УДК 539.3

ЕЛІПТИЧНА ТРІЩИНА У ПРОСТОРІ ПІД ДІЄЮ ТЕПЛОВОГО ПОТОКУ НА БЕЗМЕЖНОСТІ

М. М. СТАДНИК

Національний лісотехнічний університет України, Львів

Одержано аналітичний розв’язок системи двох сингулярних інтегродиференціальних рівнянь, до якої зведена тривимірна термопружна задача для тіла з термоізольованою еліптичною тріщиною, підданого на безмежності дії перпендикулярного до площини тріщини теплового потоку. Знайдено формули для обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень і проаналізовано вплив на них конфігурації тріщини для деяких важливих часткових випадків задачі.

Ключові слова: *інтегродиференціальні рівняння, термоізольована тріщина, тепловий потік.*

Розв’язки термопружних задач для тіл з тріщинами різної конфігурації необхідні для дослідження їх міцності методами механіки крихкого руйнування. Термопружна задача для термоізольованих кругової та тунельної тріщин у тілі за дії теплового потоку на безмежності розв’язана раніше [1–6]. Нижче розв’язано термопружну задачу для термоізольованої еліптичної тріщини у тілі за дії теплового потоку на безмежності і отримані подання для обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН).

Формулювання задачі та її розв’язок. Розглянемо тривимірне пружне тіло з термоізольованою еліптичною тріщиною. Систему прямокутних декартових координат *Oxyz* виберемо так, щоби її початок збігався з центром тріщини, вісь *Oz* була перпендикулярна до площини тріщини, тобто рівняння контуру тріщини мало вигляд $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. На безмежності тіло піддане дії теплового потоку інтенсивності q, який направлений перпендикулярно до площини тріщини. Мета роботи – визначити КІН вздовж контуру тріщини.

На основі результатів праці [7] задачу зведемо до системи двох сингулярних інтегродиференціальних рівнянь

$$\Delta\iint_S \frac{[\tilde{u}_x]_*}{R} d\xi d\eta + \mu \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\iint_S \frac{[\tilde{u}_y]_*}{R} d\xi d\eta - \frac{\partial}{\partial y}\iint_S \frac{[\tilde{u}_x]_*}{R} d\xi d\eta \right) = \\ = \alpha(1+\mu)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\iint_S [T]_* \frac{d\xi d\eta}{R};$$

$$\Delta\iint_S \frac{[\tilde{u}_y]_*}{R} d\xi d\eta + \mu \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\iint_S \frac{[\tilde{u}_x]_*}{R} d\xi d\eta - \frac{\partial}{\partial x}\iint_S \frac{[\tilde{u}_y]_*}{R} d\xi d\eta \right) = \\ = \alpha(1+\mu)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\iint_S [T]_* \frac{d\xi d\eta}{R} \qquad (1)$$

Контактна особа: М. М. СТАДНИК, e-mail: maths@forest.Lviv.ua

відносно стрибків зміщень $[u_x]_*$ і $[u_y]_*$ поверхонь $z=\pm 0$ тріщини, які спричинені дією теплового потоку *q*. Тут $\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$; μ – коефіцієнт Пуассона матеріалу тіла; S – еліптична область $x^2/a^2+y^2/b^2\le 1$; $R=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$; α – коефіцієнт теплового розширення тіла; $[T]_*$ – стрибок температури на берегах тріщини $z=\pm 0$, який визначаємо із інтегрального рівняння задачі теплопровідності [7]

$$\Delta\iint_S [T]_* \frac{d\xi d\eta}{R}=-4\pi\left.\frac{\partial T_0}{\partial z}\right|_{z=0}=-\frac{4\pi q}{\lambda},\quad (x,y)\in S, \tag{2}$$

де $T_0=qz/\lambda$ – температура в однорідному тілі; λ – коефіцієнт теплопровідності тіла.

Розв’язком рівняння (2) буде функція

$$[T]_*=2qb\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}\,/\left(\lambda E(k)\right), \tag{3}$$

де $E(k)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta$; $k^2=\left(a^2-b^2\right)/a^2$.

Подаючи розв’язок рівнянь (1) у вигляді

$$[u_x]_*=C_1x\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2};\quad [u_y]_*=C_2y\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2} \tag{4}$$

і підставляючи його у ці інтегральні рівняння, матимемо систему алгебричних рівнянь

$$C_1\left(F_{04}(k)-\mu F_3(k)\right)/b+C_2b\mu F_3(k)/a^2=2\alpha b^2q(1+\mu)F_1(k)/\left(3a^2\lambda E(k)\right);$$

$$C_1\mu F_3(k)/b+C_2\left(F_{05}(k)-b^2\mu F_3(k)/a^2\right)/b=2\alpha q(1+\mu)F_2(k)/\left(3\lambda E(k)\right) \tag{5}$$

для визначення сталих величин C_1 і C_2. Тут

$$F_1(k)=\left(K(k)-E(k)\right)/k^2;\quad F_2(k)=\left(E(k)-b^2K(k)/a^2\right)/k^2;$$

$$K(k)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}};\quad 4F_3(k)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 2\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\,d\theta;$$

$$F_{04}(k)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta;\quad F_{05}(k)=E(k)-F_{04}(k).$$

У результаті розв’язку рівнянь (5) маємо співвідношення

$$C_1=\frac{2\alpha qb^3(1+\mu)\left(F_1(k)F_{05}(k)/E(k)-\mu F_3(k)\right)}{3a^2\lambda\left(F_{04}(k)F_{05}(k)-\mu F_3(k)\left(b^2F_{04}(k)/a^2+F_{05}(k)\right)\right)};$$

$$C_2=\frac{2\alpha qb(1+\mu)\left(F_2(k)F_{04}(k)/E(k)-\mu F_3(k)\right)}{3\lambda\left(F_{04}(k)F_{05}(k)-\mu F_3(k)\left(b^2F_{04}(k)/a^2+F_{05}(k)\right)\right)} \tag{6}$$

для обчислення значень C_1 і C_2.

Користуючись рухомою локальною системою координат O_1ntz з початком на контурі області S, одержимо асимптотичні подання для стрибків зміщень:

$$[u_x]_* = C_1\sqrt{-2f(\varphi)na/b}\ \cos\varphi + O(n);$$

$$[u_y]_* = C_2\sqrt{-2f(\varphi)nb/a}\ \sin\varphi + O(n), \qquad (7)$$

де $f(\varphi)=\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}$; O_1n – зовнішня нормаль до контуру області S; φ – кут, що визначає параметричні координати точок еліпса $\left(x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1\right)$; $|n| << a, b$.

Оскільки

$$[u_n]_* = [u_x]_*\cos\theta + [u_y]_*\sin\theta; \quad [u_t]_* = -[u_x]_*\sin\theta + [u_y]_*\cos\theta,$$

то на основі (7) отримаємо:

$$[u_n]_* = \left(C_1\cos^2\varphi + C_2\sin^2\varphi\right)\sqrt{-2nab/f(\varphi)} + O(n);$$

$$[u_t]_* = \left(-C_1a^2 + C_2b^2\right)\sin 2\varphi\sqrt{-n/\left(2abf(\varphi)\right)} + O(n), \qquad (8)$$

де θ – кут між додатними напрямами осей Ox і O_1n; $\cos\theta = b\cos\varphi/f(\varphi)$; $\sin\theta = a\sin\varphi/f(\varphi)$.

Користуючись поданнями [7]

$$K_{\text{II}} = -\lim_{n\to -0}\sqrt{-2\pi n}\ G[u_n]'_{*n}/\left(2(1-\mu)\right);$$

$$K_{\text{III}} = -\lim_{n\to -0}\sqrt{-2\pi n}\ G[u_t]'_{*n}/2 \qquad (9)$$

і підставляючи у них вирази (8) з урахуванням співвідношень (6), матимемо формули

$$K_{\text{II}} = G\alpha q(1+\mu)\sqrt{\pi b^3}\Big(b^2\left(F_1(k)F_{05}(k)/E(k) - \mu F_3(k)\right)\cos^2\varphi +$$
$$+a^2\left(F_2(k)F_{04}(k)/E(k) - \mu F_3(k)\right)\sin^2\varphi\Big)/\Big(3\lambda(1-\mu)\big(F_{04}(k)F_{05}(k) -$$
$$-\mu F_3(k)\left(b^2F_{04}(k)/a^2 + F_{05}(k)\right)\big)\sqrt{a^3f(\varphi)}\Big);$$

$$K_{\text{III}} = \frac{G\alpha qb^2(1+\mu)\sqrt{\pi b}\left(F_2(k)F_{04}(k) - F_1(k)F_{05}(k)\right)\sin 2\varphi}{6\lambda E(k)\sqrt{af(\varphi)}\left(F_{04}(k)F_{05}(k) - \mu F_3(k)\left(b^2F_{04}(k)/a^2 + F_{05}(k)\right)\right)} \qquad (10)$$

для обчислення КІН K_{II} і K_{III} у просторі з еліптичною тріщиною. Тут G – модуль зсуву матеріалу тіла. Аналіз співвідношень (10) показує, що при $a > b$ коефіцієнт K_{II} набуває найбільшого значення в точці $(0, b, 0)$, тобто для $\varphi = \pi/2$, а $K_{\text{III}} = 0$.

Для кругової тріщини ($a = b$) із формул (10) одержимо відомі [1, 2] подання для КІН:

$$K_{\mathrm{II}} = 2G\alpha(1+\mu)\, qa\sqrt{a} \,/ \left(3\lambda(1-\mu)\sqrt{\pi}\right); \quad K_{\mathrm{III}} = 0. \tag{11}$$

Якщо у співвідношеннях (10) величину a спрямувати до безмежності і покласти кут $\varphi = \pm\pi/2$, то матимемо відомий [3–6] результат

$$K_{\mathrm{II}}(\pm b) = \pm E\alpha qb\sqrt{\pi b} \,/ \left(\lambda(1+\kappa)\right); \quad K_{\mathrm{III}} = 0 \tag{12}$$

для двовимірної задачі у разі плоскої деформації, тобто тунельної тріщини ($\kappa = 3-4\mu$; $E = 2(1+\mu)G$). Якщо у виразі (12) замінити α на $\alpha/(1+\mu)$; κ – на $\kappa = (3-\mu)/(1+\mu)$, то матимемо K_{II} для плоского напруженого стану.

РЕЗЮМЕ. Получено аналитическое решение системы двух сингулярных интегро-дифференциальных уравнений, к которой сведена трехмерная термоупругая задача для тела с термоизолированной эллиптической трещиной. На бесконечности на тело действует тепловой поток, перпендикулярный к плоскости трещины. Найдены формулы для вычисления коэффициентов интенсивности напряжений и проанализировано влияние на них конфигурации трещины для некоторых частичных случаев задачи.

SUMMARY. The analytical solution of a system of two singular intgrodifferential equations, to which a three dimensional thermoelastic problem for a body with a thermoisolated elliptic crack is reduced, have been obtained. The heat flow perpendicular to the crack plane acts on the body at infinity. As a result, the formulae for computing stress intensity factors habe been written and the influence of crack configurations for different partial cases of the investigated problem has been analyzed.

1. *Парис П., Си Дж.* Анализ напряженного состояния около трещин // Прикладные вопросы вязкости разрушения. – М.: Мир, 1968. – С. 204–211.
2. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
3. *Си Дж.* О сингулярном характере температурных напряжений у вершины трещины // Прикл. механика (пер. Тр. АОИМ). – 1962. – **29**, Е.3. – С. 157–159.
4. *Кит Г. С.* О влиянии однородного теплового потока на предельную нагрузку для пластины с трещиной // Физ.-хим. механика материалов. – 1969. – № 1. – С. 114–115.
5. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
6. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упругопластического разрушения. – М.: Наука, 1985. – 504 с.
7. *Стадник М. М.* Метод розв’язування тривимірних термопружних задач для тіл з тонкими включеннями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1994. – № 6. – С. 30–40.

Одержано 11.02.2010