

УДК 539.375

ВПЛИВ СТИСКАЛЬНИХ ЗАЛИШКОВИХ НАПРУЖЕНЬ НА ПОШИРЕННЯ ЗСУВНИХ ПОВЕРХНЕВИХ ТРІЩИН У ЗАЛІЗНИЧНИХ РЕЙКАХ

О. П. ДАЦИШИН, Г. П. МАРЧЕНКО, А. Ю. ГЛАЗОВ, А. Б. ЛЕВУС

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

Досліджено вплив поздовжніх стискальних залишкових напружень на пружний стан головки залізничної рейки, пошкодженої поверхневою тріщиною, в умовах контакту кочення. Для цього розв'язано двовимірну контактну задачу теорії пружності для півплощини з крайовою тріщиною, береги якої контактують з тертям під дією рухомого герцівського навантаження на краю півплощини і рівномірного одновісного стиску на нескінченності. Обчислено коефіцієнти інтенсивності напружень і побудовано карти контактування берегів тріщини для різних значень експлуатаційних параметрів, характерних для системи колесо–рейка. Виявлено найнебезпечніші орієнтації тріщини, схильної до розвитку у зоні стиску за механізмом поперечного зсуву.

Ключові слова: *тріщина, контактна задача, тертя, герцівське навантаження, залишкові напруження, сингулярні інтегральні рівняння, коефіцієнти інтенсивності напружень.*

Під час експлуатації технічної пари колесо–рейка часто руйнуються поверхні кочення залізничних рейок. При цьому суттєвий вплив на цей процес мають поздовжні залишкові напруження (ЗН), які виникають у рейках. За експлуатації рейки у приповерхневому шарі поверхні кочення з'являються локальні пластичні деформації, що призводить до механічного зміцнення в цій ділянці головки рейки. Внаслідок цього ЗН, які спочатку – після виготовлення рейки – здебільшого були розтягальними, стають стискальними і біля самої поверхні досягають максимального значення [1, 2].

На сьогодні на залізницях Європи у близько 30% випадків причиною заміни рейок є тріщиноподібні дефекти в головці [3]. Тому для рейки в умовах контактної втоми кочення і за наявності ЗН особливо небезпечними є поверхневі тріщини, які поширюються в її головці. Однак сукупний вплив контактних і ЗН на напружений стан в околі таких дефектів вивчено недостатньо [4–8]. При цьому залізничну рейку моделювали півплощиною, дію колеса на рейку – герцівським контактним навантаженням, а вплив ЗН – рівномірним розтягом/стиском на нескінченності [4, 5], масовими силами [6, 7] або зоною пластичності [8].

Раніше аналогічні дослідження виконали також автори цієї роботи [9–12]. Однак випадок контакту з тертям берегів тріщини, яка поширюється в умовах стиску, не розглядали. Нижче, продовжуючи ці дослідження, розв'язано контактну задачу теорії пружності для півплощини з крайовою тріщиною з врахуванням тертя між її берегами під дією рухомого герцівського навантаження і стискальних ЗН. Виявлено орієнтації тріщини, найсприятливіші для її розвитку за механізмом поперечного зсуву.

Формулювання задачі та її сингулярні інтегральні рівняння. Замість пошкодженої поверхневим тріщиноподібним дефектом залізничної рейки у двови-

мірному формулюванні розглянемо пружну півплощину з крайовою прямолінійною довільно орієнтованою тріщиною (рис. 1). Півплощину віднесемо до системи координат xOy , вісь Ox якої збігається з краєм півплощини, а початок O – з гирлом тріщини. Саму тріщину віднесемо до локальної системи координат $x_1O_1y_1$ з початком у гирлі. Контактний тиск колеса на рейку моделювали однонаправленим повторним поступальним переміщенням уздовж краю півплощини (справа наліво) герцівських контактних зусиль з дотичною складовою

$$s(x) = -(1 + if_s)p(x) = -p_0(1 + if_s)\sqrt{a^2 - (x - x_0)^2} / a, \quad |x - x_0| \leq a, \quad (1)$$

де f_s – коефіцієнт тертя проковзування між тілами кочення; p_0 – максимальне значення контактної тиску; a – півдовжина ділянки контакту. Поздовжні ЗН моделювали одновісними рівномірними стискальними зусиллями p_r на нескінченності. Розташування ділянки контакту відносно гирла тріщини визначає параметр $\lambda = x_0/a$, відносну довжину тріщини – параметр $\varepsilon = l/a$, а її орієнтацію – кут β .

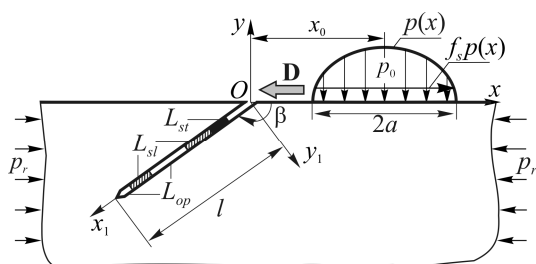


Рис. 1. Схема головки рейки з крайовою тріщиною під дією модельного контактної навантаження та стискальних залишкових напружень; **D** – напрям руху контактної навантаження.

Fig. 1. Scheme of a rail head with an edge crack under action of model contact load and compressing residual stresses; **D** – direction of contact load motion.

Крайові умови задачі на краю півплощини і на нескінченності матимуть відповідно вигляд

$$\sigma_y(x, 0) - i\tau_{xy}(x, 0) = \begin{cases} s(x), & |x - x_0| \leq a, \\ 0, & |x - x_0| > a, \end{cases} \quad (2)$$

$$\sigma_x^\infty = -p_r. \quad (3)$$

Береги тріщини за певних розташувань герцівського навантаження (деяких λ) і під дією ЗН можуть контактувати. Нижче розглянуто загальний випадок їх контакту, а саме: проковзування з тертям та можливістю защемлення. Тоді крайові умови задачі на берегах тріщини будуть такими:

$$N^\pm(x_1) + iT^\pm(x_1) = 0, \quad x_1 \in L_{op}; \quad (4)$$

$$v^+(x_1) - v^-(x_1) = 0, \quad x_1 \in L_{sl}; \quad (5)$$

$$T^\pm(x_1) = f_c \text{sign}[\tilde{T}^\pm(x_1)] |N^\pm(x_1)|, \quad x_1 \in L_{sl}; \quad (6)$$

$$u^+(x_1) - u^-(x_1) + i[v^+(x_1) - v^-(x_1)] = 0, \quad x_1 \in L_{st}; \quad (7)$$

$$N^+(x_1) - N^-(x_1) + i[T^+(x_1) - T^-(x_1)] = 0, \quad x_1 \in L_{st}. \quad (8)$$

При цьому на ділянках защемлення берегів тріщини виконується умова

$$|T^\pm(x_1)| < f_c |N^\pm(x_1)|, \quad x_1 \in L_{st}. \quad (9)$$

Тут контур прямолінійної тріщини L складається із сукупності ділянок L_{op} , на яких тріщина відкрита, ділянок L_{sl} , на яких береги тріщини проковзують, та ділянок L_{st} , де вони защемлені. Через f_c позначено коефіцієнт тертя між берегами

тріщини, а через N і T , v і u – відповідно нормальні і дотичні складові зусиль на берегах тріщини та переміщень її берегів у локальній системі координат $x_1 O_1 y_1$. Величина $\text{sign}[\tilde{T}(x_1)]$ необхідна для визначення знаку дотичних контактних напружень, про що буде сказано нижче. Верхні індекси “+” або “-” означають граничні значення величин за наближення відповідно зверху або знизу до контуру тріщини.

Введемо в розгляд похідну від розриву невідомого вектора переміщень уздовж контуру тріщини L у вигляді суми двох функцій:

$$g'(t) = g_1'(t) + g_2'(t), \quad t \in L, \quad (10)$$

де

$$g_1(t) = \frac{2G}{1+\kappa} [v^+(t) - v^-(t)]; \quad (11)$$

$$g_2(t) = -\frac{2iG}{1+\kappa} [u^+(t) - u^-(t)]. \quad (12)$$

У формулах (11), (12) G – модуль зсуву, κ – стала Мусхелішвілі.

Задовольнивши з допомогою інтегральних зображень [13–15] комплексних потенціалів Колосова–Мусхелішвілі, виражених через функції $g_1'(t)$ і $g_2'(t)$, крайові умови задачі (4)–(8), отримаємо систему сингулярних інтегральних рівнянь (СІР)

$$\text{Re } D(\tau) = \pi \text{Re } P(\tau), \quad \tau \in L_{op}; \quad (13)$$

$$\text{Im } D(\tau) + n \text{Re } D(\tau) = \pi [\text{Im } P(\tau) + n \text{Re } P(\tau)], \quad \tau \in L_{op} \cup L_{sl}. \quad (14)$$

Тут функція

$$D(\tau) = I\{L_{op}\} g_1'(t) + I\{L_{op} \cup L_{sl}\} g_2'(t), \quad (15)$$

а оператор $I\{L\}$ визначає формула

$$I\{L\} \varphi(t) = \int_L [R(t, \tau) \varphi(\tau) + S(t, \tau) \overline{\varphi(\tau)}] dt. \quad (16)$$

Коефіцієнт n у формулі (14) набуває значень

$$n = \begin{cases} 0, & \tau \in L_{op}, \\ -f_c \text{sign}[\text{Im}(P(\tau))], & \tau \in L_{sl}. \end{cases} \quad (17)$$

Функції $R(t, \tau)$, $S(t, \tau)$ – відомі ядра СІР для півплощини з крайовою відкритою тріщиною [13]. Праву частину системи рівнянь (13), (14) визначають зовнішні навантаження (2), (3) на півплощину через функцію [9, 15]

$$P(\tau) = p_0 \left\{ \text{Re} [(1 + if_s) c(\tau)] - \left[(1 - if_s) \frac{\text{Im } b(\tau)}{a(\tau)} - if_s \right] \overline{c(\tau)} e^{2i\beta} \right\} + p_r (1 - e^{2i\beta}) / 2, \quad (18)$$

де $a(\tau) = \sqrt{1 - b^2(\tau)}$; $b(\tau) = e^{-i\beta} \tau / a - \lambda$; $c(\tau) = a(\tau) - ib(\tau)$.

Систему СІР (13), (14) розв'язуємо числовим методом механічних квадратур і на основі цього розв'язку за відомою формулою [13] знаходимо коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН).

Слід зауважити, що межі ділянок контакту берегів тріщини наперед невідомі. Їх визначаємо одночасно з розв'язуванням інтегральних рівнянь задачі з додаткових умов рівності нулю нормальних контактних напружень у цих межових точках, а зони защемлення і проковзування самих ділянок контакту встановлюємо на основі додаткової умови (9). При цьому розв'язок контактної задачі будуємо методом послідовних наближень. У формулі (6) величина $\tilde{T}(x_1) = T_k(x_1)$ заді-

яна в ітераційному процесі, коли $k = 0, 1, 2, \dots$. За нульове наближення $T_0(x_1)$ ($k = 0$) вибрали дотичні напруження в суцільній півплощині на лінії тріщини під дією зовнішнього навантаження, а наступні наближення $T_k(x_1)$ ($k = 1, 2, \dots$) відповідають значенням дотичних контактних напружень на берегах тріщини.

Числові результати та їх обговорення. Виконано числове дослідження КІН зсувного типу K_{II} та їх розмаху $\Delta K_{II} = \max K_{II}(\lambda) - \min K_{II}(\lambda)$ за цикл кочення (під час одного проходження контактного навантаження вздовж краю півплощини), а також побудовано карти контактування берегів тріщини впродовж циклу. Головну увагу приділено вивченню сукупного впливу герцівського навантаження та ЗН на параметр ΔK_{II} , який контролює ріст тріщини в зоні контакту (стиску) за механізмом поперечного зсуву. Досліджено залежність цього параметра від орієнтації тріщини.

Розрахунки здійснювали для крайової довільно орієнтованої тріщини з відносною довжиною $\epsilon = l/a = 0,3$, кут орієнтації β якої змінювали від 20° до 165° . Експлуатаційні параметри для системи колесо–рейка обрали такі: максимальний герцівський тиск $p_0 = 1100$ МПа [1, 16], довжина ділянки контакту $2a = 14$ mm, стискальні ЗН $p_r = 175$ МПа [2], коефіцієнт тертя проковзування в контактні кочення $f_s = 0,1$ та коефіцієнт тертя між берегами тріщини в рейці $f_c = 0,1; 0,3$ і $0,5$.

Досліджували випадок, коли контактне навантаження знаходиться у безпосередній близькості до гирла тріщини ($-2,0 \leq \lambda \leq 1,0$). Тоді прийняли, що під дією герцівського навантаження і стискальних ЗН береги тріщини будуть контактувати по всій її довжині. У такому разі для знаходження зон проковзування і защемлення берегів тріщини з контактуючими берегами застосували такий алгоритм. Спочатку, припускаючи, що береги тріщини контактують без защемлення, розв'язуємо СІР (14), в якому $\tau \in L$, тобто τ змінюється по усьому контуру тріщини. На основі розв'язку такої задачі знаходимо контактні напруження на контурі L і визначаємо ділянки, на яких виконується додаткова умова (9). Крайні точки цих ділянок визначають у першому наближенні межі зон защемлення берегів тріщини. І якщо вони існують, враховуємо це для побудови другого наближення. Таким чином, приходимо до ітераційного процесу, який обриваємо за досягнення потрібної точності.

На практиці поверхнева тріщина в головці рейки здебільшого розвивається під кутом $10^\circ \dots 30^\circ$ у напрямку, протилежному до дії дотичних контактних зусиль [1, 16, 17]. Щоб проілюструвати, що відбувається з положою тріщиною в зоні стиску за сукупної дії герцівського навантаження та ЗН, для прикладу вибрали середнє значення кута 20° , яке відповідає орієнтації $\beta = 180^\circ - 20^\circ = 160^\circ$. І для такої тріщини побудували карти контактування її берегів та обчислили КІН K_{II} під час переміщення контактного навантаження в околі її гирла (рис. 2, 3).

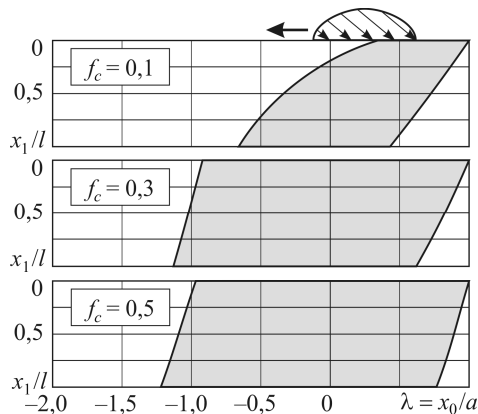


Рис. 2. Карти контактування берегів тріщини під час переміщення герцівського навантаження за наявності залишкових напружень; $f_s = 0,1$; $\beta = 160^\circ$; $\epsilon = l/a = 0,3$; \square – проковзування берегів тріщини з тертям; \blacksquare – защемлення.

Fig. 2. Maps of crack faces contact during Hertzian load movement at given residual stresses; $f_s = 0,1$; $\beta = 160^\circ$; $\epsilon = l/a = 0,3$; \square – slip with friction of crack faces; \blacksquare – stick.

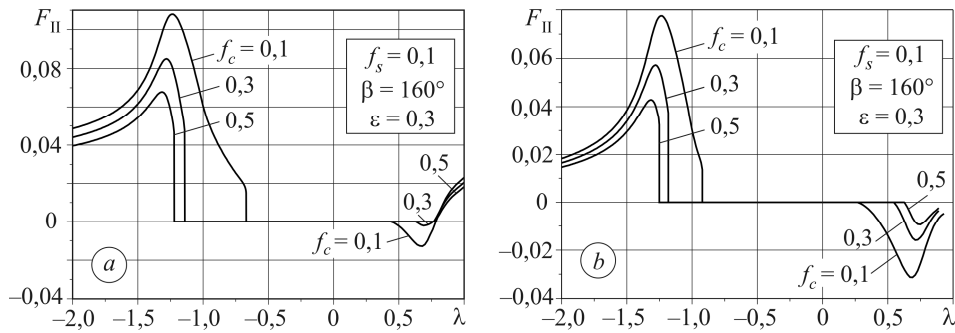


Рис. 3. Залежність нормованих КІН F_{II} від розташування герцівського навантаження за наявності (а) та відсутності (б) залишкових напружень для різних коефіцієнтів тертя f_c між берегами тріщини.

Fig. 3. Dependence of normalized SIF F_{II} on Hertzian load position at the presence of residual stresses (a) and without them (b) for different coefficient of friction f_c between crack faces.

Розрахунки підтвердили появу зон проковзування і защемлення за вибраного напрямку переміщення герцівського навантаження справа наліво (рис. 2). Що більше тертя між берегами тріщини, то довше триває защемлення її берегів. При цьому повне защемлення берегів відбувається скоріше. Починається защемлення від гирла тріщини і поступово поширюється на всю її довжину. Коли ж герцівське навантаження минає гирло, зона защемлення поступово зменшується знов-таки від гирла, а потім взагалі зникає.

З урахуванням знайдених ділянок контакту берегів тріщини отримали числові значення нормованих КІН $F_{II} = K_{II} / (p_0 \sqrt{\pi a})$ у її вершині (рис. 3а). Вони змінюються з переміщенням герцівського навантаження, набуваючи для відповідних його розташувань (для значень λ) мінімальні (від'ємні) і максимальні (додатні) значення, причому зі збільшенням коефіцієнта тертя f_c між берегами тріщини як максимальні, так і мінімальні за модулем значення КІН спадають. Горизонтальні відрізки кривих, що відповідають защемленню біля вершини тріщини, очевидно тим довші, що більше тертя між її берегами.

Для порівняння, щоб виявити вплив ЗН, наведено також графік для КІН, коли ці напруження відсутні (рис. 3б). Бачимо, що ЗН призводять до збільшення максимальних КІН F_{II} і до зменшення за модулем мінімальних.

Аналогічні розрахунки виконали і для інших кутів орієнтації тріщини β . На базі отриманих результатів побудовані графіки залежності нормованого розмаху КІН $\Delta F_{II} = \Delta K_{II} / (p_0 \sqrt{\pi a})$ від кута β для різних коефіцієнтів тертя f_c між берегами тріщини. Для порівняння такі ж самі обчислення зроблені за дії лише герцівського навантаження. Як бачимо (рис. 4), залежно від орієнтації тріщини є два локальні максимуми розмаху КІН K_{II} : один – для $\beta = \beta_1^*$ в діапазоні гострих кутів орієнтації тріщини, а другий – для $\beta = \beta_2^*$ в діапазоні тупих кутів (див. таблицю, де H – герцівське навантаження, а $H+R$ – сукупна дія герцівського навантаження і залишкових напружень).

Виявили, що коефіцієнт тертя f_c суттєво впливає на розмах ΔK_{II} . Збільшення тертя між берегами тріщини призводить до зменшення розмаху ΔK_{II} і особливо його максимальних значень $\Delta K_{II}(\beta_1^*)$ та $\Delta K_{II}(\beta_2^*)$ як за сукупної дії герцівського навантаження і ЗН, так і за дії лише герцівського навантаження. Суттєво змінюється і гострий кут β_1^* , за якого реалізується максимум $\Delta K_{II}(\beta_1^*)$, а саме: зі

збільшенням f_c цей кут стає значно пологішим. Так, за наявності ЗН для $f_c = 0,1$ кут $\beta_1^* = 76^\circ$, а для $f_c = 0,5$ кут $\beta_1^* = 43^\circ$ (див. таблицю), тобто він зменшився майже вдвічі. Тупий кут β_2^* є стабільнішим. Він практично не змінюється ні зі зміною f_c , ні з появою ЗН. Крім цього, для тупих кутів орієнтації тріщини за наявності ЗН максимуми $\Delta K_{II}(\beta_1^*)$ та $\Delta K_{II}(\beta_2^*)$ домінують незалежно від f_c , а для гострих кутів цю закономірність спостерігаємо лише за великого $f_c = 0,5$.

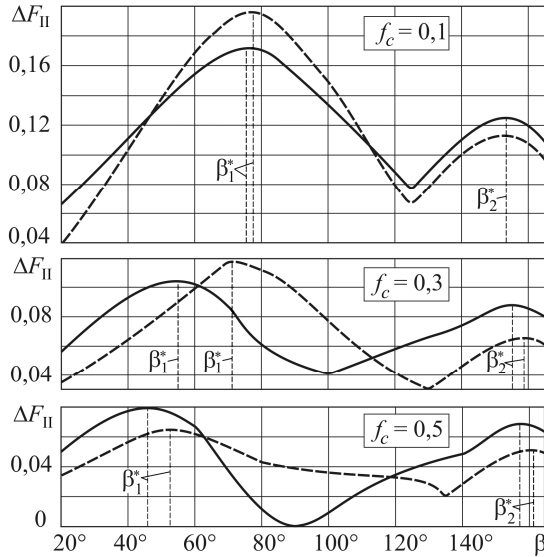


Рис. 4. Залежність нормованого розмаху ΔF_{II} від кута орієнтації тріщини β для різних коефіцієнтів тертя f_c між берегами тріщини; $f_s = 0,1$; $\varepsilon = l/a = 0,3$; суцільна крива – сукупна дія герцівського навантаження і залишкових напружень, штрихова – дія лише герцівського навантаження.

Fig. 4. Dependence of normalized ΔF_{II} range on crack orientation angle β for different coefficients of friction f_c between crack faces; $f_s = 0.1$; $\varepsilon = l/a = 0.3$; solid curve – joint action of Hertzian load and residual stresses, dashed one – the action of Hertzian load only.

Максимальні значення розмахів ΔK_{II} для гострих β_1^* і тупих β_2^* кутів орієнтації тріщини завдовжки $l = 2,1$ mm; $p_0 = 1100$ МПа, $p_r = 175$ МПа

f_c	0,1		0,3		0,5	
Зовнішнє навантаження	H	$H+R$	H	$H+R$	H	$H+R$
β_1^*	79°	76°	74°	56°	52°	43°
$\Delta K_{II}(\beta_1^*)$, МПа \sqrt{m}	32,14	28,06	19,41	16,96	10,77	12,89
β_2^*	153°	153°	158°	154°	161°	157°
$\Delta K_{II}(\beta_2^*)$, МПа \sqrt{m}	18,76	20,55	10,77	14,35	8,32	11,26

Слід зауважити, що зі збільшенням коефіцієнта f_c помітно зменшується різниця між значеннями $\Delta K_{II}(\beta_1^*)$ та $\Delta K_{II}(\beta_2^*)$ як за відсутності, так і за наявності ЗН. За великого f_c обидва кути стають однаково сприятливими для росту зсувних тріщин у цих напрямках. І ця обставина, припускаємо, створює передумови для формування пошкоджень типу “темна пляма” [18].

Отримані числові значення розмахів ΔK_{II} (див. таблицю), що відповідають найсприятливішим для поширення тріщини напрямкам (кути β_1^* і β_2^*), порівнювали з пороговим $\Delta K_{II,th} = 13,01$ МПа \sqrt{m} [19] для рейкової сталі RSB12. Як і очі-

кували, посилення тертя між берегами тріщини гальмує її ріст за зсувним механізмом, а для великого коефіцієнта тертя $f_c = 0,5$ поширення тріщини в обох напрямках за заданих експлуатаційних умов взагалі неможливе, причому як за наявності, так і за відсутності ЗН.

ВИСНОВКИ

Виявлено два напрями, найсприятливіші для поширення поверхневих зсувних тріщин у головці залізничної рейки за однонапрявленого кочення: один напрям – у бік дії дотичних контактних зусиль (кут β_1^* ; рис. 4), інший – у протилежний бік (кут β_2^* ; рис. 4). Кут β_2^* мало змінюється під впливом стискальних залишкових напружень і тертя між берегами тріщини, а кут β_1^* – суттєво. При цьому зі збільшенням коефіцієнта тертя f_c між берегами тріщини кут β_1^* змінюється від майже прямого до пологого. За великих f_c під впливом стискальних залишкових напружень цей кут стає ще пологішим.

Показано, що тертя між берегами тріщини має значний вплив на максимальне значення розмаху ΔK_{II} , який відповідає за поширення зсувних тріщин. Збільшення коефіцієнта тертя f_c призводить до суттєвого зниження максимуму ΔK_{II} , в результаті чого помітно зменшується різниця між значеннями $\Delta K_{II}(\beta_1^*)$ та $\Delta K_{II}(\beta_2^*)$.

РЕЗЮМЕ. Исследовано влияние продольных сжимающих остаточных напряжений на упругое состояние головки железнодорожного рельса, поврежденного поверхностной трещиной, в условиях контакта качения. Для этого решена двумерная контактная задача теории упругости для полуплоскости с краевой трещиной, берега которой контактируют с трением под действием движущейся вдоль края полуплоскости герцевской нагрузки и равномерного одноосного сжатия на бесконечности. Вычислены коэффициенты интенсивности напряжений и построены карты контактирования берегов трещины для разных значений эксплуатационных параметров, характерных для системы колесо–рельс. Выявлены наиболее опасные ориентации трещины, склонной к развитию в зоне сжатия по механизму поперечного сдвига.

SUMMARY. The effect of longitudinal residual stresses on the stress state of railway rail head damaged with a surface crack has been investigated under rolling contact. For this purpose the two-dimensional contact problem for a half-plane with an edge crack whose faces contact with friction under the action of moving Hertzian load and uniform uniaxial compression at infinity has been solved. Stress intensity factors have been calculated and the maps of engagement of crack faces for different values of operational factors typical for the rail–wheel system have been constructed. The most dangerous orientations of cracks susceptible to growth by the transverse shear mechanism in pressure zone have been brought out.

1. *Introduction to the damage tolerance behaviour of railway rails – a review* / U. Zerbst, R. Lunden, K.-O. Edel, and R. A. Smith // *Eng. Fract. Mech.* – 2009. – **76**. – P. 2563–2601.
2. *Budnitzki G. and Edel K.-O.* Railway rails can fracture under service conditions // *Int. Polym. Proc.* – 2005. – № 11–12. – P. 674–681.
3. *Heinsch M.* Improving rail durability and life // *Int. Railway J.* – 2004. – № 2. – P. 13–15.
4. *Кудун И. И.* Контактная задача теории упругости для предварительно напряженных тел с трещинами // *Журн. прикл. мат. и техн. физики.* – 1987. – № 2. – С. 144–152.
5. *Noda N.-A., Yagishita M., and Kihara T.* Effect of crack shape, inclination angle, and friction coefficient in crack surface contact problems // *Int. J. Fract.* – 2000. – **105**, № 13. – P. 367–389.
6. *Kapoor A. and Fletcher D. I.* Post Hatfield rolling contact fatigue. The effect of residual stress on contact stress driven crack growth in rail. P. 1: The model – Technical Report WR061106-2. – Newcastle University, November 2006. – 30 p.
7. *Post Hatfield rolling contact fatigue. The effect of residual stress on contact stress driven crack growth in rail. Comparison of the Hatfield and alternative UK rails using models to*

- assess the effect of residual stress on crack growth from rolling contact fatigue / D. I. Fletcher, A. Kapoor, F. J. Franklin et al. – NewRail Report No. WR061106-6. – Newcastle University, November 2006. – 48 p.
8. *2D fatigue crack propagation in rails taking into account actual plastic stresses* / B. Trollé, M.-C. Baietto, A. Gravouil et al. // *Eng. Fract. Mech.* – 2014. – **123**. – P. 163–181.
 9. *Марченко Г. П.* Вплив залишкових напружень на коефіцієнти інтенсивності напружень для поверхневої тріщини в головці рейки // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2010. – № 1. – С. 57–62.
(*Marchenko H. P.* Influence of residual stress on the stress intensity factors for a surface crack in the rail head // *Materials Science*. – 2010. – **46**, № 1. – С. 64–69.)
 10. *Дацишин О. П., Марченко Г. П.* Про вплив залишкових напружень на напружений стан біля поверхневої тріщини в головці рейки // *Машинознавство*. – 2011 – № 3–4. – С. 16–20.
 11. *Дацишин О. П., Марченко Г. П.* Оцінювання впливу залишкових напружень на поверхневе руйнування залізничних рейок // *Залізничний транспорт України*. – 2012. – № 6. – С. 38–41.
 12. *Дацишин О., Марченко Г.* Про зсувні поверхневі тріщини в залізничних рейках // *Зб. праць 5-ої Міжнар. конф. “Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій”*. – Львів, 2014. – С. 379–384.
 13. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
 14. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
 15. *Вплив форми модельного контактного навантаження на коефіцієнти інтенсивності напружень для крайової тріщини* / О. П. Дацишин, Р. Є. Пришляк, С. В. Приходська, Р. Б. Щур, А. Б. Терлецький // *Проблеми трибології*. – 1998. – № 3. – С. 3–16.
 16. *Ringsberg J. W. and Bergkvist A.* On propagation of shot rolling fatigue cracks // *Fatig. Fract. Engng. Mater. Struct.* – 2003. – **26**, № 10 – P. 969–983.
 17. *Bower A. F.* The influence of crack face friction and trapped fluid on surface initiated rolling contact fatigue cracks // *Trans. ASME: J. Tribol.* – 1988. – **110**, № 4. – P. 704–711.
 18. *A possible mechanism for rail dark spot defects* / M. Kaneta, K. Matsuda, K. Murakami, and H. Nishikawa // *Trans. ASME*. – 1998. – **120**. – P. 304–309.
 19. *Bold P. E., Brown M. W., and Allen R. J.* Shear mode crack growth and rolling contact fatigue // *Wear*. – 1991. – **144**, № 2. – P. 307–317.

Одержано 26.12.2014