УДК 393.375

МІЖФАЗНЕ ВІДШАРОВАНЕ ВКЛЮЧЕННЯ В КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОМУ ПРОСТОРІ

О. Ф. КРИВИЙ

Одеська національна морська академія

Розв'язано в явному вигляді неосесиметричну задачу про кругове міжфазне відшароване включення в кусково-однорідному трансверсально-ізотропному середовищі за довільного навантаження. Встановлено асимптотики розв'язків, отримано вирази для узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень на межі включення, а також їх значення для деяких поєднань трансверсально-ізотропних матеріалів.

Ключові слова: *жорстке міжфазне включення, трансверсально-ізотропний, сингулярні інтегральні рівняння, асимптотики напружень.*

Задачі про міжфазні дефекти в кусково-однорідних середовищах розглядали багато авторів. Але вивчали, в основному, або двовимірні анізотропні середовища [1–4], або кусково-однорідні ізотропні простори та осесиметричні задачі для трансверсально-ізотропних просторів [5–9]. Для кусково-однорідних анізотропних просторів, зокрема, кусково-однорідних трансверсально-ізотропних середовищ, відомі лише числові результати [10–12]. Для зведення задач про дефекти до систем сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) побудовано [6, 13] розривний розв'язок для кусково-однорідного ізотропного та однорідного трансверсально-ізотропного просторів. Отримано [14–16] розв'язки неосесиметричних задач про міжфазну тріщину і кругове жорстке включення за різних умов контактної взаємодії із кусково-однорідним трансверсально-ізотропним простором.

Нижче розглянуто неосесиметричну задачу про тонке міжфазне жорстке відшароване включення в кусково-однорідному трансверсально-ізотропному просторі. Задачу за допомогою розривного розв'язку [17, 18] зведено до двовимірної системи СІР, яку розв'язано в явному вигляді і отримано розподіл напруження в околі включення, вирази для узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) і необхідний критерій визначення міцності біля включення.

Постава та система СІР задачі. Нехай у площині $z = 0$ з'єднання двох різних трансверсально-ізотропних півпросторів розташовано абсолютно жорстке включення, що займає область Ω. До включення прикладене довільне навантаження, дію якого прирівнювали до дії рівнодійної сили $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$ і головного моменту $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$. Розташування граней включення після деформації описують функції

$$\zeta_6^{\pm} = \zeta_6^0 + \vartheta_0^{\pm}(x, y), \quad \zeta_k^{\pm} = \zeta_k^0, \; k = 4,5; \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$\zeta_4^0 = \delta_x - \phi_z y, \quad \zeta_5^0 = \delta_y + \phi_z x, \quad \zeta_6^0 = \delta_z + \phi_y x + \phi_x y, \tag{1}$$

де $\vartheta_0^{\pm}(x, y)$ – товщина включення, якщо $z = \pm 0$; $\delta_x, \delta_y, \delta_z$, ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z – поступальні переміщення та кути повороту включення навколо відповідних осей.

Контактна особа: О. Ф. КРИВИЙ, e-mail: krivoy-odessa@ukr.net

Нехай верхня грань включення ($z = +0$) зчеплена з півпростором ($z > 0$), а нижня ($z = –0$) відшарована від іншого півпростору. Відомими в області Ω є функції $\zeta_6^+ = \vartheta_0^+(x,y) + \zeta_6^0,\ \zeta_4^+ = \zeta_4^0,\ \zeta_5^+ = \zeta_5^0,\qquad \zeta_j^- = f_j^-,\ j = \overline{1,3};\qquad$ де $\qquad \zeta_k^\pm = \gamma_k(x,y,\pm 0),$ $\vec{\gamma} = \{\gamma_k\}_{k=\overline{1,6}} = \{\sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, u, v, w\},\quad f_j^-(x,y)$ – навантаження, прикладені до нижнього півпростору. Врахувавши умови $\chi_k^- = 0,\ (x,y) \notin \Omega,\quad k = \overline{1,6}\quad (\chi_k^\pm = \gamma_k(x,y,+0) \pm \gamma_k(x,y,-0))$ і подання $\{\chi_j^+\}_{j=\overline{1,6}} = \{2\zeta_1^- + \chi_1^-, 2\zeta_2^- + \chi_2^-,\quad 2\zeta_3^- + \chi_3^-,$ $2\zeta_4^+ - \chi_4^-,\quad 2\zeta_5^+ - \chi_5^-,\quad 2\zeta_6^+ - \chi_6^-\}$, поставлену задачу за допомогою двовимірних сингулярних інтегральних співвідношень для кусково-однорідного трансверсально-ізотропного простору [17, 18] звели відносно функцій $h_1, \tau = h_3 + ih_2,$ $u = h_4 + ih_5, h_6,\ \{h_k(x,y)\}_{k=\overline{1,6}} = \{\chi_k^-(x,y)\}_{k=\overline{1,6}}$ до системи шести двовимірних СІР:

$$
\begin{gathered}
(q_{11} - 1)h_1 + \frac{q_{13}}{2}(\mathrm{D}\overline{u} + \overline{\mathrm{D}}u) - \frac{q_{12}}{2}(\overline{\mathrm{D}}\mathrm{K}[\tau] + \mathrm{DK}[\overline{\tau}]) - q_{14}\mathrm{D}\overline{\mathrm{D}}\mathrm{K}[h_6] = h_1^*,\\
(\frac{q_{22}^+}{2} - 1)\tau - q_{24}\mathrm{D}h_6 + q_{21}\mathrm{DK}[h_1] + \frac{q_{22}^-}{2}\mathrm{DK}_0[\overline{\tau}] - \frac{q_{23}^+}{2}\mathrm{D}\overline{\mathrm{D}}\mathrm{K}[u] - \frac{q_{23}^-}{2}\mathrm{D}^2\mathrm{K}[\overline{u}] = \tau_*,\\
(\frac{q_{22}^+}{2} - 1)\overline{\tau} - q_{24}\overline{\mathrm{D}}h_6 + q_{21}\overline{\mathrm{D}}\mathrm{K}[h_1] + \frac{q_{22}^-}{2}\overline{\mathrm{D}}\overline{\mathrm{K}}_0[\tau] - \frac{q_{23}^+}{2}\overline{\mathrm{D}}\mathrm{DK}[\overline{u}] - \frac{q_{23}^-}{2}\overline{\mathrm{D}}^2\mathrm{K}[u] = \overline{\tau}_*,\\
(\frac{q_{33}^+}{2} - 1)\mathrm{u} - q_{31}\overline{\mathrm{K}}_0[h_1] + \frac{q_{32}^+}{2}\mathrm{K}[\tau] + \frac{q_{32}^-}{2}\mathrm{DK}[\vartheta\overline{\tau}] + \frac{q_{33}^-}{2}\mathrm{D}\overline{\mathrm{K}}_0[\overline{u}] + q_{34}\mathrm{DK}[h_6] = u_*,\\
(\frac{q_{33}^+}{2} - 1)\overline{\mathrm{u}} - q_{31}\mathrm{K}_0[h_1] + \frac{q_{32}^+}{2}\mathrm{K}[\overline{\tau}] + \frac{q_{32}^-}{2}\overline{\mathrm{D}}\mathrm{K}[\overline{\vartheta}\tau] + \frac{q_{33}^-}{2}\overline{\mathrm{D}}\mathrm{K}_0[u] + q_{34}\overline{\mathrm{D}}\mathrm{K}[h_6] = \overline{u}_*,\\
q_{44}h_6 + q_{41}\mathrm{K}[h_1] + \frac{q_{42}}{2}(\mathrm{K}_0[\tau] + \overline{\mathrm{K}}_0[\overline{\tau}]) - q_{43}\left(\overline{\mathrm{D}}\mathrm{K}[u] + \mathrm{DK}[\overline{u}]\right) = h_6^*,
\end{gathered}
\tag{2}
$$

де $\{h_j^*\}^6 = 2\{\zeta_1^-, \zeta_2^-, \zeta_3^-, \zeta_4^+, \zeta_5^+, \zeta_6^+\};\ \tau_* = h_3^* + ih_2^*; u_* = h_4^* + ih_5^*;\ \omega = (x - \varsigma) + i(y - \xi);$ $\mathrm{K}[f] = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_\Omega \frac{f(\varsigma,\xi)}{r_0}d\varsigma d\xi\ ;\ \mathrm{K}_0[f] = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_\Omega \frac{f(\varsigma,\xi)}{\omega}d\varsigma d\xi;\ \partial_1 \equiv \frac{\partial}{\partial x};\ \partial_2 \equiv \frac{\partial}{\partial y};\ \partial_3 \equiv \frac{\partial}{\partial z};$ $r_0 = \sqrt{\omega\overline{\omega}};\ D = \partial_1 + i\partial_2;\ q_{kn}, q_{kn}^\pm, \tilde{q}_{kn}$ – сталі, подані через коефіцієнти узагальненого закону Гука [19]. Величини $\delta_x, \delta_y, \delta_z, \phi_x, \phi_y, \phi_z$ визначали зі шести рівнянь рівноваги:

$$
\begin{gathered}
\iint\limits_\Omega \chi_k^-(x,y)\,dx\,dy = \mathrm{P}_k,\ k = \overline{1,3},\\
\iint\limits_\Omega \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\chi_1^-(x,y)\,dx\,dy = \begin{pmatrix} \mathrm{M}_2 \\ \mathrm{M}_1 \end{pmatrix},\qquad \iint\limits_\Omega (x\chi_2^-(x,y) - y\chi_3^-(x,y))\,dx\,dy = \mathrm{M}_3.
\end{gathered}
\tag{3}
$$

Розв’язання задачі для кругового включення. Нехай включення займає в площині $z = 0$ круг $\Omega = \left\{\sqrt{x^2 + y^2} \le a\right\}$. Перейдемо в системі (2) до циліндричної системи координат (ρ, φ, z) і введемо нові невідомі функції $\nu_1 = h_1(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi);$ $\nu_2 = \tau(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)e^{-i\varphi};\quad \nu_3 = u(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)e^{-i\varphi};\quad \nu_4 = h_6(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$, які розшукуємо так:

$$\nu_k(\rho,\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n^k(\rho)e^{in\varphi},\quad V_n^k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\nu_k(\rho,\varphi)e^{-in\varphi}d\varphi,\ \ k=1,2,3,4. \tag{4}$$

Для визначення коефіцієнтів $V_n^k(\rho)$ застосували схему, описану раніше [14–16, 20]. Кількість доданків у розвиненнях (4) залежить від товщини включення і, як правило, обмежена. Нехай, наприклад, товщина включення, якщо $z = +0$, осесиметрична, тобто описується функцією $\vartheta_0^+=\vartheta_0(x^2+y^2)$, тоді в розвиненні (4) залишаться три доданки, якщо $n=-1,0,1$. Стрибки напружень і переміщень для тонкого включення за сталих навантажень $\mathbf{P}^0=\{P_j^0\}^3$, $f_j^-=P_j^0$ подаємо так:

$$\nu_1^-(\rho,\varphi)=-\frac{1}{\pi\rho}\frac{d}{d\rho}\int_\rho^a\frac{t\eta_{10}(t)dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}}-\frac{2}{\pi}\operatorname{Re}e^{i\varphi}\frac{d}{d\rho}\int_\rho^a\frac{\eta_{11}(t)dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}},$$

$$\nu_2^-(\rho,\varphi)=-\frac{1}{\pi}\frac{d}{d\rho}\int_\rho^a\frac{(\eta_{20}(t)+\eta_{30}(t))dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}}-$$

$$-\frac{\rho}{\pi}e^{i\varphi}\frac{d}{d\rho}\frac{1}{\rho^2}\int_\rho^a\frac{(\eta_{21}(t)+\eta_{31}(t))tdt}{\sqrt{t^2-\rho^2}}-\frac{1}{\pi\rho}e^{-i\varphi}\frac{d}{d\rho}\int_\rho^a\frac{(\overline{\eta}_{21}(t)-\overline{\eta}_{31}(t))tdt}{\sqrt{t^2-\rho^2}},$$

$$\nu_3^-(\rho,\varphi)=-\frac{1}{\pi\rho}\int_\rho^a\frac{\eta_{40}(t)+\eta_{50}(t)}{\sqrt{t^2-\rho^2}}tdt-\frac{2}{\pi}\int_\rho^a\frac{\operatorname{Re}(\eta_{41}(t)e^{i\varphi})+i\operatorname{Im}(\eta_{51}(t)e^{i\varphi})}{\sqrt{t^2-\rho^2}}dt,$$

$$\nu_4^-(\rho,\varphi)=-\frac{1}{\pi}\int_\rho^a\frac{\eta_{40}(t)dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}}-\frac{2}{\pi\rho}\operatorname{Re}e^{i\varphi}\int_\rho^a\frac{\eta_{41}(t)dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}}, \tag{5}$$

де $\eta_{j0}=\rho(\mu_{j2}^0\omega_2^c+\mu_{j3}^0\omega_1^s)+\mu_{j1}^0\omega_1^c+\mu_{j4}^0\omega_2^s$; $\tilde{\eta}_{j0}=i(\rho\tilde{\mu}_{10}\omega_j^*+\tilde{\mu}_{20}\omega_{j+1}^*)$;

$\eta_{j1}=\rho(\mu_{j1}\omega_1^c+\mu_{j4}\omega_2^s)+\mu_{j2}\omega_2^c+\mu_{j1}^0\omega_2^s$; $\tilde{\eta}_{j1}=\rho\tilde{\mu}_{11}\omega_j^*+\tilde{\mu}_{21}\omega_{j+1}^*$;

$$\omega_j^{c,s}=\left[\left(\frac{\rho+a}{a-\rho}\right)^{\alpha_0}+(-1)^{j+1}\left(\frac{\rho+a}{a-\rho}\right)^{-\alpha_0}\right]\begin{pmatrix}\cos\\ \sin\end{pmatrix}\left(\beta_0\ln\left|\frac{\rho+a}{a-\rho}\right|\right);\quad \tilde{\omega}_j=\left(\frac{a+\rho}{a-\rho}\right)^{(-1)^{j+1}\tilde{\alpha}_0};$$

$\omega_j^*=(\tilde{\kappa}_*)^{-0,5}(\tilde{\omega}_1+(-1)^{j+1}\tilde{\omega}_2)$; $\alpha_0+i\beta_0=\frac{i}{2\pi}\ln\frac{1-i\lambda_0}{1+i\lambda_0}$; $\tilde{\alpha}_0=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\tilde{\lambda}_0$; $\lambda_0,\tilde{\lambda}_0,\tilde{\mu}_{jk}$,

μ_{jk}^m – записано через коефіцієнти системи (2) і компоненти векторів $\mathbf{P}=\{P_j\}^3$, $\mathbf{P}^0$, $\mathbf{M}=\{M_j\}^3$. Використовуючи ці компоненти, із умов (3) отримали також вирази для поступальних і кутових зміщень включення після деформації:

$$\delta_z=-c_z\frac{P_3}{a}-c_z^0aP_3^0,\quad \begin{pmatrix}\delta_x\\ \delta_y\end{pmatrix}=-\frac{c_{xy}}{a}\begin{pmatrix}P_1\\ P_2\end{pmatrix}+c_{xy}^0a\begin{pmatrix}P_1^0\\ P_2^0\end{pmatrix}+\frac{c_{xy}^m}{a^2}\begin{pmatrix}M_2\\ M_1\end{pmatrix},$$

$$\phi_z=s_z\frac{M_3}{a^3},\quad \begin{pmatrix}\phi_x\\ \phi_y\end{pmatrix}=\frac{s_{xy}}{a^2}\begin{pmatrix}P_2\\ P_1\end{pmatrix}-s_{xy}^0\begin{pmatrix}P_2^0\\ P_1^0\end{pmatrix}-\frac{s_{xy}^m}{a^3}\begin{pmatrix}M_1\\ M_2\end{pmatrix}.$$

Коефіцієнти впливу $c_z,c_z^0,c_{xy},c_{xy}^0,c_{xy}^m,s_z,s_{xy},s_{xy}^0,s_{xy}^m$, які подані через пружні сталі півпросторів, суттєво залежать від пружних сталих матеріалу верхнього півпростору (табл. 1).

Таблиця 1. Коефіцієнти впливу для комбінацій матеріалів *m*1, *m*2

Комбінація	$\frac{c_z}{s_z}\cdot 10^{11}$	$c_z^0\cdot 10^{11}$	$\frac{c_{xy}}{s_{xy}}\cdot 10^{11}$	$\frac{c_{xy}^0}{s_{xy}^0}\cdot 10^{11}$	$\frac{c_{xy}^m}{s_{xy}^m}\cdot 10^{11}$
$m1-m1$	$\frac{1{,}8786}{3{,}2146}$	4,3970	$\frac{4{,}2964}{2{,}7603}$	$\frac{2{,}5667}{1{,}4151}$	$\frac{1{,}0060}{9{,}5283}$
$m2-m2$	$\frac{3{,}8992}{5{,}6954}$	9,1658	$\frac{7{,}9266}{1{,}0111}$	$\frac{4{,}3690}{1{,}8459}$	$\frac{1{,}4030}{2{,}0325}$
$m1-m2$	$\frac{1{,}8563}{3{,}1786}$	2,9041	$\frac{4{,}2964}{2{,}7603}$	$\frac{2{,}5667}{1{,}4151}$	$\frac{1{,}0060}{9{,}5283}$
$m2-m1$	$\frac{3{,}5238}{6{,}1166}$	10,1923	$\frac{7{,}9266}{1{,}0111}$	$\frac{4{,}3690}{1{,}8459}$	$\frac{1{,}4030}{2{,}0325}$

Примітка: *m*1 – комбінації кераміки А ($BaTiO_3$) [21]; *m*2 – кераміки PZT-4 [22].

Показники особливостей α_0 і $\tilde{\alpha}_0$ для комбінацій відомих трансверсально-ізотропних матеріалів задовольняють умови $0<\alpha_0<0{,}5;\ \ 0<\tilde{\alpha}_0<0{,}5$. Для однорідного простору $\alpha_0=\tilde{\alpha}_0=0{,}25$ (табл. 2). Слід зауважити, що сума відповідних показників особливостей за заміни матеріалів місцями дорівнює 0,5. Описані вище закономірності справедливі і для інших комбінацій матеріалів [21, 22] моноклінної системи.

Таблиця 2. Показники особливості α_0 і $\tilde{\alpha}_0$ і біпружна стала β_0 для комбінацій матеріалів *m*1, *m*2

Комбінація	α_0	$\tilde{\alpha}_0$	β_0	Комбінація	α_0	$\tilde{\alpha}_0$	β_0
$m1-m1$	0,250	0,250	0,0498	$m1-m2$	0,201	0,164	0,0492
$m2-m2$	0,250	0,250	0,0332	$m2-m1$	0,299	0,336	0,0304

Використовуючи подання (5) та відомі інтегральні співвідношення [17, 18], напруження в площині $z=0$ поза включенням подамо так:

$$\sigma_z\big|_{z=0}=\frac{1}{\pi}\int_0^a\frac{t(q_{12}\eta_{20}(t)+q_{14}\eta_{40}(t))-2\rho\,\mathrm{Re}(e^{i\varphi}(q_{12}\eta_{21}(t)+q_{14}\eta_{41}(t)))}{(\rho^2-t^2)^{3/2}}dt+v_1^*(\rho,\varphi),$$

$$\tau_{z\rho}\big|_{z=0}=\frac{1}{\pi}\int_0^a\frac{\mathrm{Re}[q_{21}(\rho\eta_{10}(t)+2te^{i\varphi}\eta_{11}(t))+q_{23}(\rho\eta_{30}(t)+2te^{i\varphi}\eta_{31}(t))]}{(\rho^2-t^2)^{3/2}}dt+v_2^*(\rho,\varphi),$$

$$\tau_{z\phi}\big|_{z=0}=\frac{\tilde{q}_{12}}{\pi}\int_0^a\frac{\mathrm{Im}(\rho\eta_{20}(t)+2te^{i\varphi}\eta_{21}(t))}{(\rho^2-t^2)^{3/2}}dt+v_3^*(\rho,\varphi),\quad \rho>a, \tag{6}$$

де $v_k^*,(k=1,\,2,\,3)$ – відомі обмежені функції.

Розрахунок узагальнених КІН. Скориставшись поданнями (6) та результатами праць [16, 14], отримаємо такі асимптотичні розвинення, якщо $\rho\to a+0$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{t^k\omega_j^{c,s}(t)dt}{(\rho^2-t^2)^{3/2}}=$$

$$= \frac{a^{k-3/2}}{4\sqrt{2}\sqrt{\rho-a}}\left(\gamma_0\omega_{j+1}^{c,s}(\rho) - \begin{pmatrix}\gamma_0\\ \xi_0\end{pmatrix}(1\pm(-1)^j) \mp \xi_0\omega_j^{s,c}(\rho)\right) + O(\rho^{\varepsilon-\frac{1}{2}-\alpha_0}),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{t^k\omega_j^*(t)dt}{(\rho^2-t^2)^{3/2}} = \frac{a^{k-3/2}}{4\sqrt{2}\tilde{\lambda}_0\sqrt{\rho-a}}\left(\omega_{j+1}^*(\rho) - 1 - (-1)^j\right) + O(\rho^{\varepsilon-\frac{1}{2}-\tilde{\alpha}_0}), \quad \varepsilon > 0, \quad (7)$$

де $\gamma_0 = \operatorname{Re}\lambda_0^{-1}\sqrt{\kappa_0}$; $\xi_0 = \operatorname{Im}\lambda_0^{-1}\sqrt{\kappa_0}$; $\kappa_0 = 1+\lambda_0^2$.

Застосувавши розвинення (7) і формули (6), здобудемо асимптотичні подання напружень, якщо $\rho \to a+0$:

$$\left.\begin{pmatrix}\sigma_z\\ \tau_{z\rho}\end{pmatrix}\right|_{z=0} = \frac{1}{\sqrt{\rho-a}}\left\{\sum_{\pm}(\rho-a)^{\mp\alpha_0}\left[\begin{pmatrix}k_{11}^{\pm}\\ k_{21}^{\pm}\end{pmatrix}\cos(\beta_0\vartheta(\rho)) + \begin{pmatrix}k_{12}^{\pm}\\ k_{22}^{\pm}\end{pmatrix}\sin(\beta_0\vartheta(\rho))\right] + \begin{pmatrix}k_{10}\\ k_{20}\end{pmatrix}\right\},$$

$$\left.\tau_{z\varphi}\right|_{z=0} = \frac{1}{\sqrt{\rho-a}}\{k_{31}(\rho-a)^{-\tilde{\alpha}_0} + k_{32}(\rho-a)^{\tilde{\alpha}_0} + k_{33}\}, \quad \vartheta(\rho) = \ln\frac{\rho-a}{2a}, \quad (8)$$

де $k_{j1}^{\pm} = \pm(2a)^{\pm\alpha_0-1/2}\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{2}q_{j,s}(t_{1k}^j \pm t_{2k}^j)$; $k_{j2}^{\pm} = \pm(2a)^{\pm\alpha_0-1/2}\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{2}q_{j,s}(t_{3k}^j \pm t_{4k}^j)$;

$s = 2k+1-j$; $k_{j0} = -(2a)^{-1/2}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}q_{j,s}t_{1k}^j$; $k_{j0} = -(2a)^{-1/2}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}q_{j,s}t_{1k}^j$;

$k_{33} = \frac{-1}{\tilde{\lambda}_0\sqrt{2a}}\tilde{q}_{12}[a\tilde{\mu}_{12}^0 + 2\operatorname{Im}e^{i\varphi}\tilde{\mu}_{12}^1]$; $t_{lk}^j = (-1)^{k(j-1)}[a^{2-l}(\gamma_0\mu_{s,3-l}^0 + \xi_0\mu_{s,2+l}^0) +$

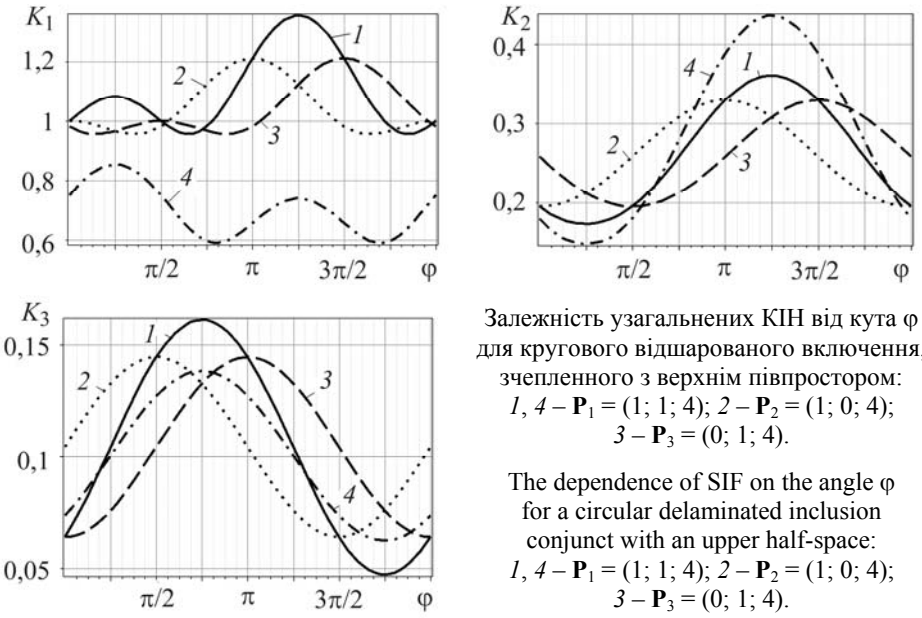
$+(-1)^j 2a^{l-1}\operatorname{Re}e^{i\varphi}(\gamma_0\mu_{s,3-l}^1 + \xi_0\mu_{s,2+l}^1)]$, $l = 1,2$; $t_{lk}^j = (-1)^{k(j-1)}[\gamma_0 a^{l-3}\mu_{s,l+1}^0 - \xi_0\mu_{s,l-2}^0 +$

$+(-1)^j 2a^{4-l}\operatorname{Re}e^{i\varphi}(\gamma_0\mu_{s,l+1}^1 - \xi_0\mu_{s,l-2}^1)]$, $l = 3,4$;

$k_{3j} = 0,25(\tilde{\lambda}_0)^{-1}\tilde{q}_{12}(2a)^{\pm\tilde{\alpha}_0-1/2}[a\tilde{\mu}_{12}^0 \pm \tilde{\mu}_{22}^0 + 2\operatorname{Im}e^{i\varphi}(\tilde{\mu}_{12}^1 \pm a\tilde{\mu}_{22}^1)]$, $j = 1,2$.

Як і в працях [3, 4, 14, 23, 24], коефіцієнти $K_j = \sqrt{(k_{j1}^+)^2 + (k_{j2}^+)^2}$, $j = 1,2$, $K_3 = k_{31}$ в асимптотичному розвиненні напружень (8) можна розглядати як узагальнені КІН і використати для визначення напрямку максимальної концентрації напружень поблизу включення за виконання умови $\langle w\rangle_{z=0}^- > 0$, $(0 \le \rho < a$, $0 \le \varphi < 2\pi)$, яка свідчить про відшарування включення від нижнього півпростору. Умова виконуватиметься для комбінацій матеріалів *m*1, *m*2, зокрема, для відносних значень рівнодійної навантажень на включенні $\mathbf{P}_1 = (4;1;1)$, $\mathbf{P}_2 = (4;1;0)$, $\mathbf{P}_3 = (4;0;1)$, за відсутності навантаження нижнього півпростору $\mathbf{P}^0 = (0,0,0)$, і відносного головного моменту на включенні $\mathbf{M} = (0;0;0,5)$. Побудовані (див. рисунок) залежності узагальнених КІН K_1, K_2, K_3 від кута φ для вказаних навантажень. Криві *1–3* побудовані за навантажень $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ для комбінації матеріалів *m*1–*m*2, крива *4* – за навантаження $\mathbf{P}_1$ для однорідного простору *m*2–*m*2. За наявності дотичних складників навантажень $P_2 \ne 0$ або $P_3 \ne 0$ всі три КІН залежать від полярного кута φ. Для кожного із векторів $\mathbf{P}_k$ можна визначити кути φ, за яких ці коефіцієнти досягають максимального та мінімального значень. Наприклад, при $\mathbf{P}_1 = (4;1;1)$ (крива *1*) КІН K_1 і K_2 досягають найбільшого значення за ку-

та 5π/4, а K_3 – за кута 3π/4. Максимальним є значення K_1, яке більш ніж утричі перевищує значення K_2 і на порядок – K_3. Суттєво на концентрацію напружень в околі відшарованого включення впливає неоднорідність (криві *1* і *4*) і помітно – на значення показників особливостей $\alpha_0, \tilde{\alpha}_0$ і біпружної сталої β_0 (див. табл. 2). Припускали, що локальне руйнування визначає критерій [27] $f(K_{\mathrm{I}}, K_{\mathrm{II}}, K_{\mathrm{III}}) = 0$, де f – деяка функція, яку знаходять із експерименту.



Залежність узагальнених КІН від кута φ для кругового відшарованого включення, зчепленного з верхнім півпростором: *1*, *4* – $\mathbf{P}_1 = (1; 1; 4)$; *2* – $\mathbf{P}_2 = (1; 0; 4)$; *3* – $\mathbf{P}_3 = (0; 1; 4)$.

The dependence of SIF on the angle φ for a circular delaminated inclusion conjunct with an upper half-space: *1*, *4* – $\mathbf{P}_1 = (1; 1; 4)$; *2* – $\mathbf{P}_2 = (1; 0; 4)$; *3* – $\mathbf{P}_3 = (0; 1; 4)$.

ВИСНОВКИ

Вперше аналітично отримано вирази для контактних напружень і зміщень в області відшарування для кругового міжфазного відшарованого включення, а також вирази для напружень поза включенням у площині з'єднання різних трансверсально-ізотропних півпросторів. З допомогою узагальненого підходу Нейбера–Новожилова для композитів [28–30] необхідний критерій міцності подано у вигляді

$$\max_{0\le\varphi<2\pi} K_1 \le d_1^{0,5+\alpha_0}\left(\frac{1}{2}-\alpha_0\right)\sigma_m, \qquad \max_{0\le\varphi<2\pi} K_2 \le d_2^{0,5+\alpha_0}\left(\frac{1}{2}-\alpha_0\right)\tau_{\rho m},$$

$$\max_{0\le\varphi<2\pi} K_3 \le d_3^{0,5+\tilde{\alpha}_0}\left(\frac{1}{2}-\tilde{\alpha}_0\right)\tau_{\varphi m},$$

де σ_m, $\tau_{\rho m}$, $\tau_{\varphi m}$ – граничні міцності композита без включення за розтягу, зсуву і закруту; d_j – структурні його характеристики [28–30]. Наведені результати дають можливість отримати розв'язки неосесиметричних задач за складніших умов взаємодії міжфазних включень зі середовищем, зокрема, з урахуванням смуги передруйнування Леонова–Панасюка ($\delta_{\Pi} \ne 0$), а отже, подати достатні критерії визначення міцності [29, 30] в околі міжфазних включень.

РЕЗЮМЕ. Построено в явном виде решение неосесимметричной задачи о круговом межфазном отслоившемся включении в кусочно-однородном трансверсально-изотропном пространстве при произвольной нагрузке. Получены асимптотики решений, выражения для обобщенных коэффициентов интенсивностей напряжений на границе включения, а также их значения для некоторых сочетаний трансверсально-изотропных материалов.

SUMMARY. The solution of a non-axisymmetric problem on the circular interface delaminated inclusion in the non-uniform transversally isotropic space under different loading was constructed in the explicit form. The asymptotic of solutions, expressions for the generalized stress intensity factors at the inclusion boundary and also the value of the indicated coefficients for some combinations of the transversally isotropic materials was obtained.

1. *Кривой А. Ф., Радиолло М. В.* Особенности поля напряжений возле включений в составной анизотропной плоскости // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1984. – № 3. – С. 84–92.
2. *Кривий О. Ф.* Тунельні включення в кусково-однорідному анізотропному просторі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 2. – С. 55–66.
3. *Кривой А. Ф., Попов Г. Я.* Межфазные туннельные трещины в составном анизотропном пространстве // Прикл. математика и механика. – 2008. – **72**, № 4. – С. 689–700.
   (*Krivoi A. F., Popov G. Ya.* Interface tunnel cracks in a composite anisotropic space // J. Appl. Mathemat. and Mech. – 2008. – **77**, № 4. – P. 499–507.)
4. *Кривой А. Ф., Попов Г. Я.* Особенности поля напряжений возле туннельных включений в неоднородном анизотропном пространстве // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 6. – С. 36–45.
   (*Krivoi A. F., Popov G. Ya.* Features of the stress field near tunnel inclusions in an inhomogeneous anisotropic space // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, № 6. – P. 626–634.)
5. *Selvadurai A. P. S.* Elastostatic bounds for the stiffness of an elliptical disc inclusion embedded at a transversely isotropic bi-material interface // J. Appl. Mathemat. and Physics. – 1985. – **35**, № 1. – С. 13–23.
6. *Ефимов В. В., Кривой А. Ф., Попов Г. Я.* Задачи о концентрации напряжений возле кругового дефекта в составной упругой среде // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1998. – № 2. – С. 42–58.
   (*Efimov V. V., Krivoi A. F., Popov G. Ya.* Problems on the stress concentration near a circular imperfection in a composite elastic medium // Izv. AN. Mechanics of Solids. – 1998. – № 2. – P. 42–58.)
7. *Hasegawa H. and Kisaki M.* The Stress Field Caused by a Circular Cylindrical Inclusion in a Transversely Isotropic Elastic Solid // Trans. ASME: J. Appl. Mech. – 2003. – **70**, № 6. – P. 825–8312.
8. *Монастирський Б., Качиньські А.* Контактна взаємодія двох пружних півпросторів з круговим концентратором // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – **46**, № 3. – С. 47–57.
   (*Monastyrs'kyi B. and Kaczynski A.* Contact interaction of two elastic half spaces with circular groove // Materials Science. – 2010. – **46**, № 3. – P. 336–347.)
9. *Остpик В. І., Улитко А. Ф.* Осесиметрична контактна задача для міжфазної тріщини // Там же. – 2004. – **40**, № 1. – С. 21–26.
   (*Ostryk V. I. and Ulitko A. F.* Axisymmetric contact problem for an interface crack // Materials Science. – 2004. – **40**, № 1. – P. 20–28.)
10. *Barber J. R. and Ting T. C. T.* Three-dimensional solutions for general anisotropy // J. of the Mech. and Physics of Solids. – 2008. – **55**, № 9. – P. 353–368.
11. *Pan E.* Three-Dimensional Green's Functions in Anisotropic Elastic Bimaterials with Imperfect Interfaces // Trans. ASME: J. Appl. Mech. – 2003. – **70**, № 2. – P. 180–190.
12. *Phan A. V., Gray L. J., and Kaplan T.* Residue approach for evaluating the 3D anisotropic elastic Green's function: multiple roots // Engng. Analysis with Boundary Elements. – 2005. – **9**, № 6. – P. 570–576.
13. *Силованюк В. П.* Руйнування попередньо напружених і трансверсально-ізотропних тіл із дефектами. – Львів: Фіз.-мех. ін-т ім. Г. В. Карпенка НАН України, 2000. – 298 с.
14. *Кривий О. Ф.* Кругова міжфазна тріщина в неоднорідному трансверсально-ізотропному просторі // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2011. – **46**, № 6. – С. 47–57.
   (*Kryvyi O. F.* Interface crack in the inhomogeneous transversely isotropic space // Materials Science. – 2012. – **47**, № 6. – P. 726–736.)
15. *Кривий О. Ф.* Міжфазні кругові включення в кусково-однорідному трансферсально-ізотропному просторі // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2010. – Вип. 8. – С. 173–183.

16. *Кривий О. Ф.* Міжфазні кругові включення при змішаних умовах в кусково-однорідному трансверсально-ізотропному просторі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54**, № 2. – С. 89–102.

(*Kryvyy O. F.* Interface circular inclusion under mixed conditions of interaction with a piecewise homogeneous transversally isotropic space // J. of Mathemat. Sciences. – 2012. – **184**, № 1. – P. 101–119.)

17. *Kryvyy O.* The Discontinuous Solution for the Piece-homogeneous Transversal Isotropic Medium // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2009. – **191**. – P. 387–398.
18. *Кривий О. Ф.* Сингулярні інтегральні співвідношення і рівняння для кусково-однорідного трансверсально-ізотропного простору з міжфазними дефектами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 1. – С. 23–35.

(*Kryvyy O. F.* Singular integral relations and equations for a piecewise homogeneous transversally isotropic space with interphase defects // J. Math. Sci. – 2011. – **176**, № 4. – P. 515–531.)

19. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
20. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М.: Наука, 1982. – 344 с.
21. *Александров К. С., Рыжова Т. В.* Упругие свойства кристаллов. Обзор // Кристаллография. – 1961. – **6**, № 2. – С. 289–314.
22. *Royer D., Dieulesaint E.* Elastic Waves in Solids I: Free and Guided Propagation. – Berlin: Spriner, 2000. – 364 c.
23. *Панасюк В. В.* Механіка руйнування та міцність матеріалів: досягнення та перспективи // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – **40**, № 3. – С. 5–18.

(*Panasyuk V. V.* Fracture mechanics and strength of materials: advances and prospects // Materials Science. – 2004. – **40**, № 3. – P. 305–319.)

24. *Саврук М. П.* Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами // Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пос. / Под ред. В. В. Панасюка. – К.: Наук. думка, 1988. – **2**. – 620 с.
25. *Меньшиков В. А.* Задача механики разрушения для биматериала с круговой межфазной трещиной под воздействием волны растяжения-сжатия // Доп. НАН України. – 2007. – № 11. – С. 71–75.
26. *Меньшиков В. А.* Задача механики разрушения для биматериала с дискообразной межслоевой трещиной под воздействием волны сдвига // Там же. – 2008. – № 12. – С. 74–78.
27. *Черепанов Г. П.* Механика разрушений композиционных материалов. – М.: Наука, 1983. – 296 с.
28. *Морозов Н. Ф.* Математические вопросы теории трещин. – М.: Наука, 1984. – 256 с.
29. *Корнев В. М.* Необходимые и достаточные критерии разрушения композита с хрупким связующим. 2. Слабое армирование // Прикл. механика и техн. физика. – 2002. – **43**, № 3. – С. 152–160.
30. *Корнев В. М., Демешкин А. Г.* Необходимые и достаточные критерии разрушения композита с хрупким связующим. 2. Армирование высокопрочными волокнами // Там же. – 2003. – **44**, № 3. – С. 148–156.

Одержано 26.10.2012