УДК 536.24

НЕЛІНІЙНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ШАРУВАТОЇ ПЛАСТИНИ З ВКЛЮЧЕННЯМ

В. І. ГАВРИШ

Національний університет "Львівська політехніка"

Розглянуто нелінійну крайову задачу теплопровідності для ізотропної безмежної термочутливої шаруватої пластини з теплоізольованими лицевими поверхнями та чужорідним наскрізним теплоактивним включенням. За допомогою запровадженого перетворення виконано часткову лінеаризацію вихідного рівняння теплопровідності. Після кусково-лінійної апроксимації температури на межових поверхнях чужорідних шарів та включення рівняння повністю лінеаризовано. Знайдено аналітично-числовий розв'язок цього рівняння з крайовими умовами другого роду для визначення запровадженої функції із використанням інтегрального перетворення Фур'є. Наведено розрахункові формули для обчислення значень шуканої температури за лінійної температурної залежності коефіцієнта теплопровідності конструкційних матеріалів для двошарової пластини. Виконано числовий аналіз для одношарової пластини з наскрізним теплоактивним включенням (матеріал пластини – кераміка ВК94-І, матеріал включення – срібло).

Ключові слова: *ізотропна шарувата безмежна термочутлива пластина з теплоізольованими лицевими поверхнями, ідеальний тепловий контакт, температурне поле, теплопровідність, чужорідне наскрізне теплоактивне включення.*

Проектування складних мікроелектронних пристроїв шаруватої структури, які часто функціонують в умовах інтенсивного нагрівання чи охолодження, що спричиняє залежність теплофізичних параметрів від температури, полягає не лише в оптимізації їхніх параметрів, але й у забезпеченні їх стабільної роботи та захисту від різноманітних збоїв, високої надійності та теплової стійкості устаткування. Із ростом потужностей та інтеграції мікроелектронних схем ускладнюється проблема термостійкості до теплових навантажень конструкцій мікроелектронних пристроїв, які частково або цілком виходять із ладу в результаті теплових перевантажень. Врахування залежності теплофізичних параметрів від температури значно утруднює побудову математичних моделей теплових процесів, однак дає змогу точніше досліджувати термостійкість конструкцій.

Деякі дослідження температурних режимів для конструкційних термочутливих елементів кусково-однорідної структури виконано раніше [1–3]. Розроблена математична модель квазістаціонарного температурного поля суцільного циліндра обертання із композитного матеріалу з нелінійними крайовими умовами, що враховують залежність теплофізичних характеристик матеріалів від температури. Отримані аналітичні вирази для визначення температурних полів, що дають змогу підібрати склад композитних матеріалів для деталей циліндричного типу для збільшення терміну їх експлуатації [4].

Нижче сформульовано крайову нелінійну задачу теплопровідності, наведено методику лінеаризації вихідного рівняння теплопровідності та розрахункові формули для визначення температурного поля у шаруватій термочутливій безмежній пластині з теплоізольованими лицевими поверхнями, у якій знаходиться чужо-

Контактна особа: В. І. ГАВРИШ, e-mail: gavryshvasyl@gmail.com

рідне наскрізне теплоактивне включення. За лінійної залежності коефіцієнта теплопровідності від температури для одношарової пластини з включенням виконано числовий аналіз.

Об'єкт дослідження. Математична модель. Розглянемо ізотропну шарувату безмежну пластину товщиною 2δ з теплоізольованими лицевими поверхнями $|z| = \delta$, яка складається із n різнорідних шарів, що відрізняються геометричними (шириною) та теплофізичними (коефіцієнтом теплопровідності) параметрами, віднесену до декартової прямокутної системи координат (x, y, z) із початком на одній з її межових поверхонь (рис. 1). Пластина містить наскрізне включення [5], в області $\Omega_0 = \{(x, y, z) : |x| \le h,\ 0 \le y \le y_n, |z| \le \delta\}$ якого діють рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла з потужністю $q_0 = \text{const}$. На поверхнях шарів $K_j = \{(x, y_j, z) : |x| < \infty, |z| \le \delta\} (j = \overline{1, n-1})$ та включення $K_\pm = \{(\pm h, y, z) : 0 \le y \le y_n, |z| \le \delta\}$ виконується ідеальний тепловий контакт, а на межових поверхнях $K_0 = \{(x, 0, z) : |x| < \infty,\ |z| \le \delta\}$, $K_n = \{(x, y_n, z) : |x| < \infty,\ |z| \le \delta\}$ пластини задано крайові умови другого роду. У наведеній структурі потрібно визначити розподіл температури $t(x, y)$ за просторовими координатами.

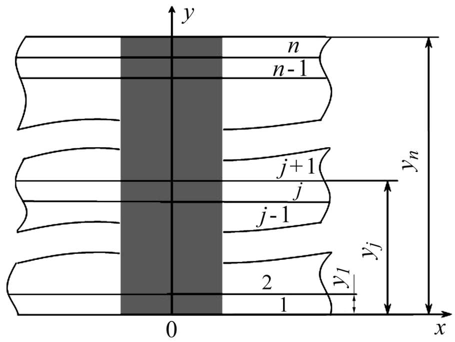

Рис. 1. Переріз ізотропної багатошарової безмежної пластини з чужорідним наскрізним теплоактивним включенням площиною z = 0.

Fig. 1. Cross-section of an isotropic multilayer infinite plate with a foreign thermo-active through-plane inclusion z = 0.

Розподіл стаціонарного температурного поля $t(x, y)$ в розглядуваній системі отримуємо, розв'язавши нелінійне рівняння теплопровідності [5, 6]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(x, y, t)\frac{\partial t}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda(x, y, t)\frac{\partial t}{\partial y}\right] = -q_0\, S_-(h - |x|) \qquad (1)$$

з крайовими умовами

$$t\Big|_{|x|\to\infty} = 0,\ \frac{\partial t}{\partial x}\Big|_{|x|\to\infty} = \frac{\partial t}{\partial y}\Big|_{y=0} = \frac{\partial t}{\partial y}\Big|_{y=y_n} = 0, \qquad (2)$$

де $\lambda(x, y, t) = \sum_{j=1}^{n}\{\lambda_j(t) + [\lambda_0(t) - \lambda_j(t)]S_-(h - |x|)\}N(y, y_{j-1}) -$ коефіцієнт теплопровідності неоднорідної пластини; $\lambda_j(t), \lambda_0(t) -$ коефіцієнти теплопровідності матеріалів j-го шару пластини та включення, відповідно; $y_0 = 0$; $N(y, y_{j-1}) = S_+(y - y_{j-1}) - S_+(y - y_j)$; $S_\pm(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta > 0 \\ 0{,}5 \mp 0{,}5, & \zeta = 0 \\ 0, & \zeta < 0 \end{cases}$ – асиметричні одиничні функції [7].

Запровадимо функцію

$$\vartheta=\sum_{j=1}^{n}\{\int_{0}^{t(x,y)}\lambda_j(\zeta)d\zeta\ N(y,y_{j-1})+S_-(h-|x|)\ [\ N(y,y_{j-1})\int_{t(\pm h,y)}^{t(x,y)}(\lambda_0(\zeta)-\lambda_j(\zeta))d\zeta-$$

$$-\int_{t(\pm h,y_{j-1})}^{t(x,y_{j-1})}(\lambda_0(\zeta)-\lambda_j(\zeta))d\zeta\ S_+(y-y_{j-1})+\int_{t(\pm h,y_j)}^{t(x,y_j)}(\lambda_0(\zeta)-\lambda_j(\zeta))d\zeta\ S_+(y-y_j)]-$$

$$-\int_{0}^{t(x,y_{j-1})}\lambda_j(\zeta)d\zeta\ S_+(y-y_{j-1})+\int_{0}^{t(x,y_i)}\lambda_j(\zeta)d\zeta\ S_+(y-y_j)\},\qquad(3)$$

продиференціювавши яку за змінними x та y, отримаємо:

$$\lambda(x,y,t)\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+\Phi_1(x,y),\quad \lambda(x,y,t)\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{\partial\vartheta}{\partial y}+\Phi_2(x,y),\qquad(4)$$

де

$$\Phi_1(x,y)=\sum_{j=1}^{n}[(\lambda_j(t)\frac{\partial t}{\partial x})\Big|_{y=y_{j-1}}S_+(y-y_{j-1})-(\lambda_j(t)\frac{\partial t}{\partial x})\Big|_{y=y_j}S_+(y-y_j)],$$

$$\Phi_2(x,y)=S_-(h-|x|)\sum_{j=1}^{n}[(\lambda_0(t)-\lambda_j(t))\frac{\partial t}{\partial y}]\Big|_{|x|=h}N(y,y_{j-1}).$$

Із урахуванням виразів (4) вихідне рівняння (1) набуде такого вигляду:

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2}+\frac{\partial}{\partial x}[\Phi_1(x,y)]+\frac{\partial}{\partial y}[\Phi_2(x,y)]=-q_0S_-(h-|x|).\qquad(5)$$

Крайові умови з використанням співвідношення (3) запишемо так:

$$\vartheta\Big|_{|x|\to\infty}=0,\ \frac{\partial\vartheta}{\partial x}\Big|_{|x|\to\infty}=\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\Big|_{y=0}=\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\Big|_{y=y_n}=0.\qquad(6)$$

Запроваджена функція ϑ (3) дала змогу звести нелінійне рівняння теплопровідності (1) до частково лінеаризованого рівняння з розривними коефіцієнтами (5). Водночас крайові умови (2) залишаються лінійними у вигляді (6).

Знаходження аналітично-числового розв'язку. Апроксимуємо функції $t(\pm h,y),\ t(x,y_j)$ виразами

$$t(\pm h,y)=t_1^{(\pm jh)}+\sum_{k=1}^{m-1}(t_{k+1}^{(\pm jh)}-t_k^{(\pm jh)})S_-(y-y_k^{(j)*}),$$

$$t(x,y_j)=t_1^{(j)}+\sum_{l=1}^{p-1}(t_{l+1}^{(j)}-t_l^{(j)})S_-(x-x_l),\qquad(7)$$

де $y_k^{(j)*}\in\,]y_{j-1};y_j[;\ y_1^{(j)*}\le y_2^{(j)*}\le\ldots\le y_{m-1}^{(j)*};$ $x_l\in\,]-x_*;\ x_*[\setminus[-h;h];$ $x_*>0;$ $x_1\le x_2\le\ldots x_{p-1};$ m,p – кількість розбиттів інтервалів $]y_{j-1};y_j[$ та $]-x_*;\ x_*[\setminus[-h;h]$, відповідно; $t_k^{(\pm jh)}(k=\overline{1,m}),$ $t_l^{(j)}(l=\overline{1,p})$ – невідомі апроксимаційні значення температури; x_* – значення координати, в якій температура практично дорівнює нулеві (знаходять з відповідної лінійної крайової задачі).

Підставивши вирази (7) у співвідношення (5), одержимо лінійне диференціальне рівняння з частковими похідними відносно запровадженої функції ϑ

$$\Delta\vartheta = -\sum_{j=1}^{n}[\sum_{l=1}^{p-1}\Phi_j^{(l)}(y)\delta'_{-}(x-x_l)+S_{-}(h-|x|)\sum_{k=1}^{m-1}\Phi_j^{(k)}(y)]-q_0S_{-}(h-|x|). \qquad (8)$$

Тут $\Phi_j^{(k)}(y)=(t_{k+1}^{(\pm jh)}-t_k^{(\pm jh)})[\lambda_0(t_{k+1}^{(\pm jh)})-\lambda_j(t_{k+1}^{(\pm jh)})]\delta'_{-}(y-y_k^{(j)*})$;

$$\Phi_j^{(l)}(y)=(t_{l+1}^{(j-1)}-t_l^{(j-1)})\lambda_j(t_{l+1}^{(j-1)})S_{+}(y-y_{j-1})-(t_{l+1}^{(j)}-t_l^{(j)})\lambda_j(t_{l+1}^{(j)})S_{+}(y-y_j);$$

$\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа в декартовій прямокутній системі координат;

$\delta_{\pm}(\zeta)=\dfrac{dS_{\pm}(\zeta)}{d\zeta}$ – асиметричні дельта-функції Дірака [7].

Застосувавши інтегральне перетворення Фур’є за координатою x до рівняння (8) та умов (6), отримаємо звичайне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^2\bar{\vartheta}}{dy^2}-\xi^2\bar{\vartheta}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\sum_{j=1}^{n}[\frac{2\sin\xi h}{\xi}\sum_{k=1}^{m-1}\Phi_j^{(k)}(y)-i\xi\sum_{l=1}^{p-1}e^{-i\xi x_l}\Phi_j^{(l)}(y)]-\frac{2q_0}{\xi}\sin\xi h\right\} \qquad (9)$$

і крайові умови

$$\left.\frac{d\bar{\vartheta}}{dy}\right|_{y=0}=\left.\frac{d\bar{\vartheta}}{dy}\right|_{y=y_n}=0, \qquad (10)$$

де $\bar{\vartheta}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi x}\vartheta dx$ – трансформанта функції $\vartheta(x,y)$; ξ – параметр інтегрального перетворення Фур’є; $i=\sqrt{-1}$ – уявна одиниця.

Розв’язавши задачу (9), (10), а після цього застосувавши обернене інтегральне перетворення Фур’є до її розв’язку, одержимо вираз для функції ϑ

$$\vartheta=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{\xi}\{\cos\xi x\sum_{j=1}^{n}[2\sin\xi h\sum_{k=1}^{m-1}(\mathrm{ch}\xi(y-y_k^{(j)^*})S_{-}(y-y_k^{(j)^*}+\frac{\mathrm{ch}\xi y}{\mathrm{sh}\xi y_n}\mathrm{sh}\xi(y_n-y_k^{(j)^*}))\times$$
$$\times(t_{k+1}^{(\pm jh)}-t_k^{(\pm jh)})(\lambda_0(t_{k+1}^{(\pm jh)})-\lambda_j(t_{k+1}^{(\pm jh)}))+\frac{\mathrm{ch}\xi y}{\mathrm{sh}\xi y_n}\mathrm{sh}\xi(y_n-y_k^{(j)^*}))+$$
$$+\sum_{l=1}^{p-1}\sin\xi(x+x_l)(((1-\mathrm{ch}\xi(y-y_{j-1}))S_{+}(y-y_{j-1})+\frac{\mathrm{ch}\xi y}{\mathrm{sh}\xi y_n}\mathrm{sh}\xi(y_n-$$
$$-y_{j-1}))(t_{l+1}^{(j-1)}-t_l^{(j-1)})\lambda_j(t_{l+1}^{(j-1)})-((1-\mathrm{ch}\xi(y-y_j))S_{+}(y-y_j)+$$
$$+\frac{\mathrm{ch}\xi y}{\mathrm{sh}\xi y_n}\mathrm{sh}\xi(y_n-y_j))(t_{l+1}^{(j)}-t_l^{(j)})\lambda_j(t_{l+1}^{(j)}))]+\frac{2q_0}{\xi^2}\sin\xi h\}d\xi. \qquad (11)$$

Підставивши вирази температурної залежності коефіцієнта теплопровідності матеріалів для кожного зі шарів пластини та включення у співвідношення (3), (11), після деяких перетворень отримаємо систему нелінійних рівнянь для визначення невідомих апроксимаційних значень температури $t_k^{(\pm jh)}(k=\overline{1,m})$ та $t_l^{(j)}$ $(l=\overline{1,p})$. Шукане температурне поле для наведеної системи визначаємо за допомогою отриманого нелінійного рівняння з використанням співвідношень (3), (11) після підстановки в них конкретних виразів залежності коефіцієнта теплопровідності від температури для матеріалів кожного зі шарів пластини та включення.

Частковий приклад та аналіз отриманих результатів. Для розв'язування багатьох практичних задач використовують таку залежність коефіцієнта теплопровідності від температури [8, 9]:

$$\lambda = \lambda^0 (1 - kt)\,, \tag{12}$$

де λ^0, k – опорний і температурний коефіцієнти теплопровідності. Із виразів (3), (11) отримаємо формули для визначення температури t для двошарової пластини (n = 2) в областях

$$\Omega_1 = \{(x,y) : |x| > h, 0 \le y < y_1\} \; - \; t = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\dfrac{k_1}{\lambda_1^0}(\vartheta + \vartheta_1)}}{k_1}\,, \tag{13}$$

$$\Omega_2 = \{(x,y) : |x| > h, y_1 \le y \le y_2\} \; - \; t = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\dfrac{k_2}{\lambda_2^0}(\vartheta + \vartheta_2)}}{k_2}\,, \tag{14}$$

$$\Omega_3 = \{(x,y) : |x| \le h,\ 0 \le y < y_1\} \; - \; t = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\dfrac{k_0}{\lambda_0^0}(\vartheta + \vartheta_3)}}{k_0}\,, \tag{15}$$

$$\Omega_4 = \{(x,y) : |x| \le h, y_1 \le y \le y_2\} \; - \; t = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\dfrac{k_0}{\lambda_0^0}(\vartheta + \vartheta_4)}}{k_0}\,. \tag{16}$$

Тут $\vartheta_1 = \lambda_1^0 \left[(1 - \frac{k_1}{2} t) t \right]\Big|_{y=0}$; $\vartheta_2 = \vartheta_m + \vartheta_1$; $\vartheta_m = \left[(\lambda_2^0 - \lambda_1^0 + \frac{\lambda_1^0 k_1 - \lambda_2^0 k_2}{2} t) t \right]\Big|_{y=y_1}$;

$$\vartheta_3 = \vartheta_v^{(1)} - \vartheta_v^{(1)}\Big|_{y=0} + \vartheta_0\,; \quad \vartheta_0 = \lambda_0^0 \left[(1 - \frac{k_0}{2} t) t \right]\Big|_{y=0}\,;$$

$$\vartheta_v^{(i)} = \left[\lambda_0^0 - \lambda_i^0 + (\frac{\lambda_i^0 k_i - \lambda_0^0 k_0}{2} t) t \right]\Big|_{|x|=h}, \quad i = 1,2\,; \quad \vartheta_4 = \vartheta_v^{(2)} - \vartheta_v^{(1)}\Big|_{y=0} + \vartheta_m\Big|_{|x|=h} + \vartheta_0;$$

значення температури $t(x,0)$ дорівнює температурі навколишнього середовища; $t(\pm h, y)$, $t(x, y_1)$ обчислюємо за формулою (13) .

Формули (13)–(16) повністю описують температурне поле в термочутливій двошаровій безмежній пластині з чужорідним наскрізним теплоактивним включенням.

Виконали числовий аналіз температури t у одношаровій пластині шириною $2l$ із наскрізним включенням за таких вихідних даних: матеріал пластини – кераміка ВК94-І, матеріал включення – срібло, n = 10 – кількість розбиттів інтервалу]– l, l[; $h = l$ = 1 mm, q_0 = 200 W . В інтервалі температур [20°C; 1230°C] наведені матеріали описують такими залежностями коефіцієнта теплопровідності від температури [10]:

$$\lambda_1(t) = 13{,}67 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{mK}} (1 - 0{,}00064 \frac{1}{\mathrm{K}} t), \quad \lambda_0(t) = 422{,}54 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{mK}} (1 - 0{,}00031 \frac{1}{\mathrm{K}} t), \tag{17}$$

які є частковим випадком співвідношення (12).

Побудовано (рис. 2) залежність температури t від координат x та y. Зазначимо, що максимум температури досягається в області дії рівномірно розподілених у наскрізному чужорідному включенні внутрішніх джерел тепла, а на краях $K_{\pm}$ ($|x| = 1$) включення спостерігаємо виконання умов ідеального теплового контакту (відсутній стрибок температури), що відповідає розглядуваній математичній моделі.

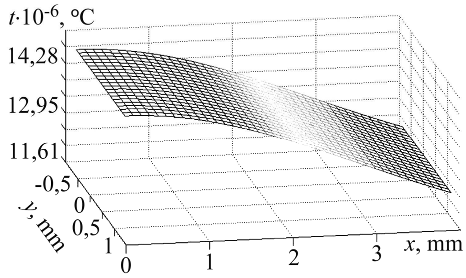

Рис. 2. Залежність температури t від координат x та y.

Fig. 2. Dependence of temperature t on coordinates x and y.

Проілюстровано (рис. 3) зміну температури t залежно від координати y для різних значень координати x. Як видно із графіків, температура змінюється лінійно і практично є стала для наведених значень x, причому вона мало відрізняється в області включення ($x = 0$) та в пластині поза ним ($x = 2$).

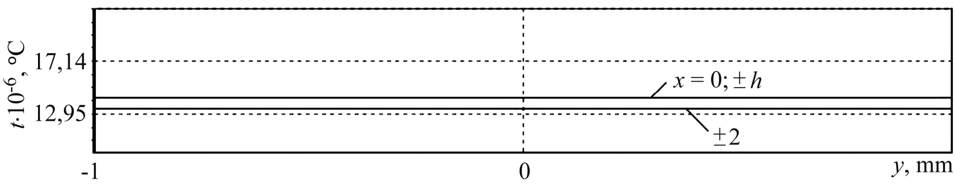

Рис. 3. Залежність температури t від координати y для різних значень координати x.

Fig. 3. Dependences of temperature t on coordinate y for different values of coordinate x.

Кількість розбиттів $n = 10$ інтервалу $]-l, l[$ для наведених теплофізичних (опорний і температурний коефіцієнти теплопровідності) і геометричних (довжина включення і ширина пластини) параметрів структури дає змогу виконати обчислення з точністю $\varepsilon = 10^{-6}$.

ВИСНОВКИ

Запроваджена функція ϑ, описана виразом (3), дала змогу частково лінеаризувати вихідне нелінійне рівняння теплопровідності (1), а запропонована кусково-лінійна апроксимація температури виразом (7) на межових поверхнях включення $K_{\pm}$ та чужорідних шарів $K_j \, (j = \overline{1, n-1})$ – повністю лінеаризувати рівняння (5), у зв’язку з чим стало можливим застосувати інтегральне перетворення Фур’є до отриманої крайової лінійної задачі відносно запровадженої функції ϑ і побудувати аналітично-числовий розв’язок для її визначення. Розглянуто лінійну температурну залежність коефіцієнта теплопровідності для матеріалів включення та пластини. На основі цього наведено розрахункові формули (13)–(16) для обчислення температури $t(x, y)$ у розглядуваній структурі. Виконано числові розрахунки розподілу температури t за формулами (13)–(16) і побудовано графіки (рис. 2, 3). Числовий аналіз показує, що отримані результати відрізняються від результатів, одержаних на основі лінійної моделі [11], на 7%. Ця незначна відмінність пояснюється тим, що температурний коефіцієнт теплопровідності k для розглядуваних матеріалів у співвідношеннях (17) невеликий. Якщо розглядати конструкційні матеріали у розглядуваній системі, для яких температурний коефіцієнт теплопровідності буде значним, то і відчутним буде вплив нелінійності, що значно покращить числові результати досліджень.

РЕЗЮМЕ. Рассмотрена нелинейная граничная задача теплопроводности для изотропной бесконечной термочувствительной слоистой пластины с теплоизолированными лицевыми поверхностями и инородным сквозным тепловыделяющим включением. С помощью предложенного преобразования проведена частичная линеаризация исходного уравнения теплопроводности. После кусочно-линейной аппроксимации температуры на граничных поверхностях инородных слоев и включения уравнение полностью линеаризовано. Найдено численно-аналитическое решение этого уравнения с граничными условиями второго рода для определения введенной функции с применением интегрального преобразования Фурье и приведены расчетные формулы для вычисления искомой температуры с линейной температурной зависимостью коэффициента теплопроводности конструкционных материалов. Выполнен численный анализ для однослойной пластины со сквозным тепловыделяющим включением (материал пластины – керамика ВК94-I, включения – серебро).

SUMMARY. A nonlinear boundary value problem of heat conduction for an isotropic infinite heat-sensitive layered plate with insulated face surfaces and a foreign through heat-releasing inclusion is considered. With a help of the proposed transformation, a partial linearization of the original equation of heat conduction is done. After piecewise linear approximation of temperature at the boundary surfaces of the layers and the inclusion, the equation becomes fully linearized. With the application of Fourier transform, an analytical-numerical solution of the equation with the boundary conditions of the second kind for the determination of introduced functions is obtained; formulae for calculating the required temperature with a linear temperature dependence of the thermal conductivity of structural materials are also provided. Numerical analysis for a single-layer plate with a through heat-releasing inclusion is carried out, where the plate and inclusion materials are ceramics BK94-I and silver, respectively.

1. *Барвінський А. Ф., Гавриш В. І.* Нелінійна задача теплопровідності для неоднорідного шару з внутрішніми джерелами тепла // Проблемы машиностроения. – 2009. – **12**, № 1. – С. 47–53.
2. *Гавриш В. І., Федасюк Д. В.* Метод розрахунку температурних полів для термочутливої кусково-однорідної смуги із чужорідним включенням // Промышленная теплотехника. – 2010. – **32**, № 5. – С. 18–25.
3. *Гаврыш В. И.* Моделирование температурных режимов в термочувствительных микроэлектронных устройствах со сквозными инородными включениями // Электронное моделирование. – 2012. – **34**, № 4.– С. 99–107.
4. *Голицына Е. В., Осипов Ю. Р.* Квазистационарная трехмерная задача теплопроводности во вращающемся сплошном цилиндре из композиционного материала с нелинейными граничными условиями // Конструкции из композиционных материалов. – 2007. – № 4. – С. 47–58.
5. *Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М.* Термоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984. – 368 с.
6. *Коляно Ю. М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.
7. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1977. – 720 с.
8. *Ломакин В. А.* Теория упругости неоднородных тел. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 376 с.
9. *Берман Р.* Теплопроводность твердых тел. – М.: Мир, 1979. – 288 с.
10. *Теплотехнический* справочник: В 2-х т. / Под общ. ред. В. Н. Юренева и П. Д. Лебедева. – М.: Энергия, 1976. – Т. 2. – 896 с.
11. *Гавриш В., Нитребич О.* Моделювання теплового стану в елементах мікроелектронних пристроїв із наскрізними чужорідними включеннями // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка": Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – 2011. – № 719. – С. 144–148.

Одержано 28.10.2013