

УДК 539.3

ПЛОСКІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ НА ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ ДЛЯ ОРТОТРОПНОГО ТА КВАЗІОРТОТРОПНОГО КЛИНІВ

М. П. САВРУК^{1,2}, А. КАЗБЕРУК²

¹ Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів;

² Білостоцька політехніка, Польща

Побудовано характеристичні рівняння плоских задач теорії пружності на власні значення для ортотропного клина за симетричного та антисиметричного розподілів напружень відносно його діагоналі. Сингулярні напруження виражено через коефіцієнти інтенсивності напружень у вершині клина. Відповідні результати для квазіортотропного клина отримано за допомогою граничного переходу, коли корені характеристичного рівняння прямують один до одного. Наближено визначено форму пластичної зони біля вершини ортотропного клина за симетричного та антисиметричного навантажень.

Ключові слова: клин, ортотропний матеріал, квазіортотропний матеріал, сингулярний розподіл напружень, коефіцієнт інтенсивності напружень.

Для вивчення процесів деформування та руйнування анізотропних тіл з кутовими вирізами необхідно знати напружений стан біля вершини вирізу. Розподіл сингулярних напружень біля таких концентраторів визначають розв'язки задач теорії пружності на власні значення для клина. Побудовано характеристичні рівняння таких задач для ортотропних клинів [1–6], коли бісектриса клина паралельна осі ортотропії матеріалу. Отримані рівняння мають різний вигляд. Розглядали також довільну орієнтацію ортотропного клина [7], а також загальний випадок анізотропного клина [8–11], коли характеристичні рівняння записано у вигляді визначника з комплексними елементами. Числове розв'язування таких рівнянь призводить до значних математичних труднощів. Розв'язки задач про розподіл сингулярних напружень у клині також використовують [12] для побудови методом суперпозиції відповідних розв'язків для тіл з кутовими закругленими вирізами та інших клиноподібних областей.

Нижче отримано розв'язки плоских задач теорії пружності для ортотропного клина з бісектрисою вздовж осі ортотропії матеріалу. В явному вигляді записано характеристичні рівняння на власні значення. Порівняно їх числові розв'язки з відомими результатами. Відповідні результати для квазіортотропного клина, коли корені характеристичного рівняння кратні, отримали граничним переходом.

Формулювання задачі та її загальний розв'язок. Розглянемо плоску задачу теорії пружності на власні значення для пружного ортотропного клина, що займає область $S = \{(r, \theta); r \geq 0, -\alpha \leq \theta \leq \alpha\}$, де r, θ – полярні координати з полюсом у вершині клина і полярною віссю вздовж його діагоналі. Декартові координатні осі Ox і Oy вибрали вздовж осей симетрії ортотропного пружного середовища: $z = x + iy = re^{i\theta}$ (рис. 1).

Тоді закон Гука для плоского напруженого стану можна подати у вигляді [5, 13]

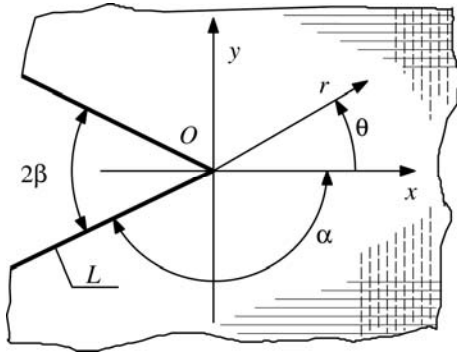


Рис. 1. Пружний ортотропний клин з кутом розхилу 2α .

Fig. 1. An elastic orthotropic wedge with an opening angle 2α .

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E_x} \left(\sigma_{xx} + \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 - 2\gamma_3^2}{2} \sigma_{yy} \right), \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E_x} \left(\gamma_1^2 \gamma_2^2 \sigma_{yy} + \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 - 2\gamma_3^2}{2} \sigma_{xx} \right), \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\gamma_3^2}{E_x} \sigma_{xy},\end{aligned}$$

де $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – безрозмірні параметри:

$$\gamma_1^2 \gamma_2^2 = \frac{E_x}{E_y}, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 2 \left(\frac{E_x}{2G} - \nu_{xy} \right),$$

$$\gamma_3^2 = \frac{E_x}{2G}.$$

Тут E_x, E_y, G, ν_{xy} – пружні сталі

матеріалу.

За відсутності масових сил у пружному ортотропному тілі функція напружень $F(x, y)$ задовольняє еліптичне диференціальне рівняння четвертого порядку

$$\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \gamma_1^2 \gamma_2^2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} = 0. \quad (1)$$

Йому відповідає характеристичне рівняння

$$\mu^4 + (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) \mu^2 + \gamma_1^2 \gamma_2^2 = 0, \quad (2)$$

яке має дві пари комплексно спряжених коренів $\mu_k = i\gamma_k$ ($\gamma_k > 0$) і $\bar{\mu}_k = -i\gamma_k$ ($k = 1, 2$), оскільки коефіцієнти рівняння (2) дійсні.

Коли корені μ_1 і μ_2 різні, загальний розв'язок рівняння (1) можна виразити у допоміжних комплексних площинах $z_k = x + i\gamma_k y$ ($k = 1, 2$) через дві аналітичні функції $\chi_1(z_1)$ і $\chi_2(z_2)$ залежністю

$$F(x, y) = 2 \operatorname{Re}[\chi_1(z_1) + \chi_2(z_2)]. \quad (3)$$

Напружений стан у клині запишемо через функцію напружень у полярній системі координат $F(r, \theta)$ за формулами [14]

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial F(r, \theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F(r, \theta)}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 F(r, \theta)}{\partial r^2}, \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F(r, \theta)}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial F(r, \theta)}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F(r, \theta)}{\partial r \partial \theta}.\end{aligned} \quad (4)$$

Вважатимемо, що на гранях клина відсутні нормальні ($\sigma_{\theta\theta}$) та дотичні ($\tau_{r\theta}$) напруження:

$$\sigma_{\theta\theta} + i\tau_{r\theta} = 0, \quad \theta = \pm\alpha. \quad (5)$$

Потенціали напружень шукатимемо у вигляді

$$\chi_1(z_1) = A_1 z_1^{2-\lambda}, \quad \chi_2(z_2) = A_2 z_2^{2-\lambda}, \quad (6)$$

де A_1, A_2 – довільні комплексні сталі. Параметр λ вважатимемо дійсним [3, 5].

Запишемо комплексні змінні z_1, z_2 у вигляді

$$z_k = r(\cos^2 \theta + \gamma_k^2 \sin^2 \theta)^{1/2} \exp[i\beta_k(\theta)],$$

де функція $\beta_k(\theta)$ задовольняє рівняння

$$\operatorname{tg}[\beta_k(\theta)] = \gamma_k \operatorname{tg} \theta.$$

Тоді матимемо

$$\begin{aligned} z_k^{2-\lambda} &= r^{2-\lambda} [R_k(\theta) + iI_k(\theta)], \\ \text{де} \quad R_k(\theta) &= (\cos^2 \theta + \gamma_k^2 \sin^2 \theta)^{1-\lambda/2} \cos(2-\lambda)\beta_k(\theta), \\ I_k(\theta) &= (\cos^2 \theta + \gamma_k^2 \sin^2 \theta)^{1-\lambda/2} \sin(2-\lambda)\beta_k(\theta). \end{aligned} \quad (7)$$

Тепер зі співвідношень (3) і (6) знайдемо

$$F(r, \theta) = 2 \operatorname{Re}[A_1 z_1^{2-\lambda} + A_2 z_2^{2-\lambda}] = 2r^{2-\lambda} [AR_1(\theta) + BR_2(\theta) + CI_1(\theta) + DI_2(\theta)],$$

де $A = \operatorname{Re} A_1$, $B = \operatorname{Re} A_2$, $C = \operatorname{Re}(iA_1) = -\operatorname{Im} A_1$, $D = \operatorname{Re}(iA_2) = -\operatorname{Im} A_2$.

З формул (4) отримаємо напруження

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2r^{-\lambda} \{ (2-\lambda)[AR_1(\theta) + BR_2(\theta) + CI_1(\theta) + DI_2(\theta)] + \\ &\quad + AR_1''(\theta) + BR_2''(\theta) + CI_1''(\theta) + DI_2''(\theta) \}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2(2-\lambda)(1-\lambda)r^{-\lambda} [AR_1(\theta) + BR_2(\theta) + CI_1(\theta) + DI_2(\theta)], \\ \tau_{r\theta} &= -2(1-\lambda)r^{-\lambda} [AR_1'(\theta) + BR_2'(\theta) + CI_1'(\theta) + DI_2'(\theta)]. \end{aligned} \quad (8)$$

З крайових умов (5) приходимо до однорідних систем алгебричних рівнянь за симетричного

$$\begin{cases} AR_1(\alpha) + BR_2(\alpha) = 0, \\ AR_1'(\alpha) + BR_2'(\alpha) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

та антисиметричного

$$\begin{cases} CI_1(\alpha) + DI_2(\alpha) = 0, \\ CI_1'(\alpha) + DI_2'(\alpha) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

розподілів напружень відносно бісектриси клина (осі Ox).

Симетричний напружений стан. Спочатку розглянемо симетричний розподіл напружень відносно бісектриси клина. Однорідна система рівнянь (9) має ненульовий розв'язок за умови, коли її визначник рівний нулю. Звідси приходимо до характеристичного рівняння для визначення власних значень [15]

$$\begin{aligned} (\gamma_2^2 - \gamma_1^2) \operatorname{tg} \alpha - \gamma_2(1 + \gamma_1^2 \operatorname{tg}^2 \alpha) \operatorname{tg}[(2-\lambda)\beta_2(\alpha)] + \\ + \gamma_1(1 + \gamma_2^2 \operatorname{tg}^2 \alpha) \operatorname{tg}[(2-\lambda)\beta_1(\alpha)] = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

де $\beta_k(\alpha) = \pi + \operatorname{arctg}(\gamma_k \operatorname{tg} \alpha)$ ($\pi/2 < \alpha < \pi$), $k = 1, 2$.

Рівняння (11) у смузі $0 < \operatorname{Re} \lambda < 1$ не має коренів для кутів $0 < \alpha < \pi/2$, а для $\pi/2 < \alpha < \pi$ має один дійсний корінь λ_1 , який належить діапазону $(0, 1/2)$. Для $\alpha = \pi$ (напівнескінченна тріщина) $\lambda_1 = 1/2$.

Зробивши граничний перехід, коли параметр $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1$, отримаємо характеристичне рівняння для квазіортотропного клина ($\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$) [15]

$$2\gamma \operatorname{tg} \alpha \cos[2(2-\lambda)\beta_1(\alpha)] - (1 - \gamma^2 \operatorname{tg}^2 \alpha) \sin[2(2-\lambda)\beta_1(\alpha)] - 2\gamma(1-\lambda) \operatorname{tg} \alpha = 0.$$

Поклавши тут параметр $\gamma = 1$, приходимо до рівняння для ізотропного клина [12, 16]

$$\sin[2\alpha(1-\lambda)] + (1-\lambda) \sin 2\alpha = 0.$$

Числові розрахунки виконано для ортотропного клина з червоного дуба з такими пружними характеристиками [17]: $E_2/E_1 = 0,082$, $G/E_1 = 0,081$, $\nu_{12} = 0,45$, де E_1 і E_2 – модулі пружності вздовж і впоперек волокон деревини, відповідно. Розглянули дві орієнтації клина: вздовж ($E_x = E_1$, $E_y = E_2$; $\gamma_1 = 3,21$, $\gamma_2 = 1,09$) або впо-

перек ($E_x = E_2, E_y = E_1; \gamma_1 = 0,92, \gamma_2 = 0,31$) волокон. Отримали залежності показників особливостей напружень λ_I (рис. 2а) у вершині ортотропного клина від кута розхилу 2β , коли його бісектриса паралельна (крива 2) або перпендикулярна (крива 3) до волокон матеріалу, а також для ізотропного клина (крива 1), коли $E_1 = E_2$.

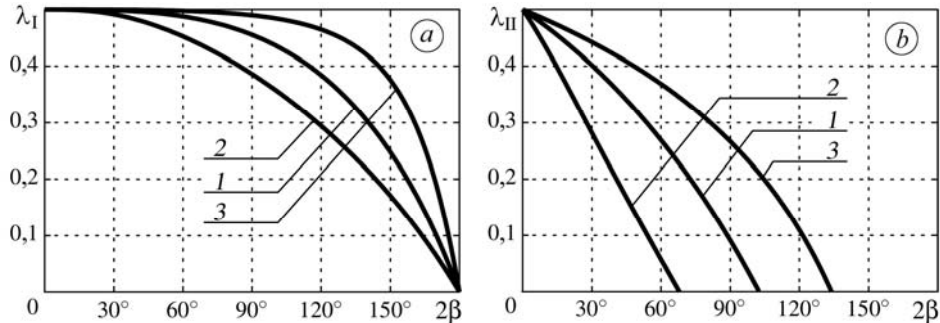


Рис. 2. Залежності показників особливостей напружень у вершині ортотропного клина λ_I (а) та λ_{II} (б) від кута розхилу 2β : 1 – $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$; 2 – $\gamma_1 = 3,21, \gamma_2 = 1,09$; 3 – $\gamma_1 = 0,92, \gamma_2 = 0,31$.

Fig. 2. Dependences of the singularity indices of stresses at the tip of the orthotropic wedge λ_I (a) and λ_{II} (b) on the opening angle 2β : 1 – $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$; 2 – $\gamma_1 = 3.21, \gamma_2 = 1.09$; 3 – $\gamma_1 = 0.92, \gamma_2 = 0.31$.

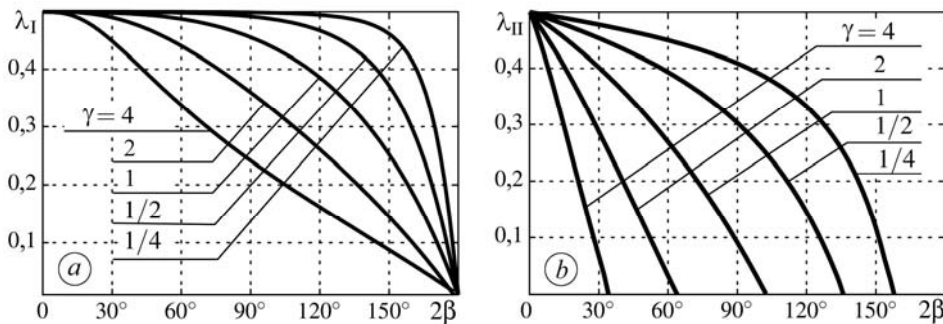


Рис. 3. Залежності показників особливостей напружень у вершині квазіортотропного клина λ_I (а) та λ_{II} (б) від кута розхилу 2β .

Fig. 3. Dependences of the singularity indices of stresses at the tip of the quasi-orthotropic wedge λ_I (a) and λ_{II} (b) on the opening angle 2β .

Аналогічні залежності побудовані для квазіортотропного клина (рис. 3а) для різних значень параметра γ , який залежить від відношення модулів пружності матеріалу ($\gamma = \sqrt[4]{E_x/E_y}$). Порівняли показники особливостей напружень (рис. 4а) у вершинах ортотропного (крива 1) та квазіортотропного (крива 2) клинів з однаковим відношенням модулів пружності: $E_y/E_x = 0,082$. Отримані залежності показників особливості напружень у вершині клина від кута розхилу 2β мало відрізняються між собою для ортотропного та квазіортотропного матеріалів, що свідчить про те, що відношення модулів пружності в ортотропному матеріалі є основним механічним параметром.

Введемо коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) у вершині кутового вирізу \tilde{K}_I^V [12]:

$$\tilde{K}_I^V = \lim_{r \rightarrow 0} [(2\pi r)^{\lambda_1} \sigma_{\theta\theta}(r, 0)].$$

Зі співвідношення (8) знайдемо

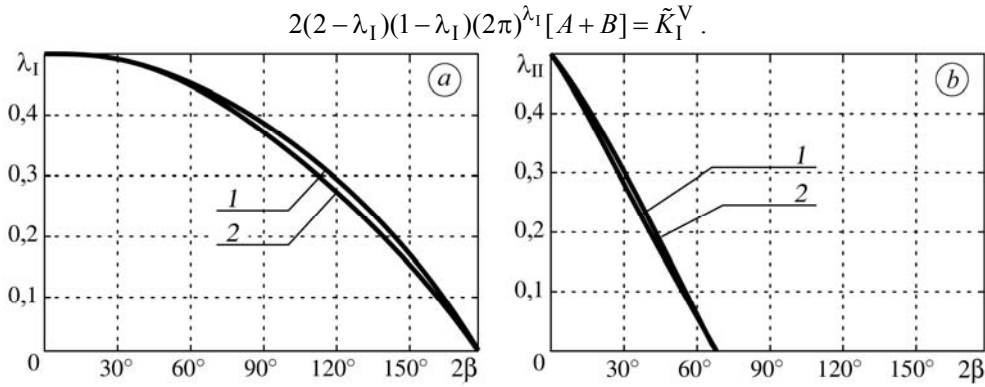


Рис. 4. Порівняння показників особливостей напружень λ_I (a) та λ_{II} (b) у вершинах ортотропного ($I - \gamma_1 = 3,21$, $\gamma_2 = 1,09$; $E_y/E_x = 0,082$) та квазіортотропного ($2 - \gamma = 1,869$; $E_y/E_x = 0,082$) клинів.

Fig. 4. Comparison of the singularity indices of stresses λ_I (a) and λ_{II} (b) at the tip of the orthotropic ($I - \gamma_1 = 3.21$, $\gamma_2 = 1.09$; $E_y/E_x = 0.082$) and quasi-orthotropic ($2 - \gamma = 1.869$; $E_y/E_x = 0.082$) wedges.

Долучивши до цього рівняння перше з рівнянь (9), отримаємо систему, з якої визначимо сталі A і B :

$$\frac{A}{R_2(\alpha)} = -\frac{B}{R_1(\alpha)} = \frac{1}{R_2(\alpha) - R_1(\alpha)} \frac{(2\pi)^{-\lambda_1} \tilde{K}_I^V}{2(2 - \lambda_1)(1 - \lambda_1)}.$$

З виразів (6) отримаємо комплексні потенціали

$$\Phi_1(z_1) = \chi_1''(z_1) = A(2 - \lambda_1)(1 - \lambda_1)z_1^{-\lambda_1}, \quad \Phi_2(z_2) = \chi_2''(z_2) = B(2 - \lambda_1)(1 - \lambda_1)z_2^{-\lambda_1}.$$

Симетричний розподіл напружень в ортотропному клині знайдемо з формул (8):

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{\tilde{K}_I^V}{(2\pi r)^{\lambda_1}} \left\{ \frac{R_2(\alpha)[(2 - \lambda_1)R_1(\theta) + R_1''(\theta)] - R_1(\alpha)[(2 - \lambda)R_2(\theta) + R_2''(\theta)]}{(2 - \lambda_1)(1 - \lambda_1)[R_2(\alpha) - R_1(\alpha)]} \right\}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\tilde{K}_I^V}{(2\pi r)^{\lambda_1}} \left\{ \frac{R_2(\alpha)R_1(\theta) - R_1(\alpha)R_2(\theta)}{R_2(\alpha) - R_1(\alpha)} \right\}, \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\tilde{K}_I^V}{(2\pi r)^{\lambda_1}} \left\{ \frac{R_2(\alpha)R_1'(\theta) - R_1(\alpha)R_2'(\theta)}{(2 - \lambda_1)[R_2(\alpha) - R_1(\alpha)]} \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Тут функції $R_1(\theta)$ і $R_2(\theta)$ знаходимо за формулами (7). Співвідношення (12) визначають компоненти сингулярних напружень у нескінченному ортотропному клині за симетричного розподілу напружень, а в обмежених тілах з гострими кутковими вирізами дають асимптотичний розподіл сингулярних напружень біля вершини куткового вирізу.

Використавши умову пластичності Мізеса для плоского напруженого стану

$$\sqrt{\sigma_{rr}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\theta\theta} + 3\sigma_{r\theta}^2} = \sigma_Y, \quad (13)$$

де σ_Y – границя пластичності матеріалу, знайдемо, так як і в механіці руйнування [18], наближену форму пластичної зони біля вершини вирізу. З рівняння (13) отримали полярний радіус $r_p = r(\theta)$ точок межі пластичної зони (рис. 5a) для ізотропного (крива 1) та ортотропного (клин орієнтований вздовж (крива 2) або впоперек (крива 3) волокон) клинів. В ортотропному клині пластична зона видовжена в напрямі волокон і значно більша, ніж в ізотропному матеріалі.

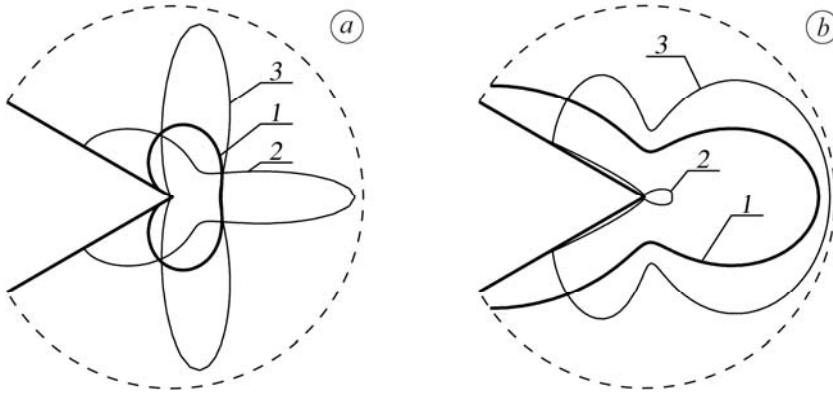


Рис. 5. Пластична зона біля вершини ізотропного (1) та ортотропного ($2 - \gamma_1 = 3,21$, $\gamma_2 = 1,09$; $3 - \gamma_1 = 0,92$, $\gamma_2 = 0,31$) клинів з кутом розхилу $2\beta = 60^\circ$ за симетричного (a) та антисиметричного (b) розподілів напружень за плоского напруженого стану.

Fig. 5. Plastic zone near the tip of isotropic (1) and orthotropic ($2 - \gamma_1 = 3.21$, $\gamma_2 = 1.09$; $3 - \gamma_1 = 0.92$, $\gamma_2 = 0.31$) wedges with the opening angle $2\beta = 60^\circ$ for symmetrical (a) and antisymmetrical (b) stress distributions under shear plane stress.

Антисиметричний напружений стан. Прирівнявши визначник системи рівнянь (10) до нуля, приходимо до характеристичного рівняння для антисиметричного розподілу напружень відносно бісектриси клина [15]:

$$(\gamma_2^2 - \gamma_1^2) \operatorname{tg} \alpha + \gamma_2 (1 + \gamma_1^2 \operatorname{tg}^2 \alpha) \operatorname{ctg}(2 - \lambda) \beta_2(\alpha) - \gamma_1 (1 + \gamma_2^2 \operatorname{tg}^2 \alpha) \operatorname{ctg}(2 - \lambda) \beta_1(\alpha) = 0. \quad (14)$$

Зауважимо, що подібним методом характеристичні рівняння для симетричного та антисиметричного розподілів напружень побудовано раніше [5], однак отримані там рівняння містять похибки (бракує множника $\operatorname{tg}^2 \alpha$ у двох виразах у круглих дужках). Числові значення показників особливостей напружень λ_I (див. рис. 2a) і λ_{II} (див. рис. 2b) у вершині ортотропного клина, які отримано з характеристичних рівнянь (11) і (14), добре узгоджуються з відомими результатами [2, 6].

Рівняння (14) у смузі $0 < \operatorname{Re} \lambda < 1$ не має коренів для кута $0 < \alpha < \alpha^*$, а для $\alpha^* < \alpha < \pi$ має один дійсний корінь λ_{II} , який належать діапазону $(0, 1/2)$. Для $\alpha = \pi$ (напівнескінченна тріщина) $\lambda_{II} = 1/2$. Кут α^* – корінь рівняння, яке можна отримати з рівності (14), спрямувавши параметр λ до нуля:

$$\gamma_1 \beta_2(\alpha^*) (1 + \gamma_2^2 \operatorname{tg}^2 \alpha^*) - \gamma_2 \beta_1(\alpha^*) (1 + \gamma_1^2 \operatorname{tg}^2 \alpha^*) = 0. \quad (15)$$

Перейдемо у рівнянні (14) до границі, коли параметр $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1$. У результаті отримаємо характеристичне рівняння для квазіортотропного клина за антисиметричного розподілу напружень [15]:

$$2\gamma_1 \operatorname{tg} \alpha \cos[2(2 - \lambda) \beta_1(\alpha)] - (1 - \gamma_1^2 \operatorname{tg}^2 \alpha) \sin[2(2 - \lambda) \beta_1(\alpha)] + 2\gamma_1 (1 - \lambda) \operatorname{tg} \alpha = 0.$$

Звідси в ізотропному випадку ($\gamma_1 = 1$) приходимо до відомого рівняння [12, 16]

$$\sin[2\alpha(1 - \lambda)] - (1 - \lambda) \sin 2\alpha = 0.$$

З рівності (15) за допомогою такого ж граничного переходу отримаємо відповідне рівняння для квазіортотропного клина

$$\gamma_1 \operatorname{tg} \alpha^* - \beta_1(\alpha^*) (1 - \gamma_1^2 \operatorname{tg}^2 \alpha^*) = 0.$$

Поклавши тут параметр $\gamma_1 = 1$, прийдемо до відомого рівняння для ізотропного клина [19]

$$\operatorname{tg} 2\alpha^* = 2\alpha^*.$$

Отримали залежності параметра λ_{II} від кута розхилу 2β для різних відношень модулів пружності (див. рис. 3b) та порівняли його для ортотропного та квазіортотропного клинів з однаковим відношенням модулів пружності (див. рис. 4b).

Введемо КІН у вершині кутового вирізу \tilde{K}_{II}^V залежністю [12]

$$\tilde{K}_{II}^V = \lim_{r \rightarrow 0} \left[(2\pi r)^{\lambda_{II}} \tau_{r\theta}(r, 0) \right].$$

Зі співвідношення (8) знайдемо

$$2(2 - \lambda_{II})(2\pi)^{\lambda_{II}} [\gamma_1 C + \gamma_2 D] = \tilde{K}_{II}^V.$$

Долучивши до цього рівняння перше з рівнянь (9), визначимо сталі C і D

$$\frac{C}{I_2(\alpha)} = -\frac{D}{I_1(\alpha)} = \frac{1}{\gamma_1 I_2(\alpha) - \gamma_2 I_1(\alpha)} \frac{(2\pi)^{-\lambda_{II}} \tilde{K}_{II}^V}{2(2 - \lambda_{II})}.$$

З виразів (6) одержимо комплексні потенціали

$$\Phi_1(z_1) = -iC(2 - \lambda_{II})(1 - \lambda_{II})z_1^{-\lambda_{II}}, \quad \Phi_2(z_2) = -iD(2 - \lambda_{II})(1 - \lambda_{II})z_2^{-\lambda_{II}}.$$

Антисиметричний розподіл напружень в ортотропному клині отримаємо з рівностей (8):

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{\tilde{K}_{II}^V}{(2\pi r)^{\lambda_{II}}} \left\{ \frac{I_2(\alpha)[(2 - \lambda_{II})I_1(\theta) + I_1''(\theta)] - I_1(\alpha)[(2 - \lambda_{II})I_2(\theta) + I_2''(\theta)]}{(2 - \lambda_{II})[\gamma_1 I_2(\alpha) - \gamma_2 I_1(\alpha)]} \right\}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\tilde{K}_{II}^V}{(2\pi r)^{\lambda_{II}}} \left\{ \frac{(1 - \lambda_{II})[I_2(\alpha)I_1(\theta) - I_1(\alpha)I_2(\theta)]}{\gamma_1 I_2(\alpha) - \gamma_2 I_1(\alpha)} \right\}, \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\tilde{K}_{II}^V}{(2\pi r)^{\lambda_{II}}} \left\{ \frac{1 - \lambda_{II}}{2 - \lambda_{II}} \frac{[I_2(\alpha)I_1'(\theta) - I_1(\alpha)I_2'(\theta)]}{\gamma_1 I_2(\alpha) - \gamma_2 I_1(\alpha)} \right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

де функції $I_1(\theta)$ і $I_2(\theta)$ знаходимо за формулами (7).

На підставі рівнянь (13) і (16) побудовані (рис. 5b) форми пластичних зон біля вершини кутового вирізу за антисиметричного розподілу напружень для ізотропного (крива 1) та ортотропного (клин орієнтований вздовж (крива 2) або впоперек (крива 3) волокон) клинів. Коли кутовий виріз в ортотропному матеріалі орієнтований уздовж волокон матеріалу, то пластична зона значно менша, ніж за поперечної його орієнтації, а також порівняно з вирізом в ізотропному матеріалі.

Формули (16) визначають компоненти сингулярних напружень у нескінченному ортотропному клині за антисиметричного розподілу напружень, а в обмежених тілах з гострими кутовими вирізами дають асимптотичний розподіл сингулярних напружень біля вершини вирізу. Поклавши у співвідношеннях (12) і (16) кут $\alpha = \pi$, отримаємо формули для сингулярних напружень біля вершини тріщини в ортотропному матеріалі [20].

ВИСНОВКИ

Побудовано характеристичні рівняння плоских задач теорії пружності на власні значення для ортотропного клина, бісектриса якого паралельна до осі ортотропії матеріалу, за умови, що їх корені різні. За допомогою граничного переходу, коли ці корені прямують один до одного, отримано аналогічні рівняння для квазіортотропного клина (корені характеристичного рівняння кратні). Наведено формули для розподілу сингулярних напружень біля вершини клина через КІН для симетричного та антисиметричного розподілів напружень відносно бісектриси клина. Використавши ефективні напруження Мізеса, наближено визначили форми пластичних зон біля вершини ортотропного клина. Числові розрахунки виконано для конкретного ортотропного матеріалу (червоний дуб). Порівняно числові результати для коренів характеристичних рівнянь та форм пластичних зон, коли клин ізотропний або ортотропний, орієнтований вздовж або впоперек волокон деревини.

РЕЗЮМЕ. Построены характеристические уравнения плоских задач теории упругости на собственные значения для ортотропного клина при симметричном и антисимметричном распределениях напряжений относительно его диагонали. Сингулярные напряжения выражены через коэффициенты интенсивности напряжений в вершине клина. Соответствующие результаты для квазиортотропного клина получены с помощью предельного перехода, когда корни характеристического уравнения стремятся друг к другу. Приближенно определена форма пластической зоны у вершины ортотропного клина при симметричной и антисимметричной нагрузках.

SUMMARY. The characteristic equation of the eigenvalue problems of the plane elasticity theory for an orthotropic wedge for symmetric and antisymmetric stress distributions with respect to its diagonal are constructed. Singular stresses at the tip of the wedge are expressed in terms of the stress intensity factors. The corresponding results for a quasi-orthotropic wedge are obtained by passing to the limit, when the roots of the characteristic equation come close to each other. The form of plastic zone near the tip of the orthotropic wedge under symmetric and antisymmetric loading is approximately determined.

Робота виконана за проектом № 2011/03/B/ST8/06456, який фінансується Національним центром науки (Польща).

1. Геворкян С. Х. Исследование особенностей решений в некоторых задачах теории упругости анизотропных тел // Изв. АН АрмССР. Механика. – 1968. – 21, № 4. – С. 30–39.
2. Bogy D. B. The plane solution for anisotropic elastic wedges under normal and shear loading // J. Appl. Mech. – 1972. – 39. – P. 1103–1109.
3. Wu K.-C. and Chang F.-T. Near-tip fields in a notched body with dislocations and body forces // Ibid. – 1993. – 60. – P. 936–941.
4. Selvarathinam A. and Pageau S. S. The order of stress singularities in orthotropic wedges // Ibid. – 1997. – 64. – P. 717–719.
5. Blinowski A. and Rogaczewski J. On the order of singularity at V-shaped notches in anisotropic bodies // Arch. Mech. – 2000. – 52, № 6. – P. 1001–1010.
6. Wu Z. and Liu Y. Analytical solution for the singular stress distribution due to V-notch in an orthotropic plate material // Eng. Fract. Mech. – 2008. – 75. – P. 2367–2384.
7. Blinowski A. and Wieromiej-Ostrowska A. On the singularities at the tips of orthotropic wedges in plane elasticity. Part 2 // Techn. Sci. – 2006. – № 9. – P. 65–72.
8. Wu K.-C. and Chen C.-T. Stress analysis of anisotropic elastic V-notches bodies // Int. J. Solids Struct. – 1996. – 33, № 17. – P. 2403–2416.
9. Blanco C., Martinez-Esnaola J. M., and Atkinson C. Analysis of sharp angular notches in anisotropic materials // Int. J. Fract. – 1998. – 93, № 1/4. – P. 373–386.
10. Chue C.-H., Tseng C.-H., and Liu C.-I. On stress singularities in an anisotropic wedge for various boundary conditions // Compos. Struct. – 2001. – 54. – P. 87–102.
11. Chue C.-H. and Liu C.-I. A general solution on stress singularities in an anisotropic wedge // Int. J. Solids Struct. – 2001. – 38, № 38–39. – P. 6889–6906.
12. Саврук М. П., Казберук А. Концентрація напружень у твердих тілах з вирізами // Механіка руйнування та міцність матеріалів: довідн. посіб. / За заг. ред. В. В. Панасюка. – Львів: СПОЛЮМ, 2012 – Т. 14. – 384 с.
13. Лехницький С. Г. Анизотропные пластинки. – М.: Гостехиздат, 1957. – 464 с.
14. Новацький В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
15. Savruk M. and Kazberuk A. Solution of the eigenvalue problems of the plane elasticity theory for orthotropic and quasi-orthotropic wedges // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. – Львів: ІППММ НАН України, 2014. – С. 107–109.
16. Williams M. L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // J. Appl. Mech. – 1952. – 19, № 4. – P. 526–530.
17. Kretschmann D. E. Mechanical properties of wood // Wood Handbook: Wood as an Engineering Material. – Madison: USDA – Forest Service, 2010. – P. 5.1–5.46.
18. Neimitz A. Mechanika drewna. – Warszawa: PWN, 1998. – 436 s.
19. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л.: Наука, 1968. – 402 с.
20. Sih G. C., Paris P. C., and Irwin G. R. On cracks in rectilinearly anisotropic bodies // Int. J. Fract. Mech. – 1965. – 1, № 3. – P. 189–203.

Одержано 11.06.2014