УДК 539.3

ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДВОВИМІРНИХ ЗАДАЧ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТРИШАРОВОЇ КІЛЬЦЕВОЇ ОБЛАСТІ З ТРІЩИНАМИ

В. М. ЗЕЛЕНЯК

Національний університет "Львівська політехніка"

Двовимірні задачі стаціонарної теплопровідності і термопружності для тришарової кільцевої області з тріщинами зведено до сингулярних інтегральних рівнянь. Побудовано системи інтегральних рівнянь першого та другого роду на замкнених (контури поділу шарів та зовнішня межа) і розімкнених (тріщини) контурах, коли контур внутрішньої межі області є коло.

Ключові слова: *тріщина, температурне поле, метод сингулярних інтегральних рівнянь, коефіцієнт інтенсивності напружень, кусково-однорідні тіла.*

Двовимірні задачі термопружності для кусково-однорідних тіл з тріщинами методом сингулярних інтегральних рівнянь розглядали раніше. Зокрема, досліджували термопружний стан у скінченній [1], напівскінченній [2–4] і нескінченній [5–7] плоскій області з чужорідними однокомпонентними включеннями і криволінійними тріщинами, у пластині з круговим двокомпонентним складеним включенням і тріщиною [8], у двошаровому кільці з тріщинами [9]. Розглянута нижче теоретична модель для тришарового кільця з тріщинами має важливе практичне значення для розрахунку термопружного стану в композитних матеріалах за врахування різних концентраторів напружень у них. З таких матеріалів часто виготовляють елементи конструкцій, які застосовують у будівництві, машинобудуванні та інших галузях виробництва.

Інтегральні рівняння задачі теплопровідності. Розглянемо скінченну тришарову кільцеву область S, в якій контур внутрішньої межі L_0 – коло радіуса R_0; контур зовнішньої L_3 – довільний гладкий криволінійний; L_1, L_2 – гладкі замкнені контури поділу різнорідних шарів. Область S послаблена системою $N-3$ криволінійних тріщин-розрізів $L_n (n = \overline{4, N})$. Віднесемо кожний контур $L_n (n = \overline{0, N})$ до локальних систем координат $x_n O_n y_n$, вісь $O_n x_n$ яких утворює кут α_n з віссю Ox, а точки O_n визначають в основній декартовій системі координат xOy комплексні координати $z_n^0 = x_n^0 + i y_n^0$, причому системи $x_n O_n y_n$, ($n = \overline{0, 3}$) збігаються з основною xOy з початком у центрі кола L_0 (див. рисунок). Додатним вважаємо напрямок обходу замкнених контурів проти годинникової стрілки. Зв'язок між координатами точок області S у локальній і основній системах координат виражають співвідношення

$$z = z_n e^{i\alpha_n} + z_n^0, \quad z_n = x_n + i y_n, \quad z = x + i y .$$

Вважаємо, що на замкнених контурах $L_n (n = 1, 2)$ задані умови ідеального теплового контакту (рівність температур і теплових потоків)

Контактна особа: В. М. ЗЕЛЕНЯК, e-mail: v.zelenyak@yandex.ua

$$\lambda_0 \frac{\partial T^+}{\partial n} = \lambda_1 \frac{\partial T^-}{\partial n}, \quad \lambda_1 \frac{\partial T^+}{\partial n} = \lambda_2 \frac{\partial T^-}{\partial n}, \; T^+ = T^-, \quad t_n \in L_n, \; n = \overline{1,2}, \tag{1}$$

на берегах тріщин $L_n (n = \overline{4, N})$ і на контурах L_0 та L_3 – теплові потоки

$$\lambda_n^* \frac{\partial T^\pm}{\partial n} = \omega_n(t_n) \pm \mu_n(t_n), \qquad t_n \in L_n, \; n = \overline{4, N}, \tag{2}$$

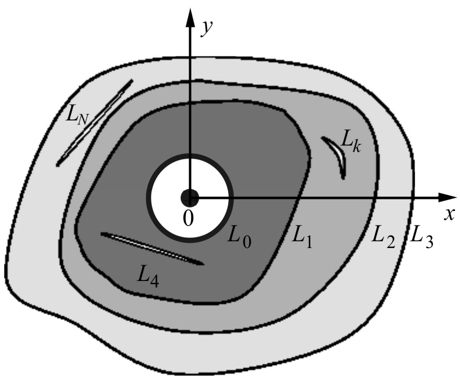
$$\lambda_3 \frac{\partial T}{\partial n} = \omega_3(t_3), \quad t_3 \in L_3, \quad \lambda_0 \frac{\partial T}{\partial n} = \omega_0(t_0), t_0 \in L_0, \tag{3}$$

де n – зовнішня нормаль до замкненого контуру $L_n (n = \overline{0,3})$ або до лівого берега розрізу $L_n (n = \overline{4, N})$; λ_n – коефіцієнт теплопровідності шарів S_n $(n = 0, 1, 2)$; t_n – комплексні координати точок на контурах L_n у локальних системах координат; $T(x, y)$ – температура; $\lambda_n^* = \lambda_n$, якщо розріз L_k знаходиться в шарі S_n. При цьому припускають, що сумарний тепловий потік, який виходить через контур $L = UL_n (n = 0, \overline{3, N})$, дорівнює нулю:

$$2 \cdot \sum_{n=4}^{N} \int_{L_n} \mu_n(t_n) ds_n + \int_{L_o} \omega_o(t_o) ds_o + \int_{L_3} \omega_3(t_3) ds_3 = 0. \tag{4}$$

Подамо загальну температуру $T(x, y)$ в складеній кільцевій області з розрізами у вигляді $T(x, y) = T_0(x, y) + T^*(x, y)$, де $T_0(x, y)$ – температура в однорідній нескінченній площині з коловим отвором L_0, на контурі якого задано тепловий потік $\omega_0(t_0)$; $T^*(x, y)$ – збурене температурне поле, викликане різнорідними шарами і тріщинами.

Температуру $T(x, y)$ шукаємо у вигляді $T(x, y) = \text{Re}\, f(z)$, де $f(z)$ – аналітична функція комплексної змінної $z = x + iy$. Скориставшись комплексним потенціалом температури $F(z) = f'(z)$, побудованим раніше для скінченної однорідної області з отворами і тріщинами [10], подамо його для кусково-однорідної кільцевої області з тріщинами без невідомої функції на внутрішньому коловому контурі L_0:



Геометрія тришарової кільцевої області з тріщинами.

Geometry of a three-layer ring area with cracks.

$$F(z) = F_0(z) + F_1(z) + F_2(z), \tag{5}$$

де $F_0(z) = -\dfrac{Q}{2\pi\lambda z} - \dfrac{R_0}{\pi i} \displaystyle\int_{L_0} \frac{\omega_0(t_0) dt_0}{t_0(t_0 - z)}$ – функція, яка визначає температуру $T_0(x, y)$; Q – кількість тепла, що виходить через контур L_0. Якщо тіло скінченне, то за відсутності в ньому джерел тепла слід покласти $Q = 0$; $F_1(z) = = \dfrac{1}{\pi i} \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \int_{L_k} \frac{H_k(t_k) dt_k}{\zeta_k - z}$, $F_2(z) = = -\dfrac{1}{\pi i} \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \int_{L_k} \frac{R_0^2 \overline{H_k(t_k) dt_k}}{z(R_0^2 - z\overline{\zeta_k})}$ – комплексні потенціали, що характеризують збурену температуру $T^*(x,y)$; $H_k(t_k)=\gamma'_k(t_k)+i\mu_k(t_k)e^{-i\theta_k}$; $\zeta_k=t_ke^{i\alpha_k}+z_k^o$; $e^{i\theta_k}=\dfrac{dt_k}{ds_k}$; $\gamma'_k(t_k)=0\ (k=1,2)$; $\mu_3(t_3)=0$; $\mu_k(t_k)$, $k=\overline{1,2}$ – невідомі функції на контурах шарів L_1, L_2; $\gamma'_k(t_k)$, $k=\overline{3,N}$ – невідомі функції на контурі L_3 та на контурах тріщин; θ_k – кут між додатною дотичною до контуру L_k в точці t_k і віссю O_kx_k.

Задовольнивши з використанням потенціалу (5) умови спряження (1) на контурах L_1, L_2 та крайові умови (2), (3) на контурах L_k, $k=\overline{3,N}$, одержимо систему N сингулярних інтегральних рівнянь першого і другого роду відносно N невідомих функцій $\mu_k(t_k)$, $k=\overline{1,2}$ і $\gamma'_k(t_k)$, $k=\overline{3,N}$:

$$\mathrm{Im}\left[H_n(\tau_n)e^{i\beta_n}\right]+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\int_{L_k}\mathrm{Im}\left[K_{nk}(t_k,\tau_n)H_k(t_k)dt_k+L_{nk}(t_k,\tau_n)\overline{H_k(t_k)dt_k}\right]=$$

$$=-\Delta_n\mathrm{Im}\left[F_0(\eta_n)e^{i(\beta_n+\alpha_n)}\right],\quad \tau_n\in L_n,\quad n=\overline{1,2};$$

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\int_{L_k}\mathrm{Im}\left[K_{nk}(t_k,\tau_n)H_k(t_k)dt_k+L_{nk}(t_k,\tau_n)\overline{H_k(t_k)dt_k}\right]+\delta_{n3}\cdot d_3=$$

$$=\mathrm{Im}\left[F_0(\eta_n)e^{i(\beta_n+\alpha_n)}\right]+\omega_n(\eta_n),\qquad \tau_n\in L_n,\qquad n=\overline{3,N}, \tag{6}$$

де $K_{nk}(t_k,\tau_n)=\dfrac{\Delta_ne^{i(\beta_n+\alpha_n)}}{i(\zeta_k-\eta_n)}$; $L_{nk}(t_k,\tau_n)=\dfrac{R_0^2\Delta_ne^{i(\beta_n+\alpha_n)}}{i\eta_n(R_0^2-\eta_n\overline{\zeta_k})}$; $\Delta_n=\left(\dfrac{\lambda_n-\lambda}{\lambda_n+\lambda}-1\right)\delta_n+1$; $e^{i\beta_n}=\dfrac{d\tau_n}{ds_n}$; $\delta_n=\begin{cases}1, & n=\overline{1,2}\\ 0, & n=\overline{3,N}\end{cases}$; $\eta_n=\tau_ne^{i\alpha_n}+z_n^0$; δ_{n3} – символ Кронеккера.

У ліву частину сингулярних інтегральних рівнянь (6) додамо функціонал [10]

$$d_3=\int_{L_3}\gamma'_3(t_3)dt_3,$$

що рівний нулю через виконання умови (4) і забезпечує безумовну розв'язувальність системи рівнянь (6) для її довільної правої частини.

У класі функцій $\mu_k(t_k)\in H$, $k=\overline{1,2}$; $\gamma'_3(t_3)\in H$ і $\gamma'_k(t_k)\in H^*$, $k=\overline{4,N}$ (H – клас функцій, що задовольняють умови Гельдера, H^* – клас функцій, необмежених на кінцях контурів тріщин) система інтегральних рівнянь (6) має єдиний розв'язок для довільної правої її частини за виконання умов

$$\int_{L_k}\gamma'_k(t_k)dt_k=0,\ k=\overline{4,N},$$

що забезпечують неперервність температури за обходу контурів тріщин.

Інтегральні рівняння задачі термопружності. Розглянемо пружну тришарову кільцеву область з криволінійними тріщинами (див. рисунок), яка знаходиться під дією стаціонарного температурного поля $T(x,y)$. Припустимо, що на контурах спаю шарів L_1 і L_2 існують умови спряження (напруження неперервні, а переміщення мають розрив)

$$\left[N(t_n)+iT(t_n)\right]^+=\left[N(t_n)+iT(t_n)\right]^-, \tag{7}$$

$$(u_n+iv_n)^+-(u_n+iv_n)^-=g_n^*(t_n), \quad t_n\in L_n, \; n=\overline{1,2}, \tag{8}$$

береги тріщин під час деформування не контактують і на них задане самозрівноважене навантаження

$$\left[N(t_n)+iT(t_n)\right]^{\pm}=p_n^*(t_n), \quad n=\overline{4,N}, \tag{9}$$

на межах області L_0 і L_3 діють зусилля

$$N(t_n)+iT(t_n)=p_n^*(t_n), \quad n=0,3, \tag{10}$$

які задовольняють умови рівноваги і описують рівність нулю головного вектора і головного моменту зовнішніх зусиль, що діють на контурах L_0 і L_3:

$$\int_{L_0} p_0^*(t_0)\,dt_0+\int_{L_3} p_3^*(t_3)\,dt_3=0, \quad \mathrm{Re}\left[\int_{L_0}\overline{\zeta_0}\,p_0^*(t_0)\,dt_0+\int_{L_3}p_3^*(t_3)\,\overline{\zeta_3}(t_3)\,dt_3\right]=0. \tag{11}$$

Подібно, як і в задачі теплопровідності, інтегральні зображення комплексних потенціалів напружень $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ подамо, скориставшись комплексними потенціалами для однорідної скінченної області з отворами і тріщинами [10, 11], у вигляді

$$\Phi(z)=\Phi_0(z)+\Phi_1(z)+\Phi_2(z); \quad \Psi(z)=\Psi_0(z)+\Psi_1(z)+\Psi_2(z), \tag{12}$$

де

$$\Phi_0(z)=\frac{\chi_0(X_0+iY_0)-2\beta_0^t\cdot\varepsilon}{2\pi(1+\chi)z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{p_0^*(t_0)dt_0}{t_0-z}; \qquad X_0+iY_0=i\int_{L_0}p_0^*(t_0)dt_0;$$

$\varepsilon=iR_0\int_{L_0}\omega_0(t_0)dt_0$, якщо на контурі L_0 задано тепловий потік; $\Psi_0(z)=$

$=-\dfrac{(X_0-iY_0)}{2\pi(1+\chi)z}-\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{L_0}\dfrac{\overline{p_0^*(t_0)dt_0}}{t_0-z}+\dfrac{R_0^2}{z^2}\cdot\Phi_0(z)-\dfrac{R_0^2}{z}\Phi'_0(z)$; функції $\Phi_0(z)$, $\Psi_0(z)$ визначають напружений стан для однорідної нескінченної площини з коловим отвором L_0 радіуса R_0, на контурі якого задані навантаження $p_0^*(t_0)$ і тепловий потік $\omega_0(t_0)$ [10]

$$\Phi_1(z)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}\int_{L_k}\frac{Q_k(t_k)e^{i\alpha_k}dt_k}{\zeta_k-z};$$

$$\Psi_1(z)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}\int_{L_k}\left[\frac{\overline{Q_k(t_k)}e^{-i\alpha_k}\overline{dt_k}}{\zeta_k-z}-\frac{\overline{\zeta_k}Q_k(t_k)e^{i\alpha_k}dt_k}{(\zeta_k-z)^2}\right];$$

$$\Phi_2(z)=\frac{R_0^2}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}\int_{L_k}\left[\frac{Q_k(t_k)e^{i\alpha_k}dt_k}{z\left(z\overline{\zeta_k}-R_0^2\right)}+\frac{\left(R_0^2-\zeta_k\overline{\zeta_k}\right)\overline{Q_k(t_k)}e^{-i\alpha_k}\overline{dt_k}}{\overline{\zeta_k}\left(R_0^2-z\overline{\zeta_k}\right)^2}\right]; \tag{13}$$

$$\Psi_2(z)=\frac{R_0^4}{2\pi z^2}\sum_{k=1}^{N}\int_{L_k}\left\{\left[\frac{z}{\left(z\overline{\zeta_k}-R_0^2\right)R_0^2}+\frac{\left(R_0^2-\zeta_k\overline{\zeta_k}\right)\left(R_0^2-3z\overline{\zeta_k}\right)}{\overline{\zeta_k}\left(R_0^2-z\overline{\zeta_k}\right)^3}\right]\overline{Q_k(t_k)}e^{-i\alpha_k}\overline{dt_k}+\right.$$

$$+\left[\frac{3z\overline{\zeta_k}-2R_0^2}{z\left(z\overline{\zeta_k}-R_0^2\right)^2}+\frac{1}{R_0^2\zeta_k}\right]Q_k(t_k)e^{i\alpha_k}dt_k\Bigg\}, \quad \zeta_k=t_ke^{i\alpha_k}+z_k^0,\ |z|>R_0,\ |\zeta_k|>R_0,$$

$$Q_k(t_k)=\begin{cases} g_k(t_k), & t_k\in L_k, \quad k=\overline{1,3};\\ g_k^{'}(t)+\dfrac{i\beta_*}{1+\chi_*}\left[f^+(t_k)-f^-(t_k)\right], & t_k\in L_k, \quad k=\overline{4,N};\end{cases}$$

комплексні потенціали $\Phi_1(z), \Psi_1(z), \Phi_2(z), \Psi_2(z)$ характеризують збурений напружений стан, зумовлений неоднорідними шарами і тріщинами; $\beta_*=\beta^t$, $\chi_*=\chi$, якщо розріз L_k знаходиться в матриці, і $\beta_*=\beta_k^t$, $\chi_*=\chi_k$, якщо він знаходиться у компоненті S_k; $f^{\pm}(t_k)$ – граничне значення потенціалу $f(z)$.

Задовольнивши з допомогою комплексних потенціалів (12), (13) умови спряження (8) на контурах L_1, L_2 та крайові умови (9), (10) на контурах L_k ($k=\overline{3,N}$), одержимо систему N сингулярних інтегральних рівнянь першого і другого роду відносно N невідомих функцій $Q_k(t_k)$, $k=\overline{1,N}$:

$$A_nQ_n(\tau_n)+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}\int_{L_n}\left[R_{nk}(t_k,\tau_n)Q_k(t_k)dt_k+S_{nk}(t_k,\tau_n)\overline{Q_k(t_k)}\ \overline{dt_k}\right]=P_1(\tau_n),$$

$$\tau_n\in L_n,\ n=\overline{1,2};$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}\int_{L_n}\left[R_{nk}(t_k,\tau_n)Q_k(t_k)dt_k+S_{nk}(t_k,\tau_n)\overline{Q_k(t_k)}\ \overline{dt_k}\right]+ \tag{14}$$

$$+\delta_{n3}\left(a_3\frac{ds_3}{d\tau_3}/R_0-\frac{1}{2\pi i}\frac{M_3R_0^2}{\left(\overline{\tau_3}-\overline{\xi_3}\right)}\cdot\frac{\overline{d\tau_3}}{d\tau_3}\right)=P_2(\tau_n), \quad \tau_n\in L_n,\ n=\overline{3,N},$$

де

$$R_{nk}(t_k,\tau_n)=R_{nk}^1(t_k,\tau_n)+R_0^2e^{i\alpha_k}\times$$

$$\times\left\{\frac{B_n}{\zeta_n\left(\eta_n\overline{\zeta_k}-R_0^2\right)}-C_n\left\{\begin{array}{l}\dfrac{R_0^2-\zeta_k\overline{\zeta_k}}{\zeta_k\left(R_0^2-\overline{\eta_n}\zeta_k\right)^2}+e^{-2i\alpha_n}\dfrac{\overline{d\tau_n}}{d\tau_n}\times\left[\dfrac{1}{\overline{\eta_n}\left(\overline{\eta_n}\zeta_k-R_0^2\right)}+\right.\\[2ex] \left.+\dfrac{\left[R_0^2\left(R_0^2-3\overline{\eta_n}\zeta_k\right)+2\eta_n\zeta_k(\eta_n)^2\right]\left(\zeta_k\overline{\zeta_k}-R_0^2\right)}{\zeta_k(\eta_n)^2\left(\overline{\eta_n}\zeta_k-R_0^2\right)^3}\right]\end{array}\right\}\right\};$$

$$S_{nk}(t_k,\tau_n)=S_{nk}^1(t_k,\tau_n)+R_0^2e^{-i\alpha_k}\times\left\{\frac{B_n\left(R_0^2-\zeta_k\overline{\zeta_k}\right)}{\overline{\zeta_k}\left(R_0^2-\eta_n\overline{\zeta_k}\right)^2}-\right.$$

$$-C_n\left\{\left[\frac{\eta_n\overline{\eta_n}\left(R_0^2-2\overline{\eta_n}\zeta_k\right)+3\overline{\eta_n}\zeta_k R_0^2-2R_0^4}{(\overline{\eta_n})^3\left(R_0^2-\overline{\eta_n}T_k\right)^2}+\frac{1}{\overline{\zeta_k}(\overline{\eta_n})^2}\right]\frac{\overline{d\tau_n}}{d\tau_n}e^{-2i\alpha_n}+\frac{1}{\overline{\eta_n}\left(\overline{\eta_n}\zeta_k-R_0^2\right)}\right\}\Bigg\};$$

$$R_{nk}^1(t_k,\tau_n)=\frac{B_n}{\zeta_k-\eta_n}-\frac{C_n}{\overline{\zeta_k}-\overline{\eta_n}}\frac{\overline{d\tau_n}}{d\tau_n}e^{-2i\alpha_n},$$

$$S_{nk}^1(t_k,\tau_n)=-C_n\left[\frac{1}{\overline{\zeta_k}-\overline{\eta_n}}-e^{-2i\alpha_n}\frac{\overline{d\tau_n}}{d\tau_n}\frac{\zeta_k-\eta_n}{(\overline{\zeta_k}-\overline{\eta_n})^2}\right];$$

$$k=\overline{1,N},\ n=\overline{1,N}\ \ (|\zeta_k|>R_0,\quad |\eta_n|>R_0);\qquad \eta_n=\tau_n e^{i\alpha_n}+z_n^0,$$

$$A_1=i[1+\chi_1+\Gamma_{01}(1+\chi_0)]/2,\quad B_1=\chi_1-\Gamma_{01}\chi_0,\quad C_1=1-\Gamma_{01},$$

$$A_2=i[1+\chi_2+\Gamma_{12}(1+\chi_1)]/2,\quad B_2=\chi_2-\Gamma_{12}\chi_1,\quad C_2=1-\Gamma_{12},$$

$$B_n=1,\ C_n=-1\quad (n=\overline{3,N}),$$

$$\beta_n^t=\alpha_n^t E_n/(1+\mu_n),\ \ n=1,2;\qquad \Gamma_{01}=G_0/G_1,\quad \Gamma_{12}=G_1/G_2;$$

$$P_1(\tau_n)=\Gamma_n\beta_{n-1}^t f^-(\eta_n)-\beta_n^t f^+(\eta_n)+2G_n g_n^*(\eta_n)-$$

$$-B_n\Phi_0(\eta_n)+C_n\left[\overline{\Phi_0(\eta_n)}+e^{-2i\alpha_n}\frac{\overline{d\tau_n}}{d\tau_n}(\eta_n\overline{\Phi_0'(\eta_n)}+\overline{\Psi_0(\eta_n)})\right],\quad n=1,2;$$

$$P_2(\tau_n)=p_n^*(\eta_n)-\Phi_0(\eta_n)-\overline{\Phi_0(\eta_n)}-\left[\eta_n\overline{\Phi_0'(\eta_n)}+\overline{\Psi_0(\eta_n)}\right],\quad n=\overline{3,N}.$$

До інтегральних рівнянь (14) додамо функціонали [10, 11] $a_3=\int\limits_{L_3} g_3'(t_3)dt_3$, $M_3=\operatorname{Im}\Phi(\xi_3)$, де $\xi_3=z\in S$ – довільна точка в області S, які рівні нулю за виконання умов рівноваги (11) і забезпечують існування розв'язку системи рівнянь (14) з довільною правою частиною.

У класі функцій $g_k(t_k)\in H$, $k=\overline{1,3}$ і $g_k'(t_k)\in H^*$, $k=\overline{4,N}$ система рівнянь (14) має єдиний розв'язок для довільної її правої частини за виконання умов

$$\int\limits_{L_n} g_n'(t_n)dt_n=0,\ n=\overline{4,N}, \tag{15}$$

які забезпечують однозначність переміщень за обходу контурів тріщин.

Із розв'язку системи сингулярних інтегральних рівнянь (14), (15) коефіцієнти інтенсивності напружень K_{I}, K_{II} у вершинах тріщин знаходимо за відомою формулою [12].

ВИСНОВКИ

Запропоновано підхід, який дає змогу одержати систему модифікованих сингулярних інтегральних рівнянь задач теплопровідності і термопружності для скінченної тришарової кільцевої області з тріщинами, в яких вилучено невідому функцію на коловому контурі внутрішньої межі області, що значно полегшує знаходження її числового розв'язку.

РЕЗЮМЕ. Двумерные задачи стационарной теплопроводности и термоупругости для трехслойной кольцевой области с трещинами сведены к сингулярным интегральным уравнениям. Построены системы интегральных уравнений первого и второго рода на

замкнутых (контуры разделения слоев и внешняя граница) и разомкнутых (трещины) контурах, когда контур внутренней границы области – окружность.

SUMMARY. Two-dimensional problems of stationary heat conductivity and thermoelasticity for a three-layer ring area with cracks are reduced to singular integral equations. The systems of integral equations of the first and second kind of closed (contours of layers and outer boundary separation) and open (cracks) contours, when the contour of the inner boundary of the area is a circle, are constructed.

1. *Саврук М. П., Зеленяк В. М.* Плоская задача теплопроводности и термоупругости для конечного кусочно-однородного тела с трещинами // Физ.-хим. механика материалов. – 1987. – **23**, № 5. – С. 70–78.

   (*Savruk M. P. and Zelenyak V. M.* The plane problem of thermal conductivity and thermal elasticity for a finite piecewise uniform body with cracks // Materials Science. – 1987. – **23**, № 5. – P. 502–510.)
2. *Зашкильняк И. М.* Термоупругое состояние полуплоскости с включением и криволинейными трещинами // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1985. – № 22. – С. 60–65.
3. *Зеленяк В. М., Євтушенко О. О.* Інтегральні рівняння стаціонарних задач теплопровідності і термопружності для півпростору з циліндричними включеннями та криволінійними тріщинами // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2005. – Вип. 3. – С. 140–146.
4. *Матисяк С. Й., Євтушенко О. О., Зеленяк В. М.* Нагрівання півпростору з включенням і тріщиною // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – **40**, № 4. – С. 34–40.

   (*Matysiak S., Evtushenko O. O., and Zeleniak V. M.* Heating of a half–space containing an inclusion and a crack // Materials Science. – 2004. – **40**, № 4. – P. 467–474.)
5. *Саврук М. П., Зеленяк В. М.* Сингулярные интегральные уравнения плоских задач теплопроводности и термоупругости для кусочно-однородной плоскости с трещинами // Там же. – 1986. – **22**, № 3. – С. 82–88.

   (*Savruk M. P. and Zelenyak V. M.* Singular integral equations of plane problems of thermal conductivity and thermoelasticity for a piecewise–uniform plane with cracks // Materials Science. – 1986.– **22**, № 3. – P. 297–307.)
6. *Зеленяк В., Слободян Б.* Моделювання термопружного двовимірного стану спаяних різнорідних півплощин із включеннями та тріщинами // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2010. – Вип. 12. – С. 94–101.
7. *Кит Г. С., Кривцун М. Г.* Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1983. – 230 с.
8. *Зеленяк В. М.* Термопружна взаємодія двокомпонентного кругового включення і тріщини в пластині // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2012. – **48**, № 3. – С. 40–45.

   (*Zelenyak V. M.* Thermoelastic interaction of a two-component circular inclusion with a crack in the plate // Materials Science. – 2012. – **48**, № 3. – P. 301–307.)
9. *Саврук М. П., Зеленяк В. М.* Термопружний стан двокомпонентного порожнистого циліндра з крайовими радіальними тріщинами // Там же. – 1994. – **30**, № 4. – С. 76–80.

   (*Savruk M. P. and Zelenyak V. M.* Thermoelastic state of a two-component hollow cylinder with edge radial cracks // Materials Science. – 1994. – **30**, № 4. – P. 470–474.)
10. *Панасюк В. В., Саврук М. П.* Плоские задачи теплопроводности и термоупругости для тел с трещинами // Успехи механики. –1984. – **7**, № 2. – С. 75–115.
11. *Саврук М. П., Осив П. Н., Прокопчук И. В.* Численный анализ в плоских задачах теории трещин. – К.: Наук. думка, 1989. – 248 с.
12. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.

Одержано 15.12.2014