

К теории эффекта Джозефсона в диффузионном туннельном контакте

Е. В. Безуглый, Е. Н. Братусь, В. П. Галайко

*Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины,
Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47
E-mail: bezugly@ilt.kharkov.ua*

Статья поступила в редакцию 16 сентября 1998 г.

Теоретически исследованы особенности равновесного токового состояния туннельного джозефсоновского контакта диффузионных сверхпроводников (с длиной пробега l , малой по сравнению с длиной когерентности ξ_0) в одномерной геометрии, когда растекание тока в берегах контакта отсутствует. Показано, что в этой ситуации понятие «слабой связи» со скачком фазы параметра порядка $\Phi \sim 1$ существует только при достаточно малой прозрачности барьера $\Gamma \ll l/\xi_0 \ll 1$; в противном случае наличие туннельного перехода практически не сказывается на распределении модуля и фазы параметра порядка. Установлено, что при протекании джозефсоновского тока в окрестности туннельного барьера возникают локализованные состояния электронных возбуждений, которые представляют собой континуальный аналог андреевских уровней в баллистическом контакте, причем глубина соответствующей «потенциальной ямы» существенно превышает расстояние андреевского уровня от границы непрерывного спектра при одинаковой прозрачности барьера. В отличие от баллистического контакта, где джозефсоновский ток полностью переносится локализованными возбуждениями, в диффузионном контакте вклад в ток вносит вся область спектра вблизи границы энергетической щели, где плотность состояний существенно отличается от ее невозмущенного значения. Вычислена поправка к току Джозефсона $j(\Phi)$ во втором порядке по прозрачности контакта, содержащая вторую гармонику скачка фазы Φ , и установлено, что в теории возмущений для диффузионного контакта истинным параметром разложения $j(\Phi)$ является не вероятность туннелирования Γ , а существенно больший параметр $W = (3\xi_0/4l)\Gamma$. Это облегчает условия экспериментального наблюдения высших гармоник $j(\Phi)$ в контактах с регулируемой прозрачностью барьера.

Теоретично досліджено особливості рівноважного струмового стану тунельного джозефсонівського контакту дифузійних надпровідників (з довжиною пробігу l , малою в порівнянні із довжиною когерентності ξ_0) у одновимірній геометрії, коли розтікання струму у берегах контакту є відсутнім. Показано, що в цій ситуації поняття «слабкого зв'язку» із стрибком фази параметру впорядкування $\Phi \sim 1$ існує лише при достатньо малій прозорості бар'єру $\Gamma \ll l/\xi_0 \ll 1$; у протилежному випадку наявність тунельного переходу практично не відбивається на розподілі модуля та фази параметру впорядкування. Встановлено, що при протіканні джозефсонівського струму в оточенні тунельного бар'єру виникають локалізовані стани електронних збуджень, що являють собою континуальний аналог андріївських рівней у балістичному контакті, при цьому глибина відповідної «потенційної ями» істотно перевищує відстань андріївського рівня від границі неперервного спектру при однаковій прозорості бар'єру. На відміну від балістичного контакту, де джозефсонівський струм повністю переноситься локалізованими збудженнями, у дифузійному контакті внесок у струм вносить уся область спектра біля границі енергетичної щілини, де густина станів істотно відрізняється від її незбуреного значення. Обчислено поправку до струму Джозефсона $j(\Phi)$ у другому порядку по прозорості контакту, що містить другу гармоніку стрибка фази Φ , і встановлено, що в теорії збурень для дифузійного контакту дійсним параметром розкладу $j(\Phi)$ є не імовірність тунелювання Γ , а істотно більший параметр $W = (3\xi_0/4l)\Gamma$. Це полегшує умови експериментального спостереження вищих гармонік $j(\Phi)$ у контактах з регульованою прозорістю бар'єру.

PACS: 74.50.+r

1. Введение

В последнее время достигнут значительный прогресс в технологии изготовления низкоомных туннельных контактов со сравнительно высокой прозрачностью барьера Γ (вероятностью туннелирования). В первую очередь это относится к контактам в месте излома сверхпроводящих нитей (controlled break-junctions [1]), а также к системам на основе двумерного электронного газа [2], проводимость которых при изменении параметров барьера претерпевает кроссовер от туннельной к металлической. Проблема расчета джозефсоновского тока через контакт произвольной прозрачности в баллистическом режиме (длина свободного пробега $l \gg \xi_0$, ξ_0 — длина когерентности) была решена многими авторами [3] в модели одномодового контакта с массивными токоподводящими берегами, обеспечивающими быстрое «растекание» сверхтекучего тока и равенство модуля параметра порядка Δ на барьере его объемному значению (условие «жесткости» Δ).

В одномерной геометрии, например в планарном контакте или сверхпроводящем канале с туннельным барьером*, задача существенно усложняется вследствие изменения параметра порядка и энергетического спектра квазичастиц в окрестности контакта, вносящего вклад в ток-фазовую зависимость $j(\Phi)$. В пределе малой прозрачности $\Gamma \ll 1$ соответствующие поправки к $j(\Phi)$ порядка Γ^2 для чистого ($l \gg \xi_0$) сверхпроводника были найдены в [4]:

$$\delta j(\Phi) = -\alpha(T)I(\Delta)\Gamma \left(\sin \Phi - \frac{1}{2} \sin 2\Phi \right), \quad \alpha(T) \sim 1, \quad (1)$$

$$I(\Delta) = \frac{\pi}{4} e v_F v_F \Gamma \Delta = I_c(\Delta) / \text{th}(\Delta/2T), \quad (2)$$

где v_F — плотность состояний; v_F — фермиевская скорость; $I_c(\Delta)$ — критический ток контакта.

В диффузионном сверхпроводнике («грязный» предел $l \ll \xi_0 = \sqrt{D/2\Delta}$, $D = v_F l/3$ — коэффициент диффузии) возможность расчета джозефсоновского тока при произвольной Γ представляется проблематичной** даже в простой модели, не учитывающей изменения параметра порядка вблизи контакта, с привлечением численных методов решения уравнений для функций Грина, усредненных по ансамблю рассеивателей. Дело в том, что граничные условия для изотроп-

ных функций Грина $\hat{g}(\mathbf{r}, t_1 t_2)$ на контакте, полученные впервые в [7],

$$-l(\hat{g}\nabla\hat{g})_L = -l(\hat{g}\nabla\hat{g})_R = \frac{3}{4} \left\langle \frac{\mu d(\mu)}{r(\mu)} \right\rangle [\hat{g}_L \cdot \hat{g}_R], \quad (3)$$

$$r(\mu) = 1 - d(\mu),$$

где $d(\cos \theta)$ — вероятность туннелирования электрона, налетающего на барьер под углом θ , а индексами R, L отмечены значения справа и слева от барьера, справедливы лишь в первом порядке малости усредненной по углам прозрачности $\Gamma = \langle \mu d(\mu) \rangle$. Как показано в [8], в общем случае ($d \sim 1$) вывод граничных условий сводится к анализу системы нелинейных интегральных уравнений для членов разложения усредненной функции Грина $\hat{g}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_1 t_2) = \hat{g}(\mathbf{r}, t_1 t_2) + \mathbf{p}\hat{g}_1(\mathbf{r}, t_1 t_2) + \dots$ по полиномам Лежандра. Решение этой задачи удается получить лишь при $\Gamma \ll 1$, представляя правую часть (3) в виде ряда по степеням Γ , который был использован в [8] для вычисления поправок к джозефсоновскому току порядка Γ^2 .

В настоящей работе мы хотим обратить внимание на тот факт, что в одномерной геометрии задача о вычислении ток-фазового соотношения диффузионного контакта в принципе имеет смысл только при его малой прозрачности. Действительно, несложные оценки с использованием известной формулы для $j(\Phi)$ в первом порядке по Γ , которая в силу теоремы Андерсона совпадает с результатом Амбегаокара–Баратова [9] для чистого сверхпроводника

$$j_0(\Phi) = I(\Delta) \text{th} \frac{\Delta}{2T} \sin \Phi, \quad (4)$$

показывают, что уже при $\Gamma \sim l/\xi_0 \ll 1$ критический ток контакта становится порядка объемного термодинамического критического тока $n_s e v_{sc}$, где $v_{sc} \sim 1/m\xi_0$ — критическая скорость конденсата; $n_s \sim m v_F D \Delta$ — его плотность; m — масса электрона; $\hbar = 1$. Таким образом, при $\Gamma \gg l/\xi_0$ туннельный контакт вообще перестает играть роль «слабой связи» со скачком фазы параметра порядка Φ и другими атрибутами джозефсоновского элемента. Это обстоятельство можно заметить уже из граничных условий (3), используя в окрестности контакта оценку $\nabla\hat{g} \sim \hat{g}/\xi_0$, из которой вытекает, что при $\Gamma \gg l/\xi_0$ в главном при-

* Поперечные размеры контакта предполагаются малыми по сравнению с джозефсоновской глубиной проникновения, что обеспечивает однородность тока по сечению контакта.

** Исключение составляет лишь случай температур, близких к критической, когда наличие малого параметра Δ/T_c позволяет сформулировать эффективную вычислительную схему решения этой задачи [5,6].

ближении $[\hat{g}_L, \hat{g}_R] \sim \sin \Phi \rightarrow 0^*$. Указанный критерий слабой связи может быть сформулирован и в терминах проводимости системы в нормальном состоянии: сопротивление контакта должно превышать сопротивление слоя токоподводящего металла толщиной $\sim \xi_0$.

Из сказанного следует, что в теории эффекта Джозефсона в диффузионных контактах фундаментальную роль играет параметр

$$W = (3\xi_0/4l)\Gamma \gg \Gamma \quad (5)$$

(множитель $3/4$ выбран из соображений удобства обозначений), которому можно приписать смысл эффективной вероятности туннелирования куперовских пар, превышающей обычную вероятность туннелирования квазичастиц Γ . Малые значения $W \ll 1$ отвечают режиму слабой связи (эффект Джозефсона); в области $W > 1$ наличие туннельного барьера практически не сказывается на протекании сверхтекучего тока и распределении параметра порядка в диффузионном сверхпроводнике. Более того, следует ожидать, что именно W , а не Γ , является истинным параметром разложения $j(\Phi)$ по прозрачности барьера, поскольку теорема Андерсона (в данном контексте — утверждение об отсутствии джозефсоновского тока от длины пробега) справедлива лишь в главном приближении по Γ (4) и, следовательно, эта зависимость должна проявлять себя в высших порядках разложения $j(\Phi)$ появлением в них дополнительного безразмерного параметра ξ_0/l , исчезающего при $l \rightarrow \infty$. Выполненный в разд. 4 настоящей работы расчет поправок к ток-фазовой зависимости (3) в следующем порядке по W подтверждает эти соображения и показывает, что поправки $\sim \Gamma^2$ к граничным условиям (3) и джозефсоновскому току (4), найденные в [8], в действительности несущественны.

Другим важным результатом анализа токового состояния диффузионного джозефсоновского контакта, полученным в данной работе, является вывод о возникновении локализованных состояний электронных возбуждений в окрестности барьера. Это явление хорошо известно в баллистическом туннельном контакте [10,11], в котором при протекании тока от непрерывного спектра отделяются дискретные энергетические уровни

$$\epsilon_n(\Phi) = \pm \Delta (1 - d \sin^2 \Phi/2)^{1/2}, \quad (6)$$

связанные с андреевской локализацией электронных возбуждений в окрестности скачка фазы

параметра порядка. Аналогичное явление возникает и в диффузионном контакте, в котором, однако, существование изолированных когерентных уровней невозможно вследствие рассеяния электронов на примесях и дефектах. В этом случае наиболее адекватным является описание изменения энергетического спектра возбуждений на языке их локальной плотности состояний $N(\epsilon, \mathbf{r}) = \text{Re } u^+(\epsilon, \mathbf{r})$ (u^+ — диагональная часть запаздывающей функции Грина сверхпроводника), которая для краткости предполагается нормированной на ее значение в нормальном металле v_F . В отсутствие тока плотность состояний в однородном сверхпроводнике имеет стандартный вид $N_0(\epsilon) = |\epsilon| \Theta(\epsilon^2 - \Delta^2) / \sqrt{\epsilon^2 - \Delta^2}$ ($\Theta(x)$ — функция Хевисайда) с корневыми особенностями на границе щели. В токовом состоянии импульс сверхтекучего конденсата p_s выступает как распаривающий фактор, приводящий к сглаживанию особенностей $N(\epsilon)$ и уменьшению энергетической щели $2\epsilon_*$ на величину $\Delta - \epsilon_*(p_s) \sim (Dp_s^2)^{2/3}$ [12]. В окрестности слабой связи аналогичным (и основным) фактором, подавляющим энергетическую щель, является скачок фазы Φ , который, как показано в разд. 3, приводит к формированию «потенциальной» ямы шириной порядка ξ_0 , содержащей локализованные возбуждения с энергией $|\epsilon| < \Delta$.

2. Уравнения для функций Грина джозефсоновского контакта с малой прозрачностью

Для вычисления плотности состояний и равновесного сверхтекучего тока

$$j = \frac{1}{4} e v_F v_F D \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon f_0(\epsilon) \text{Tr } \sigma_z (\hat{g}^+ \nabla \hat{g}^+ - \hat{g}^- \nabla \hat{g}^-)(\epsilon) \quad (7)$$

необходимо решить уравнения для матричных запаздывающих (опережающих) функций Грина $\hat{g}^\pm(\mathbf{r}, \epsilon)$, усредненных по ансамблю рассеивателей:

$$[\sigma_z \epsilon + \Delta \exp(i\sigma_z \chi) i\sigma_y, \hat{g}] = iD \nabla (\hat{g} \nabla \hat{g}), \quad (8)$$

$$\hat{g}^2 = 1. \quad (9)$$

Здесь Δ, χ — модуль и фаза параметра порядка; $f_0(\epsilon) = (1/2)[1 + \text{th}(\epsilon/2T)]$ — равновесная функция распределения.

Согласно условию нормировки функции Грина (9), матрица \hat{g} может быть представлена в виде $\hat{g} = \sigma \mathbf{u}$, где σ — вектор, составленный из матриц

* Строго говоря, в этом соотношении вместо скачка фазы параметра порядка фигурирует скачок фазы функции Грина, однако при $\Gamma \ll 1$ эти величины практически совпадают (см. разд. 4).

Паули. Пользуясь известными соотношениями $(\sigma\mathbf{a})(\sigma\mathbf{b}) = \mathbf{ab} + i\sigma[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$, $[\sigma_z, \sigma] = 2i[\sigma \times \mathbf{s}]$, где \mathbf{s} — единичный вектор «изотопического спина», направленный вдоль оси z в пространстве матриц Паули, можно получить из (3), (8), (9) уравнения и граничные условия для векторной функции Грина \mathbf{u} :

$$\varepsilon[\mathbf{s} \times \mathbf{u}] + i\Delta[\boldsymbol{\chi} \times \mathbf{u}] = (D/2) \nabla [\mathbf{u} \times \nabla \mathbf{u}], \quad \mathbf{u}^2 = 1, \quad (10)$$

$$\xi_0[\mathbf{u} \times \nabla \mathbf{u}]_{L,R} = 2W[\mathbf{u}_L \times \mathbf{u}_R], \quad (11)$$

где $\boldsymbol{\chi} = (\sin \chi, \cos \chi, 0)$ — символический вектор фазы параметра порядка.

Выделяя проекцию вектора \mathbf{u} на направление \mathbf{s} : $\mathbf{u} = \mathbf{s}u + i\mathbf{v}$ ($\mathbf{v}\mathbf{s} = 0$), спроектируем уравнения (10) на плоскость (x, y) в пространстве матриц Паули:

$$\varepsilon\mathbf{v} - \Delta u\boldsymbol{\chi} = (iD/2) \nabla (u\nabla\mathbf{v} - \mathbf{v}\nabla u), \quad u^2 - \mathbf{v}^2 = 1 \quad (12)$$

и введем единичный вектор $\boldsymbol{\psi} = (\sin \psi, \cos \psi, 0)$, направленный вдоль \mathbf{v} : $\mathbf{v} = \boldsymbol{\psi}v$, где $\psi(\mathbf{r}, \varepsilon)$ — фаза «аномальной» функции Грина v ($\nabla\boldsymbol{\psi} = [\boldsymbol{\psi} \times \mathbf{s}]\nabla\psi$). Полученная система скалярных уравнений является одним из возможных представлений уравнений Узаделя:

$$\varepsilon v - \Delta u \cos(\psi - \chi) = (iD/2)[\nabla(u\nabla v - v\nabla u) - uv(\nabla\boldsymbol{\psi})^2], \quad (13)$$

$$\Delta v \sin(\psi - \chi) = (iD/2)\nabla(v^2\nabla\boldsymbol{\psi}), \quad (14)$$

$$u^2 - v^2 = 1, \quad (15)$$

а ее решения определяют величину сверхтекучего тока (7) согласно

$$j(\Phi) = -ev_F D \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon f_0 \operatorname{Im} (v^+)^2 \nabla\boldsymbol{\psi}^+. \quad (16)$$

Выбирая координатную ось x перпендикулярно плоскости контакта $x = 0$ ($\chi(+0) = -\chi(-0) = \Phi/2$) и учитывая непрерывность функций Грина и антисимметрию их производных, нетрудно получить из (11) граничные условия к уравнениям (13), (14) при $x \rightarrow +0$:

$$\xi_0(u\nabla v - v\nabla u)(0) = 4Wu(0)v(0) \sin^2 \psi(0), \quad (17)$$

$$\xi_0(v\nabla\boldsymbol{\psi})(0) = 2Wv(0) \sin 2\psi(0). \quad (18)$$

Вдали от контакта поведение фаз параметра порядка и функции Грина описывается линейной асимптотикой, отвечающей заданному значению тока

$$\xi(+\infty) = \boldsymbol{\psi}(+\infty) = \boldsymbol{\chi}_\infty + 2p_s x, \quad p_s = (W/\xi_0) \sin \Phi, \quad (19)$$

т. е. сверхтекучего импульса p_s , величина которого в главном приближении определяется условием равенства тока на контакте (4) его значению $j = \pi ev_F D p_s \Delta \operatorname{th}(\Delta/2T)$ в объеме металла, а функции Грина стремятся к их асимптотическим значениям, удовлетворяющим уравнениям (13)–(15) при $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\chi}$ и $\nabla u = \nabla v = 0$.

Используя параметризацию $u = \operatorname{ch} \theta$, $v = \operatorname{sh} \theta$, учитывающую условие нормировки (15), можно сопоставить вектор-функции Грина \mathbf{u} следующий наглядный геометрический образ [13]. В нормальном металле единичный вектор \mathbf{u} направлен вдоль оси изоспина z (что соответствует чисто электронному либо дырочному состоянию возбуждения ферми-газа), в то время как в сверхпроводнике он отклонен на мнимый угол $i\theta$ и повернут вокруг оси изоспина на азимутальный угол ψ . Очевидно, что в пространственно-однородном случае этот угол совпадает с фазой параметра порядка: $\psi = \chi$, и скалярные функции Грина u , v описываются следующими выражениями:

$$u^\pm = \operatorname{ch} \theta_s = \frac{\varepsilon}{\sqrt{(\varepsilon \pm i0)^2 - \Delta^2}}, \quad (20)$$

$$v^\pm = \operatorname{sh} \theta_s = \frac{\Delta}{\sqrt{(\varepsilon \pm i0)^2 - \Delta^2}},$$

где $\pm i0$ определяет положение особенностей запаздывающей (опережающей) функции Грина в комплексной плоскости ε , а квадратный корень в (20) определен таким образом, что $u^\pm \rightarrow \pm 1$ при $\varepsilon \rightarrow +\infty$.

Уравнения для функций Грина (13)–(15) должны быть дополнены условиями самосогласования для модуля и фазы параметра порядка

$$\Delta = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon f_0 \operatorname{Re} v^+, \quad (21)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon f_0 \operatorname{Re} v^+ \sin(\psi^+ - \chi) = 0, \quad (22)$$

где λ — константа сверхпроводящего взаимодействия. Учитывая закон сохранения тока (уравнения (14), (22)), удобно вычислять его значение на барьере ($x \rightarrow +0$), выразив $\nabla\boldsymbol{\psi}(0)$ в (16) с помощью (18) через величину скачка фазы $2\psi(0)$:

$$j(\Phi) = -\frac{e}{2} v_F v_F \Gamma \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon f_0 \operatorname{Im} (v^+(0))^2 \sin 2\psi^+(0), \quad (23)$$

что позволяет явно выделить малый параметр теории — прозрачность барьера Γ . Нетрудно убедиться в том, что в главном приближении, использующем невозмущенные значения функций Грина (20) и фазы $\psi(0) \approx \chi(0) = \Phi/2$, формула (23) приводит к результату (4).

Упрощающим обстоятельством при малой прозрачности барьера является то, что величины $\psi - \chi$ и $\nabla\psi$, пропорциональные току через контакт, малы (см. (18), (14)) и, следовательно, в уравнении (13) можно опустить квадратичные по W слагаемые, содержащие фазу. Заменяя в граничных условиях (17), (18) с той же точностью $\psi(0) \approx \chi(0) = \Phi/2$, получаем уравнение и граничное условие для параметра θ :

$$\begin{aligned} \epsilon \operatorname{sh} \theta - \Delta(x) \operatorname{ch} \theta &= (iD/2)\nabla^2\theta, \quad (24) \\ \xi_0 \nabla\theta(0) &= 2W \operatorname{sh} 2\theta(0) \sin^2 \Phi/2, \\ \theta(+\infty) &= \theta_s. \end{aligned} \quad (25)$$

Попытка непосредственного применения теории возмущений к решению уравнения (24) ($\theta(x) = \theta_0 + \theta_1(x)$, $\Delta(x) = \Delta_0 + \Delta_1(x)$) приводит к выражению для поправки $\theta_1(x)$, содержащему неинтегрируемые особенности на границах щели и, как следствие, к расходимости соответствующей поправки к джозефсоновскому току (4). Это обстоятельство связано с упомянутым во введении возникновением локализованных состояний квазичастиц на туннельном контакте в токовом состоянии, обсуждению которых посвящен следующий раздел.

3. Локализованные состояния на туннельном барьере

Как будет видно из дальнейшего, глубина «потенциальной ямы» в окрестности барьера существенно превосходит масштаб изменения параметра порядка, поэтому для изучения поведения плотности состояний достаточно ограничиться рассмотрением модели с постоянным значением Δ , в рамках которой уравнение (24) имеет простое решение, описывающее затухание возмущения функций Грина на расстоянии $\sim \xi_0$ от барьера:

$$\operatorname{th} \frac{\theta(x) - \theta_s}{4} = \operatorname{th} \frac{\theta(0) - \theta_s}{4} \exp(-k_\epsilon |x|), \quad (26)$$

$$k_\epsilon^{-2} = i\xi_0^2 \operatorname{sh} \theta_s, \quad \operatorname{Re} k_\epsilon > 0.$$

Величина $\theta(0)$ удовлетворяет граничному условию, вытекающему из (25), (26):

$$k_\epsilon \xi_0 \operatorname{sh} \frac{\theta_s - \theta(0)}{2} = \gamma \operatorname{sh} 2\theta(0), \quad (27)$$

$$\gamma = W \sin^2 \Phi/2 \ll 1,$$

которое сводится к алгебраическому уравнению 8-й степени относительно $z = \exp \theta(0)$:

$$2z^3(z - z_s)^2 = i\gamma^2 (z_s^2 - 1) (z^4 - 1)^2, \quad z_s = \exp \theta_s. \quad (28)$$

В общем случае (при произвольных ϵ) решение уравнения (28) может быть получено только численно, однако наличие малого параметра γ в (27), (28) позволяет использовать теорию возмущений. Вдали от границы спектра в правой части (27) можно положить $\theta(0) = \theta_s$, откуда следует выражение для поправки к плотности состояний на барьере:

$$N(\epsilon, 0) - N_0(\epsilon) = -2\gamma \operatorname{Re} (\sqrt{i \operatorname{sh}^3 \theta_s} \operatorname{sh} 2\theta_s), \quad (29)$$

которое, очевидно, неприменимо при $|\epsilon| \rightarrow \Delta$, где $|\theta_s| \rightarrow \infty$. В этой области необходимо использовать усовершенствованную теорию возмущений (УТВ), предполагая $|z|, |z_s| \gg 1$ при произвольном (не обязательно малом) значении $z - z_s$, что не только понижает порядок общего уравнения (28), но и позволяет представить его в универсальной форме, не содержащей параметра распаривания γ :

$$\begin{aligned} (y\sqrt{E} - 1)^2 &= iy^5, \quad y = z/\beta\sqrt{2}, \\ E &= \beta^2 (\epsilon - \Delta)/\Delta, \quad \beta = (2/\gamma)^{1/5} \gg 1. \end{aligned} \quad (30)$$

Соотношения (30) показывают, что нарастание плотности состояний при приближении к границе спектра ограничено величиной порядка $\beta \sim W^{-2/5}$, а область применимости обычной теории возмущений (29) определяется условием $(\epsilon - \Delta)/\Delta \gg \beta^{-2}$ и перекрывается с областью применимости УТВ $(\epsilon - \Delta)/\Delta \ll 1$. Граница спектра ϵ_* (положение дна потенциальной ямы), ниже которой плотность состояний обращается в нуль, соответствует появлению чисто мнимого корня уравнения (30) в точке $E_* = -(25/6)(2/3)^{1/5} \approx -3,842$:

$$\begin{aligned} \epsilon_*(\Phi) &= \Delta \left[1 - C \left(W \sin^2 \frac{\Phi}{2} \right)^{4/5} \right], \\ C &= \frac{25}{3 \cdot 6^{1/5}} \approx 5,824. \end{aligned} \quad (31)$$

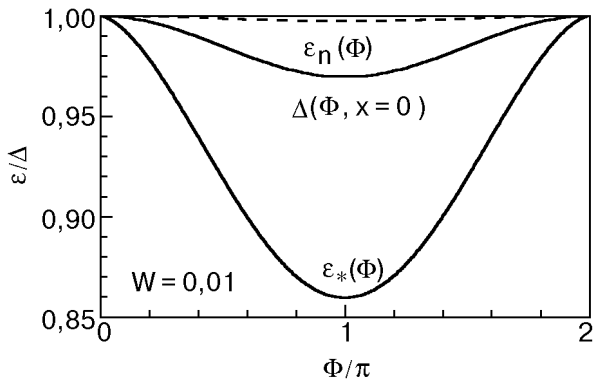


Рис. 1. Зависимость положения дна «потенциальной ямы» ϵ_* (31) и параметра порядка $\Delta(0)$ (49) в окрестности туннельного контакта от разности фаз Φ (сплошные линии) при $T = 0$, $W = 0,01$ и $\xi_0/l = 5$. Для сравнения штриховой линией изображено положение андреевского уровня в чистом однододовом контакте (5) при той же его прозрачности.

Зависимость положения границы спектра от величины скачка фазы на контакте приведена на рис. 1, на котором для сравнения изображена аналогичная зависимость положения андреевского уровня (6) в контакте между чистыми сверхпроводниками. Отметим, что масштаб изменений $\epsilon_*(\Phi)$ существенно превышает величину отщепления андреевского уровня от границы непрерывного спектра при одной и той же прозрачности барьера; это связано как с большей величиной параметра распаривания γ в диффузионном случае по сравнению с параметром отщепления андреевского уровня Γ , так и с большим численным значением константы C , определяющей сдвиг границы спектра (31). На рис. 2 приведены результаты численного расчета плотности состояний на контакте по общей формуле (28) при различных значениях параметра распаривания, из которых видно, что, помимо корневой ($\sim\sqrt{\epsilon - \epsilon_*}$) особой точки на границе спектра, величина $N(\epsilon)$ обладает «клювообразной» корневой особенностью при $\epsilon = \Delta$. Ее физическая природа обусловлена неограниченным возрастанием длины затухания k_ϵ^{-1} возмущения функции Грина (26) в окрестности границы щели в объеме металла. При $\epsilon_* < \epsilon < \Delta$ плотность состояний экспоненциально убывает при удалении от контакта на расстояния $\geq \xi_0$ (рис. 3), что качественно соответствует образу потенциальной ямы глубиной $\Delta - \epsilon_*$ и шириной $\sim \xi_0$ с локализованными в ней возбуждениями.

Как известно, в баллистическом контакте джозефсоновский ток полностью переносится локализованными возбуждениями и может быть представлен в следующей наглядной форме:

$$j(\Phi) = -2e \sum_n \frac{\partial \epsilon_n(\Phi)}{\partial \Phi} \text{th} \frac{\epsilon_n(\Phi)}{2T}, \quad (32)$$

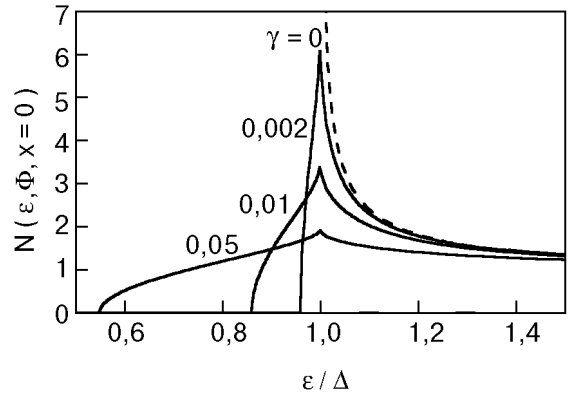


Рис. 2. Зависимость плотности состояний на туннельном барьере $N(\epsilon, \Phi, 0)$ от энергии квазичастиц при различных значениях параметра распаривания $\gamma = W \sin^2(\Phi/2)$ (сплошные линии). Штриховой линией показана энергетическая зависимость невозмущенной плотности состояний $N_0(\epsilon)$.

где индекс n нумерует андреевские уровни. В то же время формула для тока (23), выраженная в приближении УТВ через приведенные переменные (30),

$$j(\Phi) \approx -I(\Delta) \text{th} \frac{\Delta}{2T} \sin \Phi \int_{E_*(\Phi)}^{\infty} \frac{dE}{\pi} \text{Im}(y^+)^2 = j_0(\Phi) \quad (33)$$

показывает, что в диффузионном контакте перенос заряда осуществляется не только состояниями в потенциальной яме ($E < 0$, $\epsilon < \Delta$), но и возбуждениями с энергией $\epsilon > \Delta$ в области $\epsilon - \Delta \sim \Delta\beta^{-2}$, где плотность состояний заметно отличается от невозмущенного значения $N_0(\epsilon)$. В этой связи отметим, что в работе [14] был предложен аналог формулы (32) для диффузионной системы, который может быть получен заменой энергии андреевских уровней $\epsilon_n(\Phi)$ локальным значением энергии возбуждений $\epsilon(\xi, \Phi, x)$ при $x = 0$, адиабатически деформированным сверхтекучим током, с

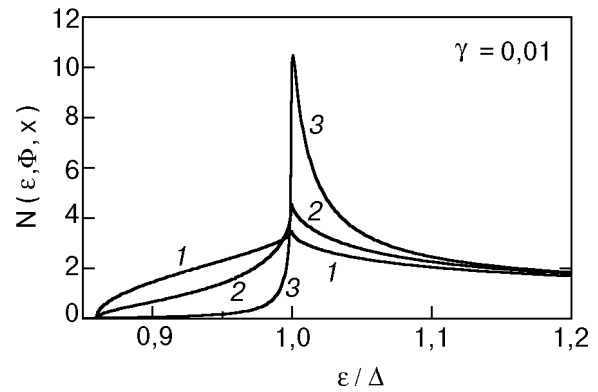


Рис. 3. Энергетическая зависимость плотности состояний $N(\epsilon, \Phi, x)$ при $\gamma = 0,01$ на различных расстояниях x от диффузионного туннельного контакта: 0 (1); ξ_0 (2); $5\xi_0$ (3).

использованием вместо дискретного номера n непрерывной переменной

$$\xi = \int_{\varepsilon_*(\Phi)}^{\varepsilon(\xi, \Phi, x)} d\varepsilon' N(\varepsilon', \Phi, x) \quad (34)$$

— числа состояний с энергией, меньшей ε (в однородном сверхпроводнике $\xi = \Theta(\varepsilon^2 - \Delta^2) \times \sqrt{\varepsilon^2 - \Delta^2}$). Можно предположить, что совместный учет вкладов связанных и делокализованных состояний в ток Джозефсона осуществляется формулой

$$j(\Phi) = -2ev_F \int_0^\infty d\xi \frac{\partial \varepsilon(\xi, \Phi, 0)}{\partial \Phi} \operatorname{th} \frac{\varepsilon(\xi, \Phi, 0)}{2T}, \quad (35)$$

которая, однако, приводит к правильным результатам лишь в случае однородного токового состояния (где роль Φ играет $\nabla\chi$) или широкого SNS-контакта (с шириной нормальной прослойки $L \gg \xi_0$) и неприменима для узкого мостика и туннельного контакта. Тем не менее использование функции $\varepsilon(\xi, \Phi, x)$ оказывается полезным и в этих случаях, поскольку дает возможность наглядно представить изменение энергетического распределения квазичастичных состояний в окрестности контакта (рис. 4).

4. Ток-фазовая зависимость контакта во втором порядке по W

Изложенная в предыдущем разделе усовершенствованная теория возмущений для функций Грина в энергетическом представлении хотя и является физически наиболее наглядным методом, оперирующим с реальными энергиями возбуждений, однако приводит к значительным формальным затруднениям при вычислении поправок к току Джозефсона (4). Действительно, как показано в предыдущем разделе, выражение для $j(\Phi)$, вычисленное с использованием УТВ для функций Грина (33), совпадает с (4), поскольку малый параметр УТВ β^{-2} выпадает после перехода к приведенным переменным (30). Таким образом, для вычисления интересующих нас поправок к (4) необходим выход за пределы приближения (30), корректно описывающего поведение функций Грина только в узкой области сингулярности

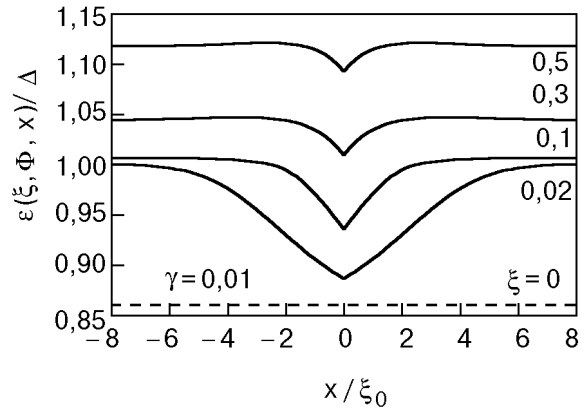


Рис. 4. Линии уровня числа состояний квазичастиц в окрестности контакта $\xi(\varepsilon, \Phi, x) = \text{const}$ (34) при $\gamma = 0,01$ и различных значениях ξ . Штриховой линией показано положение дна «потенциальной ямы» ($\xi = 0, \varepsilon = \varepsilon_*(\Phi)$).

плотности состояний. С этой целью удобно использовать формализм температурных функций Грина, переходя от интегрирования по энергии в (21)–(23) к суммированию по мацубаровским частотам $\omega_n = \pi T(2n + 1)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$:

$$j(\Phi) = -\pi ev_F v_F \Gamma T \sum_{\omega_n > 0} \operatorname{Re} v^2(0) \sin 2\psi(0), \quad (36)$$

$$\Delta(x) = -2\pi\lambda T \sum_{\omega_n > 0} \operatorname{Im} v(x) \quad (37)$$

и заменяя в уравнении (24) $\varepsilon \rightarrow i\omega_n$, что позволяет избежать расходимостей в теории возмущений вида (29), которая, в отличие от УТВ, дает возможность учесть пространственную зависимость $\Delta(x)$.

В качестве главного приближения в асимптотическом разложении $\theta = \theta_0 + \theta_1 + \dots$ целесообразно использовать «адиабатическое» значение функции Грина, отвечающее локальному значению $\Delta(x) = \Delta + \Delta_1(x)$ ($\Delta_1(\infty) = 0$):

$$u_0(x) = \operatorname{ch} \theta_0(x) = \frac{\omega_n}{\tilde{\omega}_n(x)}, \quad v_0(x) = \operatorname{sh} \theta_0(x) = \frac{\Delta}{\tilde{\omega}_n(x)}, \quad (38)$$

$$\tilde{\omega}_n(x) = \sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2(x)}.$$

В этом случае поправка $\theta_1(x)$ удовлетворяет неоднородному уравнению

$$\nabla^2 \theta_1 - k_\omega^2 \theta_1 = \nabla^2 \theta_0, \quad k_\omega^2 = 2\tilde{\omega}_n/D \quad (39)$$

* Понятие адиабатической деформации «уровней энергии» в непрерывном спектре сверхпроводящей диффузионной системы, находящейся в токовом состоянии, и их классификация с помощью непрерывного «квантового числа» ξ было впервые введено в работе [15] и систематически использовалось в [16].

с граничными условиями

$$\nabla\theta_1(+0) = 2W \operatorname{sh} 2\theta_s \sin^2 \Phi / 2, \quad \theta_1(\infty) = 0,$$

где $\operatorname{ch} \theta_s = \omega_n / \tilde{\omega}_n$ ($\tilde{\omega}_n = \sqrt{\omega_n^2 + \Delta^2}$) — значение функции Грина вдали от контакта с невозмущенной величиной Δ .

Условие самосогласования для $\Delta_1(x)$, вытекающее из уравнения (21),

$$\Delta_1(q)T \sum_{\omega_n > 0} \frac{\Delta^2}{\tilde{\omega}_n^3} = -T \sum_{\omega_n > 0} \frac{\omega_n}{\tilde{\omega}_n} \operatorname{Im} \theta_1(i\omega_n, q) \quad (40)$$

замыкает систему уравнений для определения поправок θ_1 , Δ_1 , решение которой в фурье-представлении имеет следующий вид:

$$\Delta_1(q) = -8W\Delta \frac{B(q)}{\xi_0 A(q)} \sin^2 \frac{\Phi}{2},$$

$$\theta_1(i\omega_n, q) = 8W\Delta \frac{i\omega_n}{\tilde{\omega}_n} \frac{1}{q^2 + k_\omega^2} \frac{A(0)}{\xi_0 A(q)} \sin^2 \frac{\Phi}{2}, \quad (41)$$

$$A(q) = A(0) + q^2 B(q), \quad A(0) = 2\pi T \sum_{\omega_n > 0} \frac{\Delta^2}{\tilde{\omega}_n^3}, \quad (42)$$

$$B(q) = 2\pi T \sum_{\omega_n > 0} \frac{\omega_n^2}{\tilde{\omega}_n^3} \frac{1}{q^2 + k_\omega^2},$$

$$\left(\theta_1(i\omega_n, x), \Delta_1(x) \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} e^{iqx} \left(\theta_1(i\omega_n, q), \Delta_1(q) \right).$$

Что касается поправки к асимптотическому значению (19) фазы функции Грина $\psi(x)$, то в рамках данного приближения она оказывается равной нулю. Для доказательства этого введем величину $\varphi = \psi - \chi \ll 1$, которая, согласно (14), удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \varphi - k_\omega^2 \varphi = -\nabla^2 \chi_1, \quad (43)$$

где $\chi_1 = \chi(x) - \chi(\infty)$ — локализованная вблизи контакта поправка к (19). С учетом вытекающего из (18), (19) граничного условия $\nabla\varphi(0) = -\nabla\chi_1(0)$ это уравнение имеет простое решение $\varphi(i\omega_n, q) = -q^2 \chi_1(q) / (q^2 + k_\omega^2)$, которое после подстановки в условие самосогласования (22) приводит к однородному интегральному уравнению для $\chi_1(q)$:

$$T \sum_{\omega_n > 0} \frac{\Delta}{\tilde{\omega}_n} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \frac{q^2 \cos qx}{q^2 + k_\omega^2} \chi_1(q) = 0. \quad (44)$$

Единственным несингулярным решением уравнения (44) является $\chi_1(q) \equiv 0$, что доказывает отсутствие поправки к джозефсоновскому току, обусловленной отличием поведения фаз параметра и функций Грина от линейного (19). Этот результат можно пояснить следующим образом: поправка $\chi_1(x)$, очевидно, порядка малой добавки $p_{s1}(x)$ к постоянному значению p_s (19) вблизи контакта, обеспечивающей сохранение тока при изменении $N(\epsilon)$ и Δ . Поскольку само значение $p_s \sim W$, добавка к нему, а вместе с ней $\chi_1(x)$ и φ — величины более высокого порядка малости ($\sim W^2$), чем интересующие нас поправки порядка W .

Подставляя найденное решение (41), (42) в формулу (23), находим искомую поправку к току Джозефсона:

$$\begin{aligned} \delta j &= j(\Phi) - j_0(\Phi) = -\frac{4T}{\Delta} I(\Delta) \sin \Phi \sum_{\omega_n > 0} \operatorname{Re} \left(v^2 + \frac{\Delta^2}{\tilde{\omega}_n^2} \right) = \\ &= -I(\Delta) W_0 Z(T) \left(\sin \Phi - \frac{1}{2} \sin 2\Phi \right), \quad (45) \end{aligned}$$

$$Z(T) = \frac{16}{\pi} \sqrt{\Delta \Delta_0} T \sum_{\omega_n > 0} \frac{\omega_n^2}{\tilde{\omega}_n^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{k^2 + \tilde{k}_\omega^2} \left(1 + \frac{\tilde{k}_\omega^2 B(k)}{A(k)} \right), \quad (46)$$

$$\tilde{k}_\omega = \frac{\tilde{\omega}_n}{\Delta},$$

где $A(k)$, $B(k)$ определяются формулами (42) с заменой $k_\omega \rightarrow \tilde{k}_\omega$; W_0 , Δ_0 — значения W , Δ при $T = 0$.

При низких температурах ($T \ll \Delta$) в формулах (42), (46) суммирование по ω_n можно заменить интегрированием по непрерывной переменной ω :

$$\begin{aligned} A(0) &= 1, \quad B(k) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{th}^2 v \, dv}{k^2 + \operatorname{ch} v} = \\ &= \frac{1}{k^4} \left[\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{1 - k^2} \operatorname{arctg} \left(\frac{1 - k^2}{1 + k^2} \right)^{1/2} - k^2 \right], \end{aligned}$$

что приводит к следующему асимптотическому значению функции $Z(T)$ при $T \rightarrow 0$:

$$Z(T) = \frac{8}{\pi^2} \int_0^{\infty} dk \left[\frac{\pi k^2}{(1+k^2)^{9/4}} + \frac{2B^2(k)}{1+k^2B(k)} \right] \approx 2,178, \quad (47)$$

$$T \ll \Delta.$$

В окрестности критической температуры ($\Delta \ll T$) величина $A(0) \approx 7\zeta(3)\Delta^2/4\pi^2T^2$ мала, и основной вклад в интеграл (46) вносит область малых волновых векторов $k \sim \Delta/T$, отвечающих затуханию возмущений на больших длинах порядка $\xi(T) \sim (T_c - T)^{-1/2}$. Это позволяет заменить функцию $B(k)$ ее значением $\pi\Delta/4T$ при $k = 0$:

$$Z(T) = \frac{32\sqrt{\Delta\Delta_0}}{\pi^3T} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} \int_0^{\infty} \frac{B(0) dk}{A(0) + k^2B(0)} = 2\pi \left(\frac{\pi\Delta_0}{7\zeta(3)T_c} \right)^{1/2} \approx 5,099, \quad \Delta \ll T. \quad (48)$$

Результаты численного расчета зависимости $Z(T)$ во всей области температур $0 < T < T_c$ приведены на рис. 5.

Аналогичным образом с помощью (41), (42) вычисляются асимптотические значения поправки $\Delta_1(0)$ к невозмущенному значению параметра порядка на контакте:

$$\frac{\Delta_1(0)}{\Delta_0} = -\alpha(T)W_0 \sin^2 \frac{\Phi}{2}, \quad \alpha(0) = 3,037, \quad (49)$$

$$\alpha(T_c) = 5,782.$$

Зависимость величины параметра порядка $\Delta(0)$ от скачка фазы на контакте при $T = 0$, изображенная на рис. 1, показывает, что основной вклад в подавление энергетической щели вносит механизм распаривания, обсуждавшийся в разд. 3, а изменение параметра порядка мало по сравнению с $\varepsilon_*(\Phi)$.

По своей структуре, а также фазовой и температурной зависимости поправка к джозефсоновскому току в диффузионном сверхпроводнике (45) практически совпадает с выражением (1) для контакта чистых металлов за исключением того обстоятельства, уже отмеченного во введении, что параметром разложения $j(\Phi)$ по прозрачности контакта при $l \ll \xi_0$ является не вероятность туннелирования Γ , а существенно больший параметр W (5). Это дает возможность наблюдать высшие гармоники ток-фазовой зависимости в сравнительно высокоомных диффузионных тун-

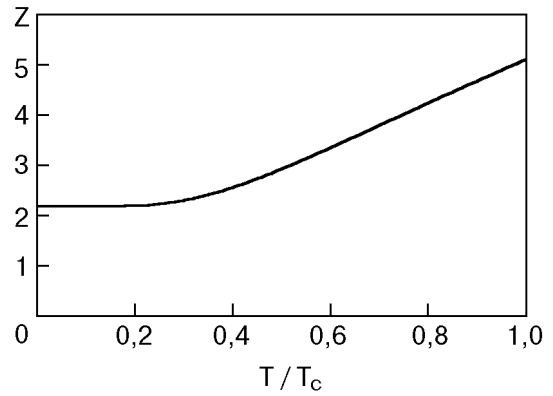


Рис. 5. Функция $Z(T)$ (46), определяющая температурную зависимость отношения $\delta j(\Phi)/I(\Delta)$ (45).

нельных контактах. По-видимому, о первых экспериментальных результатах в этой области сообщалось в работе [17].

Изложенная теория описывает ток-фазовую зависимость диффузионного джозефсоновского контакта во всей области температур $0 \leq T < T_c$ за исключением узкой окрестности T_c , где $\Delta/T_c \sim W_0$ (в чистом сверхпроводнике $\Delta/T_c \sim \Gamma$), и величина поправок (45), (1) сравнивается с $j_0(\Phi)$, а поправка к Δ (49) — с его невозмущенным значением. Это означает, что вблизи T_c в определении параметра W (5) вместо длины когерентности $\xi_0(T)$, описывающей характерный масштаб пространственных изменений функций Грина и плотности состояний, должна фигурировать характерная длина $\xi(T)$ изменения параметра порядка («healing length») теории Гинзбурга–Ландау, по порядку величины совпадающая с ξ_0 вдали от T_c . С учетом результатов вычисления $j(\Phi)$ для чистого сверхпроводника в окрестности T_c [5] можно получить следующую интерполяционную оценку параметра эффективной прозрачности W , пригодную при любых температурах и длинах свободного пробега:

$$W \sim \Gamma \xi(T) \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{\xi(0)} \right). \quad (50)$$

При приближении к T_c значение W неограниченно возрастает, что сопровождается уменьшением скачка фазы при заданном внешнем токе, ограниченном его критическим значением. Таким образом, в одномерной геометрии при сколь угодно большом нормальном сопротивлении контакта существует узкая область вблизи T_c , где разность фаз параметра порядка на контакте мала вплоть до значений тока порядка объемного критического.

Авторы благодарят Т. Н. Анцыгину и В. С. Шумейко за плодотворные обсуждения работы.

Работа поддержана Фондом фундаментальных исследований НАН Украины (грант № 2.4/136).

1. N. van der Post, E. T. Peters, I. K. Yanson, and J. M. van Ruitenbeek, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 2611 (1994).
2. H. Takayanagi, T. Akazaki, and J. Nitta, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3533 (1995).
3. W. Haberborn, H. Knauer, and S. Richter, *Phys. Status Solidi* **47**, K161 (1978); A. В. Зайцев, *ЖЭТФ* **86**, 1742 (1984); G. В. Arnold, *J. Low Temp. Phys.* **59**, 143 (1985).
4. Т. Н. Анцыгина, А. В. Свидзинский, *ТМФ* **14**, 412 (1973).
5. В. П. Галайко, А. В. Свидзинский, В. А. Слюсарев, *ЖЭТФ* **56**, 835 (1969).
6. Е. Н. Братусь, А. В. Свидзинский, *ТМФ* **30**, 239 (1977).
7. М. Ю. Куприянов, М. Ф. Лукничев, *ЖЭТФ* **94**, 139 (1987).
8. С. J. Lambert, R. Raimondi, V. Sweeney, and A. F. Volkov, *Phys. Rev.* **B55**, 6015 (1997).
9. V. Ambegaokar and A. Baratoff, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 486 (1963).
10. A. Furusaki and M. Tsukada, *Phys. Rev.* **B43**, 10164 (1991).
11. С. В. Куплевацкий, И. И. Фалько, *ФНТ* **17**, 961 (1991).
12. Ю. Н. Овчинников, *ЖЭТФ* **59**, 128 (1970).
13. Yu. V. Nazarov, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 1420 (1994).
14. N. Argaman, *cond-mat/9709001* (1997).
15. В. П. Галайко, *ЖЭТФ* **64**, 1824 (1973).
16. Е. В. Безуглый, А. Ю. Азовский, *ФНТ* **11**, 1248 (1985).
17. M. C. Koops, G. V. van Duynveldt, A. N. Omelyanchouk, and R. de Bruyn Ouboter, *Czech. J. Phys.* **46**, Suppl., 673 (1996).

To the theory of Josephson effect in a diffusive tunnel junction

E. V. Bezuglyi, E. N. Bratus', and V. P. Galaiko

The specific features of equilibrium current-carrying state of a Josephson junction between diffusive

superconductors (the electron mean free path l is less than the coherence length ξ_0) are studied theoretically in the 1D geometry where there is no spreading out of current in the junction banks. It is shown that in this situation the concept of weak link with a jump $\Phi \sim 1$ of the order parameter phase exists only at rather low transmissivity of a barrier, $\Gamma \ll l/\xi_0 \ll 1$; in the opposite case the distribution of the order parameter modulus and phase is virtually insensitive to the presence of the tunnel barrier. It is found that the passage of Josephson current gives rise to localized states of electron excitations in the vicinity of the tunnel barrier which are a continuous analogue of the Andreev levels in a ballistic junction. The depth of the corresponding «potential well» is substantially higher than the distance of the Andreev level to the energy spectrum boundary for the same value of transmissivity. In contrast with the ballistic junction where the Josephson current is completely transported by the localized excitations, in the diffusive junction the Josephson current is contributed by the whole region near the boundary of the energy gap where the density of states differs essentially from its unperturbed value. We calculated a correction to the Josephson current $j(\Phi)$ within the second approximation over the barrier transmissivity and found that the true expansion parameter of the perturbation theory for the diffusive junction was not the tunneling probability Γ but a much greater parameter $W = (3\xi_0/4l)\Gamma$. This makes the experimental observation of higher harmonics of $j(\Phi)$ in junctions of controllable transmissivity more easy.