

УДК 539.3

КРУЧЕННЯ ПРУЖНОГО ПРОСТОРУ З ОСЕСИМЕТРИЧНОЮ ВУЗЬКОЮ ПОРОЖНИНОЮ

В. С. КРАВЕЦЬ, Р. В. ВАСЮТА

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

Методом сингулярних інтегральних рівнянь розв'язано осесиметричну задачу кручення пружного простору з гладкою порожниною. Отримано розподіли напружень та їхні максимальні значення на краях порожнин різних форм. Обчислено коефіцієнти концентрації напружень на поверхнях осесиметричних порожнин у всьому діапазоні зміни радіуса закруглення їх вершин за умов кручення пружного тіла. Числові результати одержано для порожнин різної конфігурації.

Ключові слова: механіка руйнування, коефіцієнт концентрації напружень, осесиметрична порожнина, кручення, метод сингулярних інтегральних рівнянь.

Єдиний підхід до розв'язування плоских [1] та антиплоских [2,3] задач теорії пружності та механіки руйнування тіл з гострими та закругленими кутковими вирізами поширено на відповідні задачі кручення нескінченних пружних областей з осесиметричними порожнинами. За цим підходом розв'язки крайових задач для пружних тіл, послаблених тріщинами та отворами різних конфігурацій, отримано методом сингулярних інтегральних рівнянь [4]. Метод дає можливість досить точно знаходити розподіли напружень уздовж довільних гладких контурів отворів, зокрема, на ділянках контурів, закруглених дугою кола малого відносного радіуса [1, 3].

Особливу увагу приділено визначенню напружено-деформованого стану закрученого простору з вузькою осесиметричною фізичною щілиною, яка (з прямованням радіуса закруглення у вершині щілини до нуля) найкраще моделює реальну дископодібну тріщину у пружному тілі. Отримані розв'язки для еліпсоїдних порожнин звірено з відомими [5].

Співвідношення між коефіцієнтами концентрації напружень у гладких вершинах вирізів та коефіцієнтами інтенсивності напружень у відповідних гострих вершинах залежать не тільки від радіусів кривини у вершинах гладких вирізів, а й від конфігурації вирізів біля їхніх вершин [1–3]. На основі побудованої залежності між коефіцієнтами інтенсивності та концентрації напружень у гострій та закругленій вершинах куткового вирізу за умов антиплоскої деформації [2, 3] задачу кручення пружного простору з осесиметричною порожниною розв'язано для всього діапазону зміни радіуса закруглення у вершині порожнини.

Формулювання задачі. Нескінченний пружний простір з осесиметричною порожниною віднесемо до циліндричної системи координат $(rz\varphi)$ з початком у центрі порожнини (рис. 1). Для осесиметричної задачі кручення навантаження у тілі розподілені симетрично відносно осі кручення Oz і спрямовані перпендикулярно до площини $\varphi = \text{const}$, а відмінні від нуля компоненти напружень $\tau_{\varphi r}$, $\tau_{\varphi z}$ та переміщення v у тангенціальному (відносно кута φ) напрямі не залежать від куткової координати φ . Рівняння рівноваги у переміщеннях має вигляд [6]

Контактна особа: В. С. КРАВЕЦЬ, e-mail: vlad@ipm.lviv.ua

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0, \quad v = v(\zeta), \quad \zeta = r + iz \in S, \quad (1)$$

а компоненти напружень виражено через переміщення v :

$$\tau_{\varphi r}(\zeta) = Gr \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right), \quad \tau_{\varphi z}(\zeta) = G \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (2)$$

де G – модуль зсуву.

Розглянемо осесиметричну задачу кручення пружного простору S , послабленого вільною від навантажень криволінійною порожниною з гладким замкненим контуром у площині rOz :

$$\tau_{\varphi n}^*(t) = 0, \quad t \in L. \quad (3)$$

Пружний простір закручується на сталий кут Ω на одиницю довжини вздовж осі кручення Oz . Напружено-деформований стан у суцільному просторі визначають компоненти напружень $\tau_{\varphi r}^0 = 0, \tau_{\varphi z}^0 = G\Omega r$ та переміщень $v_0 = \Omega r z$.

Враховуючи відсутність напружень на осі кручення Oz [6] та на поверхні осесиметричної порожнини, зведемо задачу до визначення збуреного напруженого стану пружного тіла з розрізом $L = ACB$ (кінці якого виходять на вісь кручення (рис. 1)), на берегах якого задані самозрівноважені напруження [7]

$$\tau_{\varphi n}^{\pm}(s) = \tau(s), \quad (4)$$

а на нескінченності збурені напруження і поворот відсутні. Тут верхні індекси вказують на граничні значення на контурі L відповідних величин за підходу до нього зліва (+) або справа (-), n – зовнішня нормаль до контуру L , $s = s(t)$ – дугова абсциса точки $t = r + iz \in L$, $\tau(s) = -\tau_{\varphi n}^0(s) = -\tau_0(r/a)(dr/ds)$, $\tau_0 = G\Omega a$.

Для самозрівноважених навантажень на берегах тріщини (4) на основі побудованих інтегральних зображень загальних розв'язків осесиметричних задач теорії пружності за кручення пружних тіл з тріщинами по поверхнях обертання [8] загальний розв'язок рівняння (1) візьмемо у вигляді

$$v(\zeta) = v_0(\zeta) + \frac{2}{G} \int_L \gamma(s') r'^2 \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{v^*}{r'} \right) ds', \quad s' = s'(t'); \quad t' = r' + iz' \in L, \quad \zeta = r + iz \in S, \quad (5)$$

де $v_0(\zeta) = \Omega r z$ – переміщення у тілі без тріщини,

$$\gamma(s) = G \left[v^+(s) - v^-(s) \right] / 2 - \quad (6)$$

стрибок переміщень на контурі тріщини L ,

$$v^* = v^*(\zeta, t') = \left[2E(k) - (2 - k^2)K(k) \right] / (2\pi k \sqrt{rr'}) - \quad (7)$$

фундаментальний розв'язок диференційного рівняння (1),

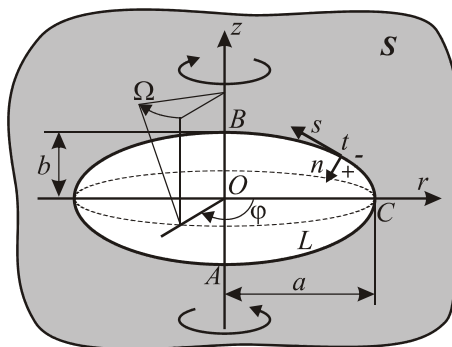


Рис. 1. Кручення простору з осесиметричною порожниною.

Fig. 1. Torsion of space with an axisymmetric cavity.

$$k = 2\sqrt{rr'}/\delta; \quad \delta = \sqrt{(z-z')^2 + (r+r')^2}, \quad (8)$$

$K(k)$ і $E(k)$ – повні еліптичні інтеграли першого і другого родів.

Інтегральне рівняння задачі. Використовуючи залежності (2), за допомогою подання для переміщень (5) задовольнимо крайову умову (4) на контурі тріщини ($\zeta \rightarrow t \in L$). Отже, задачу звели до сингулярного інтегрального рівняння [9]

$$\frac{1}{\pi} \int_L \Gamma(s') J(s', s) ds' = \tau(s) \quad (9)$$

відносно невідомої функції $\Gamma(s) = \partial\{\gamma(s)/r\}/\partial s$, $s = s(t)$, $t = r + iz \in L$, ядро якого визначає співвідношення [7]

$$J(s', s) = J(r, z, r', z') = \frac{\sqrt{r'/r}}{4k} \left\{ D_1 \frac{2r'}{r} \frac{dr}{ds} + D_2 \left\langle \frac{(z-z')}{r} \frac{dz}{ds} + \frac{(r+r')}{r} \frac{dr}{ds} \right\rangle \right\}, \quad (10)$$

де

$$D_1 = (8 - 3k^2)K(k) + (7k^2 - 8)E(k)/(1 - k^2);$$

$$D_2 = 8(k^2 - 2)K(k) + (k^4 - 16k^2 + 16)E(k)/(1 - k^2). \quad (11)$$

Сингулярне інтегральне рівняння (9) має єдиний розв'язок у класі функцій з інтегровною особливістю на кінцях контуру інтегрування за умови однозначності переміщень за обходу контуру тріщини L [4]:

$$\int_L \Gamma(s) ds = 0. \quad (12)$$

Напружений стан простору з порожниною. Збурені напруження у внутрішніх точках тіла ($\zeta = r + iz \in S$) визначені за формулами [8]

$$\tau_{\varphi r}(r, z) = \frac{2}{r^2} \int_L \Gamma(s') r'^3 \frac{\partial \Phi^*}{\partial z} ds', \quad \tau_{\varphi z}(r, z) = -\frac{2}{r^2} \int_L \Gamma(s') r'^3 \frac{\partial \Phi^*}{\partial r} ds', \quad (13)$$

де

$$\Phi^*(\zeta, t') = r^2 \left[8(2 - k^2)E(k) - (4 - k^2)(4 - 3k^2)K(k) \right] / (6\pi r' k^3 \sqrt{rr'}),$$

параметр k знаходимо з виразу (8), $t' = r' + iz' \in L$.

Повні тангенціальні напруження $\tau_{\varphi s}^*(s)$ на краю порожнини визначають через граничні напруження (13) на правому березі розрізу L та відповідні напруження у тілі без порожнини:

$$\tau_{\varphi s}^*(s) = \tau_{\varphi s}^-(s) + \tau_{\varphi s}^0(s), \quad s = s(t), \quad t = r + iz \in L. \quad (14)$$

Тут $\tau_{\varphi s}^0(s) = \tau_0(r/a)(dz/ds)$ – відомі дотичні напруження у точці $t \in L$ суцільного пружного тіла, що відповідають заданому куту Ω його закручування; $\tau_0 = G\Omega a$. Граничне значення напружень

$$\tau_{\varphi s}^-(s) = -\Gamma(s) \cdot r + \frac{1}{\pi} \int_L \Gamma(s') P_0(s, s') ds' \quad (15)$$

знайдено за допомогою залежності $\tau_{\varphi s}(s) = \tau_{\varphi r}(s)(dr/ds) + \tau_{\varphi z}(s)(dz/ds)$, співвідношень (13) та формул Сохоцького–Племеля для граничних значень інтегралів типу Коші [10]. Тут

$$P_0(s, s') = \frac{\delta}{8r} \left\{ -D_1 \frac{2r'}{r} \frac{dz}{ds} + D_2 \left\langle \frac{(z-z')}{r} \frac{dr}{ds} - \frac{(r+r')}{r} \frac{dz}{ds} \right\rangle \right\}, \quad (16)$$

а величини δ , D_1 , D_2 визначені співвідношеннями (8) і (11).

Схема числового розв'язування задачі. Записавши параметричне рівняння контуру L у вигляді

$$t = r + iz = a\omega(\eta), \quad -1 \leq \eta \leq 1; \quad (t' = r' + iz' = a\omega(\xi), \quad -1 \leq \xi \leq 1), \quad (17)$$

подамо сингулярне інтегральне рівняння (9) та додаткову умову (12) у канонічній безрозмірній формі:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \Gamma_1(\xi) J_1(\xi, \eta) d\xi = \tau_1(\eta), \quad -1 \leq \eta \leq 1, \quad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \Gamma_1(\xi) d\xi = 0, \quad (18)$$

де $J_1(\xi, \eta) = aJ(s'(\xi), s(\eta))$, $\Gamma_1(\xi) = \Gamma(s'(\xi))|\omega'(\xi)|/\tau_0$, $\tau_1(\eta) = \tau(s(\eta))/\tau_0$, $s'(\xi), s(\eta)$ – дугові абсциси точок $t', t \in L$. Невідому дійсну функцію $\Gamma_1(\xi)$ шукатимемо у класі функцій, що мають інтегровну особливість на кінцях проміжку інтегрування $\Gamma_1(\xi) = u(\xi)/\sqrt{1-\xi^2}$.

Щоб поліпшити точність числового розв'язування задачі для малих відносних радіусів закруглень вершин вирізів ($\varepsilon = \rho/a \rightarrow 0$), використовують різні нелінійні перетворення, які згущують точки квадратурних вузлів біля цих вершин. Для розгляду досить вузьких порожнин використаємо перетворення [1]

$$\xi = G(\tau) = v \operatorname{sh}(\mu\tau), \quad \mu = \operatorname{arsh}(1/v), \quad v = \operatorname{const}, \quad (19)$$

яке відображає інтервал $\tau \in [-1; 1]$ в інтервал $\xi \in [-1; 1]$ і згущує вузли квадратурних формул в околі точки $\xi = 0$. Сталу v у заміні (19) вибирали за результатами числових експериментів залежно від форми контуру L та радіуса закруглення у вершині (для фізичної щілини взято $v = \rho/a$).

Увівши позначення для нової невідомої функції

$$u_1(\tau)/\sqrt{1-\tau^2} = G'(\tau)u(\xi)/\sqrt{1-\xi^2} = \Gamma_1(\xi)G'(\tau), \quad (20)$$

рівняння (18) звели до вигляду

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 J_1(\xi, \eta) \frac{u_1(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau = \tau_1(\eta), \quad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_1(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau = 0, \quad (21)$$

де $\eta = G(\theta) = v \operatorname{sh}(\mu\theta)$, $\tau_1(\eta) = \tau_1(G(\theta))$.

Скориставшись для числового розв'язування інтегрального рівняння (21) квадратурним методом [4], прийдемо до системи N лінійних алгебричних рівнянь

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_1(\tau_k) J_1(\xi_k, \eta_m) = \tau_1(\eta_m), \quad m = \overline{1, N-1}; \quad \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_1(\tau_k) = 0 \quad (22)$$

відносно N вузлових значень $u_1(\tau_k)$ неперервної на проміжку $[-1; 1]$ невідомої функції $u_1(\tau)$ (20). Тут

$$\begin{aligned} \xi_k &= G(\tau_k); \quad \eta_m = G(\theta_m); \\ \tau_k &= \cos(\pi(2k-1)/(2N)); \quad k = \overline{1, N}; \quad \theta_m = \cos(\pi m/N); \quad m = \overline{1, N-1} \end{aligned} \quad (23)$$

нулі поліномів Чебишова першого та другого родів.

Дотичні напруження на поверхні порожнини знаходимо зі співвідношень (14)–(16). Застосувавши до інтеграла у виразі (15) відповідні квадратурні формули [4], на основі отриманих розв'язків $u_1(\tau_k)$ системи лінійних алгебричних рівнянь (22) дістанемо:

$$\begin{aligned} \tau_{\varphi s}^*(\eta_m) = & -\frac{\tau_0 u_1(\theta_m)}{|G'(\theta_m)|\sqrt{1-\theta_m^2}} \frac{\operatorname{Re}[\omega(\eta_m)]}{|\omega'(\eta_m)|} + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_1(\tau_k) P_1(\xi_k, \eta_m) + \\ & + \frac{\tau_0 \operatorname{Re}[\omega(\eta_m)] \operatorname{Im}[\omega'(\eta_m)]}{a|\omega'(\eta_m)|}, \quad m = \overline{1, N-1}, \end{aligned} \quad (24)$$

де $P_1(\xi, \eta) = P_0(a\omega(\xi), a\omega(\eta))$. З інтерполяційної формули [4] маємо:

$$u_1(\theta_m) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left\{ (-1)^{m+k} \sqrt{1-\tau_k^2} / (\tau_k - \theta_m) \right\} u_1(\tau_k).$$

Числові результати. Розраховано розподіли напружень (14) на різних поверхнях осесиметричних порожнин за кручення пружного простору на сталий кут Ω . Розглянуто три форми симетричних відносно осі Or розімкнених контурів $L = ACB$ з однаковими радіусами закруглення у вершинах C (рис. 2). Параметричне рівняння (17) для півеліптичного контуру (схема на рис. 2a) взято у вигляді

$$t = a\omega_1(\eta) = a \left\{ (1-\eta^2) + 2i\eta\rho/b \right\} / (1+\eta^2), \quad -1 \leq \eta \leq 1, \quad \rho = b^2/a. \quad (25)$$

Відповідний контур по дузі параболи (схема на рис. 2b) визначено співвідношенням

$$t = a\omega_2(\eta) = a \left\{ (1-\eta^2) + 2i\eta\rho/b \right\}, \quad -1 \leq \eta \leq 1, \quad \rho = b^2/(2a). \quad (26)$$

Розглянуто також U-подібні контури із закругленими вершинами (половинки контурів фізичних щілин – вузьких отворів, контури яких складаються з двох паралельних відрізків, гладко з'єднаних на кінцях двома півколами радіуса ρ) (схема на рис. 2c). Параметричне рівняння таких контурів подамо у вигляді

$$t = a\omega_3(\eta), \quad \omega_3(\eta) = \frac{\pi\tilde{\theta}\varepsilon}{2} + \varepsilon \begin{cases} \pi(\eta_0 + \eta)/(2\eta_0) - i, & -1 \leq \eta < -\eta_0, \\ \exp(i\pi\eta/(2\eta_0)), & -\eta_0 \leq \eta \leq \eta_0, \\ \pi(\eta_0 - \eta)/(2\eta_0) + i, & \eta_0 < \eta \leq 1, \end{cases} \quad (27)$$

де $\varepsilon = \rho/a$; $\eta_0 = 1/(1+\tilde{\theta})$ – значення параметра η , що відповідає точці переходу прямолінійної ділянки контуру в криволінійну, $\tilde{\theta}$ – відношення довжини прямолінійних ділянок контурів до довжини колових; $2l = \rho\pi(1+\tilde{\theta})$ – повна дугова довжина U-подібного контуру $L = ACB$ (рис. 1).

Обчислено відносні напруження (24) $\tau_s(\theta) = \tau_{\varphi s}^*(\eta)/\tau_0$ вздовж півеліптичного, параболічного та U-подібного контурів ($\theta = \arg(t-a+\rho)$, $t \in L$) із фіксованими відносними радіусами кривини у вершинах $C(a,0)$ $\varepsilon = \rho/a \in \{0,1; 0,01; 0,001\}$ (рис. 2). Числові результати для фізичної щілини (криві 3) суттєво відрізняються від результатів для півеліптичного та параболічного контурів (криві 1, 2). Зокрема, відносні різниці максимальних напружень у вершинах U-подібних та півеліптичних контурів перевищують 5,5% для $\varepsilon = 0,1$; 18% – для $\varepsilon = 0,01$ і 28% – для $\varepsilon = 0,001$. Зі зменшенням параметра ε розподіли напружень в околах вершин $C(a,0)$ півеліптичних та параболічних контурів збігаються (криві 1, 2, рис. 2b, c).

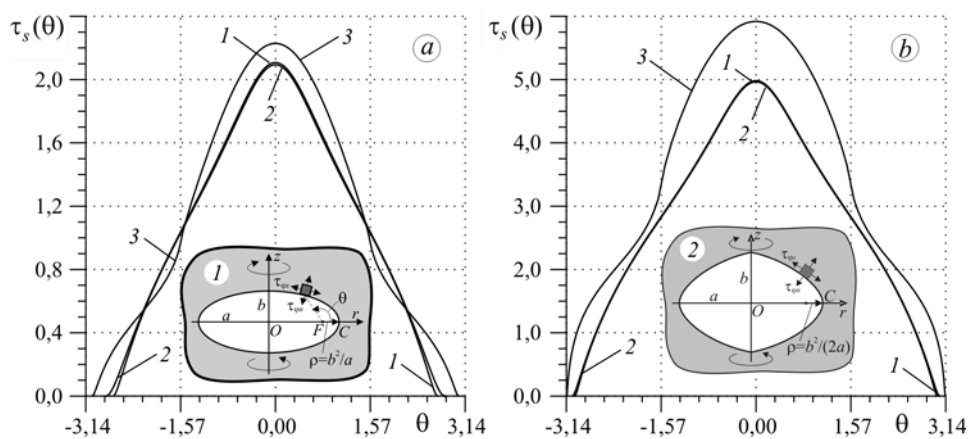


Рис. 2. Розподіл напружень $\tau_s(\theta) = \tau_{\varphi s}^* / \tau_0$ уздовж півеліптичних (криві 1), параболічних (криві 2) та U-подібних (криві 3) контурів для $\varepsilon = 0,1$ (a); $0,01$ (b); $0,001$ (c).

Fig. 2. Distribution of stress $\tau_s(\theta) = \tau_{\varphi s}^* / \tau_0$ along half-elliptic (curves 1), parabolic (curves 2), and U-shaped (curves 3) contours for $\varepsilon = 0.1$ (a); 0.01 (b); 0.001 (c).

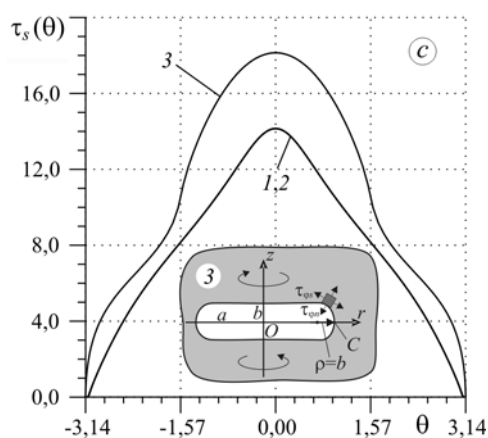
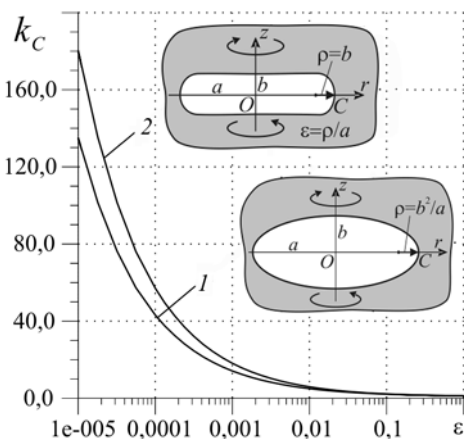


Рис. 3. Залежність коефіцієнта концентрації напружень $k_C = \tau_{\varphi s}^*(0) / \tau_0$ для півеліптичного (крива 1) та U-подібного (крива 2) контурів від параметра ε .

Fig. 3. Dependence of the stress concentration factor $k_C = \tau_{\varphi s}^*(0) / \tau_0$ for half-elliptic (curve 1) and U-shaped (curve 2) contours on parameter ε .



Вплив радіуса закруглення контуру L у вершині C на коефіцієнт концентрації напружень $k_C = \tau_{\varphi s}^*(0) / \tau_0$ є різним для півеліптичного (25) та U-подібного (27) контурів (рис. 3). Тут відносна різниця коефіцієнтів концентрації напружень (за однакових радіусів закруглення у їх вершинах) зростає зі зменшенням параметра ε і перевищує 33% для $\varepsilon \leq 0,00001$, однак монотонно спадає до нуля, коли $\varepsilon \rightarrow 1$ (форма отвору наближається до колової). Обчислені коефіцієнти концентрації напружень для еліпсоїдних порожнин за різних радіусів кривини у їх вершинах збігаються (відносна похибка не перевищує 0,12%) з відомими, знайденими, зокрема, за формулою Нойбера [5]:

$$\tau_{\max} / \tau_0 = 2(1/\varepsilon - 1)^2 / (3c/\varepsilon^2 - 5/\varepsilon + 2), \quad c = \arctg \sqrt{1/\varepsilon - 1} / \sqrt{1/\varepsilon - 1}.$$

На основі отриманих числових результатів для коефіцієнтів концентрації напружень побудовано залежності добутків $\tau_{\max} \sqrt{\varepsilon} / \tau_0$ від параметра $\varepsilon = \rho/a$ (рис. 4). Коли $\varepsilon \rightarrow 0$, ці результати узгоджуються з відомим значенням коефіцієнта інтенсивності напружень для дископодібної тріщини у пружному просторі за умов кручення [11]:

$$K_{III} = (4/3)\tau_0 \sqrt{a/\pi} \quad (F_{III} = K_{III} / (\tau_0 \sqrt{\pi a}) = 4/(3\pi) \approx 0,4244).$$

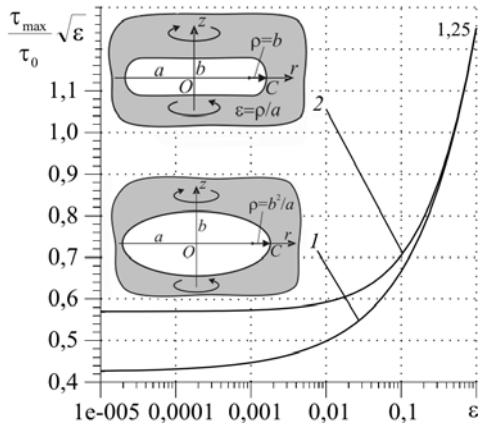


Рис. 4. Залежність добутку $\tau_{\max} \sqrt{\varepsilon} / \tau_0$ від параметра ε у вершині C півеліптичного (крива 1) та U-подібного (крива 2) контурів.

Fig. 4. Dependence of the product $\tau_{\max} \sqrt{\varepsilon} / \tau_0$ on parameter ε at the vertex C of half-elliptic (curve 1) and U-shaped (curve 2) contours.

Тут використано відомі залежності між коефіцієнтами інтенсивності напружень у вершинах гострих кутових вирізів та концентрації напружень у закруглених вершинах за антиплоскої деформації [3], які для U-подібного контуру мають вигляд $K_{III} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \tau_{\max} \sqrt{2\pi\rho} \right\} / R_{III}$, де R_{III} – коефіцієнт впливу закруглення на напруження у вершині вирізу (для U-подібного контуру $R_{III} = 1,901$ [2]).

На основі обчислених величин $\tau_{\max} \sqrt{\varepsilon} / \tau_0$ побудовано апроксимувальну формулу для визначення максимальних напружень у вершині дископодібної фізичної щілини за умов кручення пружного простору:

$$\tau_{\max} = \tau_0 \left\{ \frac{0,5705}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon + 0,4717}} \right\}, \quad \varepsilon = \rho/a. \quad (28)$$

Числові коефіцієнти тут отримано з умов $\tau_{\max} \sqrt{\varepsilon} / \tau_0 \rightarrow F_{III} R_{III} / \sqrt{2} \approx 0,5705$, коли $\varepsilon \rightarrow 0$, та $\tau_{\max} = 1,25\tau_0$ для $\varepsilon = 1$. Максимальна відносна похибка формули (28) не перевищує 0,7% для всього діапазону розглядуваних значень параметра $\varepsilon \in [0,00001; 1]$.

ВИСНОВКИ

Осесиметричну задачу кручення нескінченного пружного тіла з порожниною зведено до розв'язування сингулярного інтегрального рівняння на розімкненому контурі, вершини якого виходять на вісь кручення. Квадратурним методом одержано числові розв'язки цього рівняння і на їх основі досліджено концентрацію напружень біля криволінійних порожнин із закругленими вершинами. За цим підходом обчислені коефіцієнти концентрації напружень на поверхнях осесиметричних порожнин у всьому діапазоні зміни радіуса закруглення у вершинах порожнин і побудовано апроксимувальну формулу для визначення максимальних напружень у вершині дископодібної фізичної щілини. У граничному випадку, ко-

ли радіус закруглення у вершині дископодібної фізичної щілини прямує до нуля, отримані результати узгоджуються з відомими значеннями коефіцієнта інтенсивності напружень у вершинах дископодібної тріщини за умов кручення. Порівняння одержаних результатів для еліпсоїдних порожнин з відомими розв'язками підтвердили високу точність та ефективність цього підходу.

РЕЗЮМЕ. Методом сингулярних інтегральних уравнений решена осесимметричная задача кручения упругого пространства с гладкой полостью. Получены распределения напряжений и их максимальные значения на краях полостей различных форм. Вычислены коэффициенты концентрации напряжений на поверхностях осесимметричных полостей во всем диапазоне изменения радиуса закругления их вершин в условиях кручения упругого тела. Числовые результаты получены для полостей различной конфигурации.

SUMMARY. Solution of an axisymmetric torsion problem for an elastic space with a smooth cavity is obtained by the singular integral equation method. The distributions of stresses and their maximum values at the edges of the cavities of various shapes are determined. The stress concentration factors on the surface of axisymmetric cavities in the whole range of the curvature radius of vertices are calculated for elastic body torsion. Numerical results are obtained for cavities of different configurations.

1. *Саврук М. П., Казберук А.* Единый подход к решению задач о концентрации напряжений около острых и закругленных угловых вырезов // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 2. – С. 70–87.
2. *Саврук М. П., Казберук А., Тарасюк Г.* Розподіл напружень на контурі кутового закругленого вирізу за антиплоскої деформації // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2011. – **47**, № 6. – С. 7–14.
(*Savruk M. P., Kazberuk A., and Tarasyuk G.* Distribution of stresses over the contour of a rounded V-shaped notch under antiplane deformation // Materials Science. – 2011. – **47**, № 6. – P. 717–725.)
3. *Саврук М. П., Казберук А., Тарасюк Г.* Концентрація напружень біля отворів у пружній площині за антиплоскої деформації // Там же. – 2012. – **48**, № 4. – С. 5–13.
4. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
5. *Neuber H.* Kerbspannungslehre: Theorie der Spannungskonzentration Genaue Berechnung der Festigkeit. – Berlin: Springer-Verlag, 1985. – 326 s.
6. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел. – М.: Физматлит, 1963. – 688 с.
7. *Кравець В. С., Саврук М. П.* Напружений стан простору з осесимметричною тріщиною по поверхні обергання // 10-ий Міжнар. симп. укр. інженерів-механіків у Львові. – Львів: КІНПАТРИ ЛТД, 2011. – С. 102–104.
8. *Саврук М. П.* Інтегральні рівняння осесимметричних задач кручення пружних тіл з тріщинами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1989. – **25**, № 6. – С. 37–44.
(*Savruk M. P.* Integral equations for axisymmetric torsion in an elastic body containing cracks // Materials Science. – 1989. – **25**, № 6. – P. 584–592.)
9. *Саврук М. П., Байдак С. Д., Шабайкович В. О.* Кручення пружного простору з тріщиною по поверхні обергання // Там же. – 1993. – **29**, № 6. – С. 87–93.
(*Savruk M. P., Baidak S. D., and Shabaikovich V. O.*, Torsion of an elastic space with a crack on the surface of revolution // Materials Science. – 1993. – **29**, № 6. – P. 649–656.)
10. *Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
11. *Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: в 2-х т. / Под ред. Ю. Мураками.* – М.: Мир, 1990. – Т. 2. – 1016 с.

Одержано 26.11.2012