_\varphi^j, u_z^j$ в j-му шарі застосуємо загальний розв'язок рівнянь Ляме [9]:

$$u_r^j = \frac{\partial P_j}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial Q_j}{\partial \varphi}, \quad u_z^j = \frac{\partial P_j}{\partial z} - 4(1-\nu_j)\Phi_j, \quad u_\varphi^j = \frac{1}{r}\frac{\partial P_j}{\partial \varphi} - \frac{\partial Q_j}{\partial r}, \tag{5}$$

де $P_j = z\Phi_j + \Psi_j$, а Φ_j, Ψ_j, Q_j – незалежні гармонічні функції переміщень.

Використавши переміщення (5) і закон Гука [10], знайдемо нормальні

$$\sigma_r^j = 2G_j\left[\frac{\partial^2 P_j}{\partial r^2} - 2\nu_j\frac{\partial \Phi_j}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial Q_j}{r\partial\varphi}\right], \quad \sigma_z^j = 2G_j\left[\frac{\partial^2 P_j}{\partial z^2} - 2(2-\nu_j)\frac{\partial \Phi_j}{\partial z}\right],$$

$$\sigma_\varphi^j = \frac{2G_j}{r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2 P_j}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial P_j}{\partial r} - 2\nu_j r\frac{\partial \Phi_j}{\partial z} - r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial Q_j}{r\partial\varphi}\right] \tag{6}$$

та дотичні напруження

$$\tau_{rz}^j = G_j\left[2\frac{\partial^2 P_j}{\partial z\partial r} - \kappa_j\frac{\partial \Phi_j}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 Q_j}{\partial z\partial\varphi}\right], \quad \tau_{z\varphi}^j = G_j\left[\frac{2}{r}\frac{\partial^2 P_j}{\partial z\partial\varphi} - \frac{\kappa_j}{r}\frac{\partial \Phi_j}{\partial\varphi} - \frac{\partial^2 Q_j}{\partial r\partial z}\right],$$

$$\tau_{r\varphi}^j = G_j\left[\frac{2}{r}\frac{\partial^2 P_j}{\partial r\partial\varphi} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial P_j}{\partial\varphi} - r\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial Q_j}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 Q_j}{\partial\varphi^2}\right], \quad j = \overline{1,2}, \tag{7}$$

де $\kappa_j = 4(1-\nu_j)$; G_j – модулі зсуву.

Розкладемо функції переміщень у ряди Фур'є:

$$\Phi_j(r,\varphi,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\Phi_{j,n}(r,z)\cos n\varphi, \quad \Psi_j(r,\varphi,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\Psi_{j,n}(r,z)\cos n\varphi,$$

$$P_j(r,\varphi,z) = \sum_{n=0}^{\infty}P_{j,n}(r,z)\cos n\varphi, \quad Q_j(r,\varphi,z) = \sum_{n=1}^{\infty}Q_{j,n}(r,z)\sin n\varphi, \tag{8}$$

де $j = \overline{1,2}$; $\Phi_{j,n}, \Psi_{j,n}, Q_{j,n}$, $P_{j,n} = z\Phi_{j,n} + \Psi_{j,n}$ – коефіцієнти розкладу. Підставимо в крайові умови (1) розклади (8) і одержимо для фіксованої гармоніки $n \geq 0$ умови для визначення відповідних коефіцієнтів розкладу:

$$\frac{\partial^2 P_{j,n}}{\partial r^2} - 2\nu_j\frac{\partial \Phi_{j,n}}{\partial z} + n\frac{\partial}{\partial r}\frac{Q_{j,n}}{r} = \frac{\sigma_{1,n}^j(z)}{2G_j},$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial P_{j,n}}{\partial z} - \frac{\kappa_j}{2}\Phi_{j,n}\right] + \frac{n}{2r}\frac{\partial Q_{j,n}}{\partial z} = \frac{\tau_{1,n}^j(z)}{2G_j}, \tag{9}$$

$$\frac{n}{r}\left[\frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial r}\right]P_{j,n} - \frac{r}{2}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial Q_{j,n}}{\partial r} - \frac{n^2}{2r^2}Q_{j,n} = \frac{\tau_{2,n}^j(z)}{2G_j}, \quad j = \overline{1,2},$$

де індексу *j* відповідає радіус r_j: $\sigma^j_{1,n}(z)$, $\tau^j_{m,n}(z)$, $m=\overline{1,2}$ – коефіцієнти розкладу навантажень у ряди Фур'є.

Врахувавши залежності (5)–(8), розкладемо в ряди Фур'є умови (3), (4) і відповідно запишемо співвідношення (3)

$$\frac{\partial P_{2,n}}{\partial r}+\frac{n}{r}(Q_{2,n}-Q_{1,n})=\frac{\partial P_{1,n}}{\partial r},\quad \frac{n}{r}(P_{2,n}-P_{1,n})+\frac{\partial Q_{2,n}}{\partial r}=\frac{\partial Q_{1,n}}{\partial r},$$

$$\frac{\partial P_{2,n}}{\partial z}-\kappa_2\Phi_{2,n}=\frac{\partial P_{1,n}}{\partial z}-\kappa_1\Phi_{1,n},\quad r=R_1 \tag{10}$$

та умови (4)

$$\frac{\partial^2 P_{2,n}}{\partial r^2}-2\nu_2\frac{\partial\Phi_{2,n}}{\partial z}+n\frac{\partial}{\partial r}\frac{Q_{2,n}}{r}=k_1\left[\frac{\partial^2 P_{1,n}}{\partial r^2}-2\nu_1\frac{\partial\Phi_{1,n}}{\partial z}+n\frac{\partial}{\partial r}\frac{Q_{1,n}}{r}\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial P_{2,n}}{\partial z}-\frac{\kappa_2}{2}\Phi_{2,n}\right]+\frac{n}{2r}\frac{\partial Q_{2,n}}{\partial z}=k_1\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial P_{1,n}}{\partial z}-\frac{\kappa_1}{2}\Phi_{1,n}\right]+\frac{n}{2r}\frac{\partial Q_{1,n}}{\partial z}\right\}, \tag{11}$$

$$\frac{n}{r}[\frac{1}{r}-\frac{\partial}{\partial r}]P_{2,n}-\frac{r}{2}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial Q_{2,n}}{\partial r}-\frac{n^2}{2r^2}Q_{2,n}=k_1\left[\frac{n}{r}[\frac{1}{r}-\frac{\partial}{\partial r}]P_{1,n}-\frac{r}{2}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial Q_{1,n}}{\partial r}-\frac{n^2}{2r^2}Q_{1,n}\right],$$

де $r=R_1$, $k_1=G_1/G_2$. Отже, визначення тривимірного НДС циліндра зведено до знаходження коефіцієнтів $\Phi_{j,n},\Psi_{j,n},Q_{j,n}$, $j=\overline{1,2}$, які повинні задовольнити умови (2), (9)–(11).

Наведено [9, 11, 12] алгоритм спрощення умов (2) для суцільного циліндра і побудови власних функцій, які задовольняють умови відсутності навантажень на його торцях. Використавши цей алгоритм, знайдемо коефіцієнти розкладу функцій переміщень, які описуються першими *N* ненульовими і всіма нульовими власними значеннями та тотожно задовольняють умови (2):

$$\Psi^n_{j,N}=h^2\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Re}\{\delta(\mu_k,\nu_j)[a^j_{n,k}I_n(\beta_k r)+b^j_{n,k}K_n(\beta_k r)]\cos(\mu_k\gamma)\}+$$

$$+d^j_{n,1}r^n+d^j_{n,3}\psi^1_n(r)+(1-\nu_j)[d^j_{n,2}\varphi_n(r,z)+d^j_{n,4}\psi_n(r,z)],$$

$$\Phi^n_{j,N}=h\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Re}\{[a^j_{n,k}I_n(\beta_k r)+b^j_{n,k}K_n(\beta_k r)]\sin(\mu_k\gamma)\}+$$

$$+z(d^j_{n,2}r^n+d^j_{n,4}r^{-n}),\quad n\ge 0, \tag{12}$$

$$Q^n_{j,N}=h^2\sum_{k=1}^{\infty}[g^j_{n,k}I_n(\lambda_k r)+s^j_{n,k}K_n(\lambda_k r)]\cos(k\pi\gamma)+$$

$$+2[d^j_{n,4}\psi_n(r,z)-d^j_{n,2}\varphi_n(r,z)],\quad n\ge 1,$$

де $a^j_{n,k}$, $b^j_{n,k}$ – комплексні, а $g^j_{n,k}$, $s^j_{n,k}$, $d^j_{n,m}$ – дійсні коефіцієнти; $I_n(r)$, $K_n(r)$ – функції Бесселя і Макдональда [13]; $\lambda_k=k\pi/h$, $\beta_k=\mu_k/h$; μ_k, $\mathrm{Re}(\mu_k)>0$ – комплексні корені рівняння $F^+(\mu)\equiv\sin(2\mu)+2\mu=0$; $\delta(\mu,\nu_j)=-2(1-\nu_j)/\mu-\mathrm{tg}(\mu)$; $\varphi_n(r,z)=z^2r^n+\chi^1_n r^{n+2}$, $n\ge 0$; $\psi_1(r,z)=z^2r^{-1}-r\ln r$, $\psi_n(r,z)=z^2r^{-n}+\chi^2_n r^{2-n}$,

$n>1$; $\chi_n^m = \dfrac{-1}{2-2(-1)^m n}$, $m=\overline{1,2}$; $\psi_n^1(r)=r^{-n}$, коли $n>0$, $\psi_0^1(r)=\ln r$; $Q_{j,0}=0$; $d_{0,1}^j = d_{0,4}^j = d_{1,1}^j = 0$.

Підставимо функції (8), (12) у співвідношення (5) і виразимо коефіцієнти переміщень у вигляді рядів за власними функціями для ненульових

$$u_{r,n}^j = h^2 \sum_{k=0}^{N} \{\mathrm{Re}\{\chi(\mu_k,\nu_j,\gamma)[a_{n,k}^j I_n'(\beta_k r) + b_{n,k}^j K_n'(\beta_k r)]\} +$$
$$+\frac{n}{r}[g_{n,k}^j I_n(\lambda_k r) + s_{n,k}^j K_n(\lambda_k r)]\cos(k\pi\gamma)\},$$
$$u_{\varphi,n}^j = -h^2 \sum_{k=1}^{N} \{\frac{n}{r}\mathrm{Re}\{\chi(\mu_k,\nu_j,\gamma)[a_{n,k}^j I_n(\beta_k r) + b_{n,k}^j K_n(\beta_k r)]\} - \tag{13}$$
$$-[g_{n,k}^j I_n'(\lambda_k r) + s_{n,k}^j K_n'(\lambda_k r)]\cos(k\pi\gamma),$$
$$u_{z,n}^j = h\sum_{k=1}^{N}\mathrm{Re}\{\varphi(\mu_k,\nu_j,\gamma)[a_{n,k}^j I_n(\beta_k r) + b_{n,k}^j K_n(\beta_k r)]\}$$

і нульових власних значень, які не мають

$$u_{r,n}^j = n d_{n,1}^j r^{n-1} + d_{n,2}^j[-\nu_j n z^2 r^{n-1} + [2(1-\nu_j) - n(1+\nu_j)]\chi_n^1 r^{n+1},$$
$$u_{\varphi,n}^j = -n d_{n,1}^j r^{n-1} + d_{n,2}^j\{\nu_j n z^2 r^{n-1} + [4 + n(\nu_j+1)]\}\chi_n^1 r^{n+1}], \quad n>0, \tag{14}$$
$$u_{z,n}^j = 2\nu_j z d_{n,2}^j r^n, \quad n\ge 0, \quad u_{r,0}^j = -(1-\nu_j) d_{0,2}^j r$$

і мають особливість у нулі ($r=0$):

$$u_{r,n}^j = -n d_{n,3}^j r^{-n-1} + d_{n,4}^j[\nu_j n z^2 r^{-n-1} + [2(1-\nu_j) + n(1+\nu_2)]\chi_n^2 r^{-n+1}], \quad n>1,$$
$$u_{r,1}^j = d_{1,4}^j[\nu_j z^2 r^{-2} - (3-\nu_j)\ln r - 1 + \nu_j] - d_{1,3}^j r^{-2}, \quad u_{r,0}^j = d_{0,3}^j \frac{1}{r},$$
$$u_{\varphi,n}^j = n d_{n,3}^j r^{-n-1} + d_{n,4}^j[\nu_j n z^2 r^{-n-1} + [n(\nu_j+1) - 4]\chi_n^2 r^{-n+1}], \quad n>1, \tag{15}$$
$$u_{\varphi,1}^j = [\nu_j z^2 r^{-2} + (3-\nu_j)\ln r + 2] + d_{1,3}^j r^{-2},$$
$$u_z^j = 2\nu_j z \sum_{n=1}^{\infty} d_{n,4}^j r^{-n}\cos n\varphi,$$

де

$$\chi(\mu_k,\nu_j,\gamma) = \gamma\sin(\mu_k\gamma) + \delta(\mu_k,\nu_j)\cos(\mu_k\gamma), \quad c_{0,k}=0,$$
$$\varphi(\mu_k,\nu_j,\gamma) = \mu_k\gamma\cos(\mu_k\gamma) - [\mu_k\delta(\mu_k,\nu_j) + 3 - 4\nu_j]\sin(\mu_k\gamma).$$

Внесемо функції (12) у співвідношення (8), (6), (7) та знайдемо коефіцієнти розкладу компонент тензора напружень як суми ряду. Підставимо для заданого $n>0$ компоненти вектора переміщень (13)–(15) і знайденого тензора напружень у крайові умови (9)–(11) та одержимо систему рівнянь

$$\sum_{k=1}^{M} c_{n,k} A_{m,k}^n(\gamma) = P_m^n(\gamma), \quad m=\overline{1,12}, \tag{16}$$

де $c^n_{k+6(j-1)N} = \mathrm{Re}a^j_{n,k}$; $c^n_{k+(6j-5)N} = \mathrm{Im}a^j_{n,k}$; $c^n_{k+(6j-4)N} = \mathrm{Re}b^j_{n,k}$; $c^n_{k+(6j-3)N} = \mathrm{Im}b^j_{n,k}$; $c^n_{k+(6j-2)N} = g^j_{n,k}$; $c^n_{k+(6j-1)N} = s^j_{n,k}$, $k=\overline{1,N}$; $c^n_{12N+4j-4+m} = d^j_{n,m}$, $m=\overline{1,4}$;

$M = 12N+8$; $P^n_{9j-8} = \dfrac{\sigma^j_{1,n}}{2G_j}$; $P^n_{9j-7} = \dfrac{\tau^j_{1,n}}{2G_j}$; $P^n_{9j-6} = \dfrac{\tau^j_{2,n}}{2G_j}$, $j=\overline{1,2}$; $P^n_{3+m}=0$, $m=\overline{1,6}$.

Використаємо розроблену раніше [9, 11] аналітико-числову методику і розв'язання системи рівнянь (16) зведемо до пошуку мінімуму такої узагальненої квадратичної форми:

$$\Omega_N\left\{c_1^n,...c_M^n\right\} = \sum_{m=1}^{12}\left\|\sum_{k=1}^{M} c_{n,k}\, A^n_{m,k}(\gamma) - P^n_m(\gamma)\right\|^2 = \sum_{k,j=1}^{M} c^n_k c^n_j W_{kj} - 2\sum_{k=1}^{M} c^n_k V_k + P^2, \qquad (17)$$

де $W_{kj} = W_{jk}$, $W_{kj} = \int\limits_{-1}^{1}\sum\limits_{m=1}^{12} A^n_{m,k}(\gamma) A^n_{m,j}(\gamma)d\gamma$, $V_k = \int\limits_{-1}^{1}\sum\limits_{m=1}^{12} A^n_{m,k}(\gamma)P^n_m(\gamma)d\gamma$, $k,j=\overline{1,M}$,

$\|f(\gamma)\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} f^2(\gamma)d\gamma}$ − норма у метриці $L_2[-1,1]$. Мінімум форми (17) позначимо $F(N)$, а змінні, на яких він досягається, як c_k^N. За відомими змінними c_k^N, $k=\overline{1,M}$, визначимо функції переміщень (12).

Лема. *Функція* $F(N)$ *невід'ємна і не зростає.*

Теорема. *Якщо для заданого* $n>0$ *і довільного* $\varepsilon>0$ *існує таке N, що* $F(N) < \varepsilon^2/4$*, то межі послідовностей коефіцієнтів розкладу* (12)

$$\Phi_{j,n} = \lim_{N\to\infty}\Phi^n_{j,N},\quad \Psi_{j,n} = \lim_{N\to\infty}\Psi^n_{j,N},\quad Q_{j,n} = \lim_{N\to\infty}Q^n_{j,N},\quad j=\overline{1,2},$$

точно задовольняють крайові умови (16) *у метриці* $L_2[-1,1]$.

Доведення леми і теореми подібне, як у праці [11].

Відзначимо, що мінімум квадратичної форми (17) має вигляд

$$F(N) = \sum_{m=1}^{12}\left\|\sum_{k=1}^{M} c_k^N\, A^n_{m,k}(\gamma) - P^n_m(\gamma)\right\|^2$$

і дає оцінку точності задоволення всіх крайових умов.

Розв'язок осесиметричної задачі описують функції переміщень (12) та переміщення (13)–(15), якщо покласти $n=0$. Система рівнянь (16) матиме вісім рівнянь з $M=8N+4$ невідомими.

ВИСНОВКИ

Вперше встановлено, що тривимірний напружений стан товстостінного двошарового циліндра з ненавантаженими торцями описують власні функції, які визначаються нульовими та ненульовими власними значеннями. Розроблена методика апроксимації умов ідеального контакту прилеглих шарів і крайових умов скінченною кількістю власних функцій. Знаходження тривимірного НДС циліндра зведено до розв'язання послідовності одновимірних крайових задач, а розв'язання дванадцяти одержаних рівнянь – до обчислення мінімуму узагальненої квадратичної форми. Встановлено, що числове значення мінімуму визначає похибку задоволення всіх крайових умов.

РЕЗЮМЕ. Рассмотрено трехмерное напряженно-деформированное состояние конечного толстостенного двухслойного цилиндра, исследования которого путем разделения переменных сведено к решению одномерных краевых задач. Компоненты вектора перемещений и тензора напряжений представлены в виде рядов, которые определяются построенными собственными функциями. Разработан метод аналитико-числового решения краевых задач для двухслойного цилиндра. Впервые теоретически установлены числовые критерии сходимости метода и показано, что точность удовлетворения краевых условий определяет одно число – минимум квадратичной формы.

SUMMARY. The three-dimensional stress state of the finite two-layer thick-walled cylinder; which was investigated by separating the angular variable, is reduced to solving the one-dimensional boundary value problems. Components of displacement vectors and the stress tensors are given as a series defined by eigenfunctions. The method of analytical and numerical solution of th boundary value problems for two-layer cylinder is developed. Numerical criteria for convergence of the method are theoretically established for the first time and it is show that the accuracy of satisfaction of the boundary conditions is assessed by a single number – the minimum of a quadratic form.

1. *Shokrolahi-Zadeh B. and Shodja H. M.* Spectral equivalent inclusion method: anisotropic cylindrical multi-inhomogeneities // J. Mech. Phys. Solids. – 2008. – **56**. – P. 3565–3575.
2. *Tarn J.-Q. and Wang, Y.-M.* Laminated composite tubes under extension, torsion, bending, shearing and pressuring: a state space approach // Int. J. Solids Struct. – 2001. – **38**. – P. 9053–9075.
3. *Tsukrov I. and Drach B.* Elastic deformation of composite cylinders with cylindrically orthotropic layers // Ibid. – 2010. – **47**. – P. 25–33.
4. *Саврук М. П., Онишко Л. Й., Сенюк М. М.* Плоска динамічна осесиметрична задача для порожнистого циліндра // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2008. – **44**, № 1. – С. 7–14.

   (*Savruk M. P., Onyshko L. I., and Senyuk M. M.* A plane dynamic axisymmetric problem for a hollow cylinder // Materials Science. – 2008. – **44**, № 1. – P. 1–9.)
5. *Yin X. C. and L. Wang G.* The effect of multiple impacts on the dynamics of an impact system // J. Sound and Vibr. – 1999. – **228**. – P. 995–1015.
6. *Yin X. C. and Yue Z. Q.* Transient plane-strain response of multilayered elastic cylinders to axisymmetric impulse // J. Appl. Mech. – 2002. – **69**, № 6. – P. 825–835.
7. *Liu S. and Soldatos K. P.* Extension of a newapproach towards accurate stress analysis of laminates subjected to thermomechanical loading // J. Eng. Math. – 2008. – **61**. – P. 185–200.
8. *Soldatos K. P.* General solutions for the statics of anisotropic, transversely inhomogeneous elastic plates in terms of complex functions // Math. Mech. Solids. – 2006. – **11**. – P. 596–628.
9. *Ревенко В. П.* О решении трехмерных уравнений линейной теории упругости // Прикл. механика. – 2009. – **45**, № 7. – С. 52–65. (Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**. – P. 730–741.)
10. *Лурье А. И.* Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с.
11. *Ревенко В. П.* Дослідження напруженого стану навантаженого скінченного циліндра з використанням власних функцій // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2009. – Вип. 7. – С. 183–190.
12. *Ревенко В. П.* Дослідження тривимірного напруженого стану в пружній пластині з круговим отвором // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2009. – **45**, № 5. – С. 71–76.

    (*Revenko V. P.* Investigation of the three-dimensional stressed state in elastic plates with circular holes // Materials Science. – 2009. – **45**, № 5. – P. 688–695.)
13. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы. – М.: Наука, 1974. – 830 с.

Одержано 10.12.2013