

Роль парных корреляций в формировании основного состояния и спектра элементарных возбуждений сверхтекучей бозе-жидкости (Обзор)

Э. А. Пашицкий

Институт физики НАН Украины, Украина, 252650, г. Киев, пр. Науки, 46
E-mail: pashitsk@iop.kiev.ua

Статья поступила в редакцию 10 августа 1998 г., после переработки 7 октября 1998 г.

В обзоре обсуждаются парадоксы и противоречия современной микроскопической теории сверхтекучего гелия (He-II) и возможные пути их разрешения с учетом парных корреляций между атомами ^4He . Показано, что большинство парадоксов связано с исходным общепринятым предположением о преобладающей роли одночастичного бозе-конденсата (ОБК) в квантовой микроструктуре сверхтекучей компоненты ρ_s . Существование интенсивного ОБК приводит, как известно, к сильной гибридизации ветвей элементарных возбуждений и одинаковому для всех бозонных ветвей закону дисперсии, который отождествляется с экспериментально наблюдаемым по рассеянию медленных нейтронов спектром квазичастиц в жидком гелии $E(\mathbf{p})$. Однако неизменность этого спектра при приближении к λ -точке и большая величина щели в области «ротонного» минимума не согласуются с теоретическим критерием сверхтекучести Ландау и малой величиной экспериментально измеряемой критической скорости. В то же время известно, что в бозе-жидкости ^4He из-за сильного взаимодействия между частицами ОБК сильно подавлен (составляет не более 1% всех атомов ^4He) и поэтому не может служить основой сверхтекучей компоненты в отличие от слабонеидеального бозе-газа. Более того, в случае достаточно сильного притяжения между частицами в некоторой области импульсного пространства, в сверхтекучей бозе-жидкости могут образовываться связанные пары бозонов и возникает парный когерентный конденсат (ПКК), аналогичный конденсату куперовских пар в сверхпроводниках. Такой интенсивный ПКК может полностью подавить слабый ОБК. При этом одночастичный спектр элементарных возбуждений $\epsilon(\mathbf{p})$ не гибридизуется с коллективным (двухчастичным) спектром и не содержится в структуре динамического формфактора $S(\mathbf{p}, \epsilon)$, т.е. не совпадает со спектром, измеренным с помощью нейтронного рассеяния. Дисперсия одночастичного спектра определяется импульсной зависимостью парного параметра порядка $\tilde{\Psi}(\mathbf{p})$ и может иметь минимум или точку перегиба при $\mathbf{p} \neq 0$. Эта особенность в одночастичном спектре бозе-жидкости с ПКК без ОБК исчезает вместе с $\tilde{\Psi}(\mathbf{p})$ при температуре фазового перехода $T_c = T_\lambda$ из сверхтекучего состояния в нормальное (в отличие от ротонного минимума в коллективном спектре), а соответствующая ей критическая скорость $v_c = \min[\epsilon(\mathbf{p})/p]$ обращается в нуль в λ -точке в соответствии с критерием сверхтекучести Ландау и экспериментальными данными. Предположение о том, что в основе квантовой структуры сверхтекучей компоненты ρ_s лежит интенсивный «куперовский» ПКК, косвенно подтверждается, с одной стороны, успешным применением приближения Джастрова, которое учитывает сильные парные корреляции, для описания свойств жидкого ^4He и растворов квантовых жидкостей ^3He – ^4He , а с другой стороны, аномально большой эффективной массой примесных атомов ^3He в ^4He , которая близка по величине к суммарной массе атомов ^3He и ^4He , что свидетельствует о существовании связанных пар атомов гелия в сверхтекучей жидкости He-II. Обсуждается вопрос о величине кванта циркуляции сверхтекучей скорости в вихрях Онсагера – Фейнмана в бозе-жидкости с ПКК без ОБК, а также проблема критических скоростей сверхтекучего ^4He в сверхтонких пленках и каналах, в которых невозможно рождение и движение квантовых вихрей и происходит размерное квантование спектра квазичастиц.

В огляді обговорюються парадокси та протиріччя сучасної мікроскопічної теорії надтекучого гелію (He-II) та можливі шляхи їх розв'язання з урахуванням парних кореляцій між атомами ^4He . Показано, що більшість парадоксів пов'язана з вихідним загальним визнанням припущенням про переважуючу роль одночастинкового бозе-конденсату (ОБК) в квантовій микроструктурі надтекучої компоненти ρ_s . Існування інтенсивного ОБК, як відомо, призводить до сильної гібридизації віток елементарних

збуджень та до однакового для всіх бозонних віток закону дисперсії, який отожднюється із спектром $E(\mathbf{p})$, що експериментально вимірюється по розсіюванню повільних нейтронів у рідкому гелії. Однак незмінність цього спектру при наближенні до λ -точки та велика величина щільності «ротонного» мінімуму не узгоджуються з теоретичним критерієм надтекучості Ландау та з малою величиною експериментально вимірюваної критичної швидкості. В той же час відомо, що у бозе-рідині ${}^4\text{He}$ внаслідок сильної взаємодії між частинками ОБК сильно пригнічений (складає не більше 1% усіх атомів ${}^4\text{He}$) і тому не може бути основою надтекучої компоненти на відміну від майже ідеального бозе-газу. Більше того, у випадку достатньо сильного притягнення між частинками в певній області імпульсного простору, у надтекучій бозе-рідині можуть створюватись зв'язані пари бозонів і виникає парний когерентний конденсат (ПКК), подібний до конденсату куперівських пар у надпровідниках. Такий інтенсивний ПКК може повністю знищити слабкий ОБК. При цьому одночастинковий спектр елементарних збуджень $\epsilon(\mathbf{p})$ не гібридується з колективним (двочастинковим) спектром і не міститься в структурі динамічного формфактору $S(\mathbf{p}, \epsilon)$, тобто не співпадає із спектром, що вимірюється за допомогою нейтронного розсіювання. Дисперсія одночастинкового спектру визначається імпульсною залежністю парного параметра порядку $\tilde{\Psi}(\mathbf{p})$ і може мати мінімум або точку перегину при $\mathbf{p} \neq 0$. Ця особливість в одночастинковому спектрі бозе-рідини з ПКК без ОБК зникає разом із $\tilde{\Psi}(\mathbf{p})$ при температурі фазового переходу $T_c = T_\lambda$ з надтекучого стану у нормальний (на відміну від ротонного мінімуму в колективному спектрі), а відповідна критична швидкість $v_c = \min[\epsilon(\mathbf{p})/p]$ прямує до нуля в λ -точці згідно з критерієм надтекучості Ландау та експериментальними даними. Припущення відносно того, що в основі квантової структури надтекучої компоненти ρ_s лежить інтенсивний «куперівський» ПКК, непрямо підтверджується, з одного боку, успішним застосуванням наближення Джастрова, яке враховує сильні парні кореляції, для опису властивостей рідкого ${}^4\text{He}$ та розчинів квантових рідин ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$, а з іншого боку, аномально великою ефективною масою домішкових атомів ${}^3\text{He}$ у ${}^4\text{He}$, величина якої є близькою до сумарної маси атомів ${}^3\text{He}$ і ${}^4\text{He}$, що свідчить про існування зв'язаних пар атомів гелію у надтекучому He-II . Обговорюється питання про величину кванта циркуляції швидкості у вихорях Онсагера – Фейнмана у бозе-рідині з ПКК без ОБК, а також проблема критичних швидкостей надтекучого ${}^4\text{He}$ у надтонких плівках та каналах, в яких неможливе виникнення і рух квантових вихорів та відбувається розмірне квантування спектру квазічастинок.

PACS: 67.20.+k

Содержание

1. Введение	117
2. Микроструктура сверхтекучей компоненты в He-II (предварительные замечания)	118
3. Метод канонических преобразований Боголюбова для неидеальных бозе-систем	120
3.1. Слабонидеальный бозе-газ с интенсивным ОБК	120
3.1.1. Заряженный бозе-газ большой плотности	121
3.1.2. Нейтральный бозе-газ с частицами конечного радиуса	122
3.2. Неидеальные бозе-системы с фиксированным числом частиц (метод Фолди – Бракнера)	123
4. Применение метода функций Грина для описания сверхтекучей бозе-жидкости с интенсивным конденсатом бозонных пар	125
4.1. Уравнения Дайсона – Беляева и метод Гугенгольца – Пайнса для бозе-жидкости с «истощенным» ОБК	125
4.2. Неустойчивость состояния бозе-системы со слабым ОБК и интенсивным ПКК	127
4.3. Одночастичный спектр бозе-системы с ПКК без ОБК и критерий сверхтекучести	129
4.4. Фазовые переходы в бозе-жидкости с интенсивным ПКК	130
4.5. Структура бозонных пар в ПКК	132
4.6. Роль парных корреляций в бозе-жидкости ${}^4\text{He}$ и в растворах квантовых жидкостей ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$	134
4.6.1. Экспериментальное свидетельство существования связанных пар атомов гелия в сверхтекучем ${}^4\text{He}$	134
4.6.2. Метод Джастрова – Финберга для описания растворов ${}^3\text{He}$ - ${}^4\text{He}$	135
4.6.3. Квантование циркуляции скорости в сверхтекучей бозе-жидкости с ПКК без ОБК	136
4.6.4. Проблема критических скоростей в сверхтонких пленках и капиллярах	136
5. Заключение	137
Список литературы	139

1. Введение

Спектр элементарных возбуждений в сверхтекучем гелии (He-II) с линейным (фононным) законом дисперсии $E(\mathbf{p}) \sim p$ при малых импульсах ($\mathbf{p} \rightarrow 0$) и с так называемым «ротонным» минимумом при $\mathbf{p} \neq 0$, как известно, был предсказан Ландау [1] на основе полученного им критерия сверхтекучести для квантовых жидкостей бозе- и ферми-типа.

В дальнейшем такая форма спектра блестяще подтвердилась в экспериментах [2] по неупругому рассеянию медленных нейтронов в жидком гелии. Фейнман [3] связал существование «ротонного» минимума в спектре квазичастиц $E(\mathbf{p})$ с соответствующей структурой динамического фактора $S(\mathbf{p}, \epsilon)$ бозе-жидкости ${}^4\text{He}$, а Бракнер и Савада [4,5] показали, что такой минимум может быть получен в рамках микроскопической теории сверхтекучести Боголюбова [6] для слабо-неидеального бозе-газа, если в качестве взаимодействия между частицами использовать псевдопотенциал модели «твердых сфер».

Последующие успехи феноменологической (двухжидкостная гидродинамика) и микроскопической (метод функций Грина) теорий сверхтекучести [7,8] отодвинули на второй план ряд парадоксов, связанных как с гидродинамикой сверхтекучей жидкости, так и с формой квазичастичного спектра, и не имеющих пока удовлетворительного объяснения. Рассмотрим эти парадоксы более детально.

Парадокс № 1. Вследствие слабой температурной зависимости спектра квазичастиц $E(\mathbf{p})$ величина «ротонной» щели $\Delta_r = 8,65$ К в точке минимума $E(\mathbf{p})$ при $p_r = 1,9 \text{ \AA}^{-1}$ остается почти постоянной вплоть до λ -точки ($T_\lambda = 2,17$ К), что противоречит самому смыслу критерия сверхтекучести Ландау [1]. В то же время для спектра квазичастиц в электронной ферми-жидкости в сверхпроводниках [9] критерий сверхтекучести выполняется для сверхпроводящей фазы ниже критической температуры T_c , когда в спектре существует конечная энергетическая щель Δ , и перестает выполняться в нормальном состоянии при $T > T_c$, когда щель в спектре равна нулю.

Парадокс № 2. Вычисленная согласно критерию сверхтекучести [1] величина критической скорости для наблюдаемого по нейтронному рассеянию в жидком ${}^4\text{He}$ спектру квазичастиц $E(\mathbf{p})$

$$v_c = \min [E(\mathbf{p})/p] \approx \Delta_r / p_r \approx 60 \text{ м/с} \quad (1)$$

на два порядка превышает экспериментально измеряемую максимальную скорость v_c^{exp} сверхтекуче-

чего потока в He-II. Скорость v_c^{exp} увеличивается в несколько раз в сверхтонких капиллярах и смазывающих пленках сверхтекучего гелия, но все равно она гораздо меньше, чем соответствующая ротонной щели критическая скорость (1) и в отличие от последней обращается в нуль в λ -точке [10]. Это противоречие обычно связывают с процессом рождения квантовых вихрей Онсагера—Фейнмана или вихревых колец (см. [10]) в движущемся с малой скоростью сверхтекучем гелии, что приводит к появлению конечной вязкости благодаря силе трения нормальных сердцевин вихревых нитей со стенками (твердыми поверхностями). Такая точка зрения согласуется с экспериментально наблюдаемым возрастанием критической скорости при уменьшении толщины сверхтекучих пленок гелия [10], поскольку при этом возрастает сила сцепления вихрей со стенками, приходящаяся на единицу длины вихря.

Однако такое объяснение непригодно в случае сверхтонких капилляров («сверхщелей»), в которых квантовые вихри с медленно убывающей при удалении от оси сверхтекучей скоростью $v_s(r) = \kappa/r$ (где $\kappa = h/m_4$ — квант циркуляции скорости, h — постоянная Планка, а m_4 — масса атома ${}^4\text{He}$) не могут рождаться. Данная ситуация аналогична проблеме критических токов в сверхпроводниках II-го рода [11]: в массивных сверхпроводниках критический ток j_c определяется силами «пиннинга» (закрепления) нормальных сердцевин квантовых вихрей Абрикосова на дефектах кристаллической решетки, а в тонких сверхпроводящих нитях (проволочках) толщиной меньше лондонской глубины проникновения магнитного поля $\lambda_L \approx 3\,000\text{--}5\,000 \text{ \AA}$, в которых вихри диаметром $d \approx 2\lambda_L$ «не помещаются», j_c определяется так называемым максимальным «током распаривания», при котором токовая скорость движения электронов проводимости превышает предельную критическую величину $v_c \approx \Delta/p_F$, определяющуюся величиной щели в спектре квазичастиц в сверхпроводящем состоянии ($T < T_c$) и достаточную для разрыва куперовских пар (здесь p_F — импульс Ферми).

Парадокс № 3. В сверхтекучей бозе-жидкости в отличие от бозе-газа одночастичный бозе-конденсат (ОБК) должен быть существенно обеднен частицами («истощен») даже при $T = 0$ из-за сильного взаимодействия между бозонами. Анализ экспериментальных данных по нейтронному рассеянию [12] показывает, что в сверхтекучем ${}^4\text{He}$ при низких температурах в бозе-конденсатном состоянии (с нулевыми энергией ϵ и импульсом \mathbf{p}) находится не более 1% всех атомов ${}^4\text{He}$,

тогда как *плотность сверхтекучей компоненты* ρ_s при $T < 1$ К, согласно классическим измерениям вязкости в He-II [13], практически *равна полной плотности жидкого гелия*. Это означает, что, вопреки широко распространенному мнению, сверхтекучесть в бозе-жидкости ${}^4\text{He}$ не может быть связана *только с явлением обычной бозе-эйнштейновской конденсации*, и микроскопическая структура сверхтекучей компоненты ρ_s должна иметь более сложную квантовую природу в виде многочастичного *эффективного когерентного конденсата* (ЭКК) [14–17]. В частности, не исключено, что основой сверхтекучей компоненты в He-II является *парный когерентный конденсат* (ПКК), состоящий из связанных бозонных пар [18] и аналогичный конденсату куперовских пар в сверхпроводниках [9].

Парадокс № 4. Как было показано в [4,5] (см. также [19,20]), для вполне реалистических потенциалов взаимодействия между частицами можно добиться хорошего согласия между богословским спектром квазичастиц в слабонеидеальном бозе-газе [6]

$$E_B(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2 u_B^2(\mathbf{p}) + (\mathbf{p}^2/2m)^2}; \quad (2)$$

$$u_B(\mathbf{p}) = \sqrt{nV(\mathbf{p})/m},$$

где $V(\mathbf{p})$ — фурье-компонента потенциала парного взаимодействия между бозонами, и экспериментально наблюдаемым по нейтронному рассеянию [2] спектром элементарных возбуждений в жидком ${}^4\text{He}$, несмотря на то что ОБК в бозе-жидкости сильно подавлен (либо отсутствует совсем), а в бозе-газе в состоянии ОБК находится подавляющее число частиц $n_0 \approx n$ (где n — полное число частиц в единице объема).

Данный обзор посвящен обсуждению этих парадоксов и возможных путей их разрешения, в частности, с учетом *парных корреляций* между атомами ${}^4\text{He}$ и образования *связанных пар атомов гелия*.

2. Микроструктура сверхтекучей компоненты в He-II (предварительные замечания)

Вопрос о квантовомеханической структуре сверхтекучей компоненты в жидком ${}^4\text{He}$ ниже λ -точки (He-II) является центральным для построения последовательной микроскопической теории сверхтекучести бозе-жидкостей (в том числе и таких экзотических, как биэкситонная [21,22], биполяронная [23], пионная [24] и др.).

Как известно [6], в слабонеидеальном бозе-газе микроскопической сверхтекучего состояния явля-

ется интенсивный ОБК с отличным от нуля средним значением полевого оператора $\langle \hat{\Psi}_0 \rangle = n_0^{1/2}$. Обычно предполагается, что ОБК сохраняется и в квантовой бозе-жидкости, и собственная энергия представляется в виде разложения по степеням $n_0^{1/2}$ [25,26], т.е. в виде последовательности диаграмм Фейнмана с возрастающим числом внешних конденсатных линий. Однако если ОБК сильно «истощен» в бозе-жидкости с сильным взаимодействием между частицами (см. [12]), так что $n_0 \ll n$, то можно ограничиться нижайшими членами разложения по $n_0^{1/2}$ (см. [18]).

С другой стороны, за счет достаточно сильного эффективного притяжения, которое существует в широкой области импульсного пространства даже в случае преобладающего, но быстро убывающего с расстоянием отталкивания между частицами в реальном пространстве [4,5], возможно образование *связанных пар бозонов* (атомов ${}^4\text{He}$) либо интенсивного ПКК [18].

Возможность существования такого «куперовского» ПКК в сверхтекучем ${}^4\text{He}$ обсуждалась в большом числе работ [27–33]. Однако сосуществование ОБК и ПКК приводит к целому ряду противоречий как в рамках самой теории, так и между теорией и экспериментом.

Во-первых, по аналогии с *теорией сверхпроводимости Бардина–Купера–Шриффера* (БКШ) [9], появление ПКК, казалось бы, должно приводить к возникновению конечной щели $\Delta_0 \neq 0$ при $\mathbf{p} = 0$ в одночастичной ветви спектра элементарных возбуждений [27–33]. Следствием этого должно быть проявление соответствующих аномалий в теплоемкости [32], которые, однако, не наблюдаются экспериментально в He-II.

Во-вторых, существование ОБК должно приводить к сильной *гибридизации одночастичной и коллективной ветвей спектра*, т.е. к совпадению полюсов одночастичной и двухчастичной (а также всех высших) функций Грина бозонов [8] (здесь речь идет о возбуждениях с нулевой спиральностью). Но поскольку коллективная (гидродинамическая) ветвь в пределе $\mathbf{p} \rightarrow 0$ имеет акустический закон дисперсии $E(\mathbf{p}) \approx pc$ (где c — скорость звука в жидком ${}^4\text{He}$), существование щели $\Delta_0 \neq 0$ при $\mathbf{p} = 0$ в одночастичном спектре запрещено.

В третьих, как было показано в [18], сосуществование сильно «истощенного» ОБК и интенсивного ПКК приводит к *неустойчивости* одночастичного акустического спектра, если фаза «парного» параметра порядка $\Psi(\mathbf{p})$ совпадает с фазой «волновой функции» ОБК. Если же фаза $\Psi(\mathbf{p})$ сдвинута на π по отношению к фазе ОБК, то

основное состояние системы неустойчиво относительно спонтанного рождения бозонных пар с отрицательной энергией.

Согласно [18], устойчивым является состояние бозе-жидкости, в котором полностью отсутствует ОБК ($n_0 = 0$), а сверхтекучесть определяется интенсивным ПКК при условии, что взаимодействие между частицами обеспечивает существование нетривиального (ненулевого) решения однородного интегрального уравнения для *комплексного парного параметра порядка* $\Psi(\mathbf{p}) = |\Psi(\mathbf{p})| e^{i\theta}$ с произвольной (вырожденной) макроскопической фазой θ . При этом сверхтекучая компонента представляет собой парный ЭКК, включающий ПКК связанных («куперовских») бозонных пар и «высшие» многочастичные конденсаты с четным числом несвязанных частиц, поскольку сосуществование нескольких связанных конденсатов в однокомпонентной бозе-жидкости запрещено единой калибровочной инвариантностью исходного гамильтониана.

Следует заметить, что ряд особенностей сверхтекучей бозе-жидкости без ОБК исследовался ранее в [15], где было показано, что появление щели Δ_0 при $\mathbf{p} = 0$ в одночастичной ветви спектра $\epsilon(\mathbf{p})$ связано с нарушением *теоремы Гугенгольца—Пайнса* [26], а *голдстоуновская ветвь* с акустическим законом дисперсии при $\mathbf{p} \rightarrow 0$ (*гидродинамический звук*) является полюсом двухчастичной функции Грина. Однако в [15] не рассматривалась динамическая причина исчезновения ОБК, которая, как было показано в [18], заключается в существовании достаточно сильного *притяжения* в широкой области импульсов $\mathbf{p} \neq 0$, почти способного обеспечить образование связанного состояния двух бозонов и приводящего к возникновению ПКК.

В бозе-жидкости с ПКК без ОБК возникает ограничение на гибридизацию возбуждений [18,34]: гибридизуются между собой лишь те ветви спектра, которые соответствуют возбуждениям, различающимся на две частицы, т.е. одночастичная ветвь гибридизуется со всеми возбуждениями с нечетным числом частиц, а двухчастичная ветвь — со всеми коллективными возбуждениями с четным числом частиц. В результате этого одночастичный спектр $\epsilon(\mathbf{p})$ исключается из *динамического формфактора*:

$$S(\mathbf{p}, \epsilon) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \chi(\mathbf{p}, \epsilon), \quad (3)$$

где $\chi(\mathbf{p}, \epsilon)$ — восприимчивость бозе-системы, содержащая информацию о коллективных возбуждениях (в том числе двухчастичных). Следова-

тельно, спектр $\epsilon(\mathbf{p})$ не может быть измерен с помощью экспериментов по рассеянию медленных нейтронов (в отличие от двухчастичного спектра).

Отсюда следует, что рассмотренная в [18] модель сверхтекучей бозе-жидкости ${}^4\text{He}$ с «парной» основой сверхтекучей компоненты в виде ПКК и высших четных конденсатов (при полном отсутствии ОБК и высших нечетных конденсатов) позволяет разрешить парадоксы, сформулированные во введении, благодаря ограничению на гибридизацию возбуждений с разной четностью и разделению ролей одночастичной и коллективной ветвей в спектре квазичастиц. А именно, можно допустить, что наблюдаемый в экспериментах по нейтронному рассеянию [2] спектр $E(\mathbf{p})$, который является коллективным и определяется динамическим формфактором (3), не имеет никакого отношения к критерию сверхтекучести. В то же время одночастичный спектр $\epsilon(\mathbf{p})$, который не дает вклад в динамический формфактор и поэтому не наблюдается в нейтронных экспериментах, определяется при $\mathbf{p} \neq 0$ импульсной зависимостью взаимодействия $V(\mathbf{p})$ и может иметь минимум в точке максимума модуля «парного» параметра порядка $|\Psi(\mathbf{p})|$. При приближении к критической температуре $T_c = T_\lambda$ фазового перехода из сверхтекучего состояния в нормальное (λ -точке) параметр порядка $\tilde{\Psi}(\mathbf{p})$, определяющий минимум отношения $\epsilon(\mathbf{p})/p$ и, следовательно, критическая скорость v_c обращаются в нуль в соответствии с экспериментом [10] и критерием сверхтекучести Ландау [1]. Этим разрешается **парадокс № 1**.

Если предположить, что «щель» Δ_1 в точке минимума $\epsilon(\mathbf{p})$ при $T \rightarrow 0$ гораздо меньше «ротонной» щели Δ_r в коллективном (наблюдаемом по рассеянию нейтронов) спектре элементарных возбуждений $E(\mathbf{p})$, то можно объяснить малую величину критической скорости v_c в сверхтекучем ${}^4\text{He}$ и разрешить **парадокс № 2**.

Отсутствие ОБК в сверхтекучей бозе-жидкости с интенсивным ПКК (см. [18]) автоматически разрешает также **парадокс № 3**.

Что же касается **парадокса № 4**, то он связан с тем (в значительной степени случайным) обстоятельством, что и боголюбовский спектр (2), и структурный фактор (3) определяются немонотонно зависящим от \mathbf{p} парным взаимодействием $V(\mathbf{p})$ между частицами (см. ниже).

Заметим, что отсутствие гибридизации между одночастичной и коллективной ветвями спектра в бозе-жидкости с ПКК без ОБК снимает проблему сосуществования щели $\Delta_0 \neq 0$ при $\mathbf{p} = 0$ в первой ветви при звуковом характере второй. Однако, как было недавно отмечено в [35], *существова-*

ние щели Δ_0 в одночастичном спектре $\epsilon(\mathbf{p})$ бозе-жидкости с «парным» ЭКК совсем необязательно. В результате при $\Delta_0 = 0$ одночастичный спектр является акустическим $\epsilon(\mathbf{p}) \approx pu$ (при $\mathbf{p} \rightarrow 0$) с фазовой скоростью $u = \sqrt{\Psi(0)/m^*}$, которая стремится к нулю при $T \rightarrow T_\lambda$, когда $\Psi(0) \rightarrow 0$. При этом спектр $\epsilon(\mathbf{p})$ становится параболическим и не удовлетворяет критерию сверхтекучести Ландау в нормальной фазе (при $T > T_\lambda$).

Акустический характер одночастичного бесщелевого спектра в длинноволновом пределе ($\Delta_0 = 0$ при $\mathbf{p} = 0$) в сверхтекучем состоянии ($T < T_\lambda$) согласуется с теоремой Гугенгольца — Пайнса [26] и со степенной асимптотикой Реатто — Честера [36,37] для парной корреляционной функции $\langle \hat{\psi}(\mathbf{r})\hat{\psi}(\mathbf{r}') \rangle \sim |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-2}$ при $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty$, а также не приводит к дополнительным особенностям в теплоемкости (ср. с [32]).

С другой стороны, о важной роли парных корреляций между атомами ^4He в сверхтекучей бозе-жидкости He-II свидетельствует успешное применение приближения Джастрова — Финберга [38–46] для описания основного и возбужденных состояний как жидкого ^4He , так и растворов квантовых жидкостей ^3He – ^4He [47].

Эмпирическим подтверждением существования связанных пар атомов гелия в He-II , как было отмечено в [35], может служить наблюдаемая экспериментально [48–51] аномально большая эффективная масса m_3^* примесных атомов ^3He в ^4He , близкая по величине к суммарной массе атомов ^3He и ^4He : $m_3^* \geq (m_3 + m_4)$. Это может указывать на образование связанного состояния пары атомов ^3He и ^4He . Но поскольку потенциалы взаимодействия между атомами ^3He и ^4He идентичны, а энергия нулевых колебаний в связанном состоянии для пары ^3He – ^4He больше, чем для пары ^4He – ^4He , то образование пар атомов ^4He в He-II облегчается по сравнению с парами ^3He – ^4He , тем более при учете бозон-бозонных корреляций, способствующих притяжению.

Все эти вопросы детально рассмотрены в настоящем обзоре на основе метода канонических преобразований Боголюбова (разд. 3) и с помощью метода функций Грина (разд. 4).

3. Метод канонических преобразований Боголюбова для неидеальных бозе-систем

3.1. Слабонеидеальный бозе-газ с интенсивным ОБК

Первая строгая микроскопическая теория сверхтекучести была построена более 50-ти лет

тому назад Боголюбовым [6] для почти идеального (или слабонеидеального) бозе-газа. Основным достоинством этой теории явился отказ от стандартных методов теории возмущений, использующей разложение в ряд по константе слабого взаимодействия. Правильно угаданный выбор основного состояния при $T = 0$, когда подавляющее число бозонов (в силу слабой неидеальности бозе-газа) находится на нижайшем квантовом уровне с нулевой энергией ϵ и нулевым импульсом \mathbf{p} (т.е. в состоянии ОБК), позволил радикально упростить исходный гамильтониан системы с парным взаимодействием $V(\mathbf{q})$, зависящим от передаваемого импульса $\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$:

$$H = \sum_{\mathbf{p}} \frac{\mathbf{p}^2}{2m} b_{\mathbf{p}}^+ b_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{q}} V(\mathbf{q}) b_{\mathbf{p}}^+ b_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^+ b_{\mathbf{p}'} b_{\mathbf{p}'-\mathbf{q}}, \quad (4)$$

где m — масса частицы, а $b_{\mathbf{p}}^+$ и $b_{\mathbf{p}}$ — операторы рождения и уничтожения бозонов с импульсом \mathbf{p} в представлении вторичного квантования (спин бозонов для простоты выбирается нулевым). Действительно, предполагая, что число частиц n_0 в ОБК макроскопически велико и близко к полному числу частиц n (в единице объема), можно пренебречь некоммутативностью бозе-операторов b_0^+ и b_0 с точностью до членов порядка $1/n_0 \sim 1/n \ll 1$, заменив их c -числами $\sqrt{n_0}$. (Точность такого приближения намного превышает точность любого эксперимента.)

В результате, выделяя в гамильтониане (4) слагаемые с нулевыми импульсами и учитывая, что число надконденсатных возбуждений с $\mathbf{p} \neq 0$ мало, $n' = \sum_{\mathbf{p} \neq 0} b_{\mathbf{p}}^+ b_{\mathbf{p}} \ll n_0$, с точностью до малых членов порядка n'/n_0 и с учетом закона сохранения импульса получаем при фиксированном числе частиц ($n = \text{const}$)

$$H_B = \frac{1}{2} n^2 V(0) + \sum_{\mathbf{p} \neq 0} \left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + n V(\mathbf{p}) \right] b_{\mathbf{p}}^+ b_{\mathbf{p}} + \frac{n}{2} \sum_{\mathbf{p} \neq 0} V(\mathbf{p}) [b_{\mathbf{p}}^+ b_{-\mathbf{p}}^+ + b_{\mathbf{p}} b_{-\mathbf{p}}]. \quad (5)$$

Этот упрощенный квадратичный гамильтониан допускает точную процедуру диагонализации с помощью линейных канонических преобразований Боголюбова [6] к новым операторам рождения $\beta_{\mathbf{p}}^+$ и уничтожения $\beta_{\mathbf{p}}$ невзаимодействующих квазичастиц:

$$b_{\mathbf{p}}^+ = \lambda_{\mathbf{p}} \beta_{\mathbf{p}}^+ + \mu_{\mathbf{p}} \beta_{-\mathbf{p}}; \quad b_{\mathbf{p}} = \lambda_{\mathbf{p}} \beta_{\mathbf{p}} + \mu_{\mathbf{p}} \beta_{-\mathbf{p}}^+. \quad (6)$$

Коэффициенты $\lambda_{\mathbf{p}}$ и $\mu_{\mathbf{p}}$ считаются для простоты вещественными и четными по \mathbf{p} и удовлетворяют условию нормировки $\lambda_{\mathbf{p}}^2 - \mu_{\mathbf{p}}^2 = 1$, благодаря которому операторы $b_{\mathbf{p}}^+$ и $b_{\mathbf{p}}$ подчиняются тем же коммутационным соотношениям, что и исходные операторы $b_{\mathbf{p}}^+$ и $b_{\mathbf{p}}$.

Подстановка соотношений (6) в (5) и условие идеальности газа квазичастиц, совместно с условием нормировки, позволяют найти выражения для коэффициентов $\lambda_{\mathbf{p}}$ и $\mu_{\mathbf{p}}$ и, в конечном итоге, для перенормированного спектра квазичастиц (см. (2)):

$$E_B(\mathbf{p}) = \left\{ \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + 2nV(\mathbf{p}) \right] \right\}^{1/2}. \quad (7)$$

Отсюда следует, что спектр (7) при $\mathbf{p} \rightarrow 0$ является акустическим $E_B(p) \approx |\mathbf{p}| u_B(0)$, где $u_B(0) = \sqrt{nV(0)/m}$, и устойчив только в случае преобладающего отталкивания между частицами на больших расстояниях, когда $V(0) > 0$.

Основным методическим недостатком первоначального варианта теории Боголюбова [6] было не столько пренебрежение квадратичными членами $\sim (n'/n_0)^2$, сколько рассмотрение модели бозе-газа, состоящего из точечных частиц с потенциалом взаимодействия $V(\mathbf{r}) = V_0 \delta(\mathbf{r})$, где $\delta(\mathbf{r})$ — трехмерная δ -функция, так что фурье-компонента $V(\mathbf{p}) = V_0 = \text{const}$. В этом случае выражение (7) соответствует сверхлинейному закону дисперсии

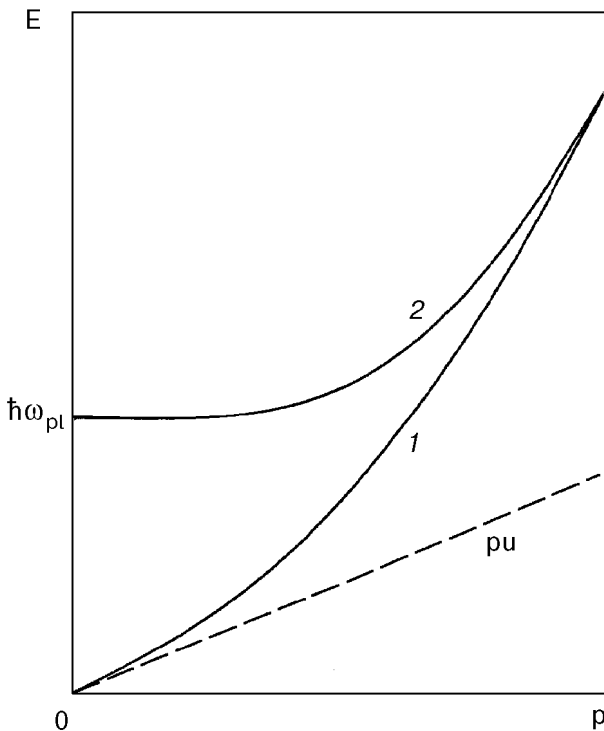


Рис. 1. Боголюбовский спектр квазичастиц в слабонеидеальном бозе-газе точечных нейтральных (1) и заряженных (2) частиц.

(см. рис. 1, кривая 1), который удовлетворяет критерию сверхтекучести Ландау [1], но является неустойчивым по отношению к распаду любого элементарного возбуждения на два других возбуждения с сохранением энергии и импульса.

3.1.1. Заряженный бозе-газ большой плотности. Вскоре Фолди [52] обратил внимание на то, что для бозе-газа заряженных частиц с кулоновским отталкиванием $V_c(\mathbf{r}) = e^2/r$, фурье-компонента которого равна $V_c(\mathbf{p}) = 4\pi e^2/\mathbf{p}^2$, спектр Боголюбова (7) обладает конечной энергетической щелью при $\mathbf{p} = 0$ (рис. 1, кривая 2):

$$E_B(\mathbf{p}) = \sqrt{\hbar^2 \omega_{pl}^2 + (\mathbf{p}^2/2m)^2}, \quad (8)$$

где $\omega_{pl} = \sqrt{4\pi e^2 n/m}$ — плазменная частота бозонов; $\hbar = h/2\pi$. Такой спектр, во-первых, является устойчивым по отношению к процессам распада и, во-вторых, удовлетворяет критерию сверхтекучести Ландау [1] благодаря конечной критической скорости

$$v_c \equiv \min [E_B(p)/p] = 2 \sqrt{\hbar \omega_{pl} / m}. \quad (9)$$

Фактически это обстоятельство явилось в дальнейшем основанием для обсуждения возможности биполярного механизма сверхпроводимости [23,53] в ионных (полярных) кристаллах с сильным электрон-фононным взаимодействием в результате сверхтекучести заряженного бозе-газа биполяронов [54].

Заметим, что условие слабой неидеальности

$$\left\langle \sum_{\mathbf{p} \neq 0} b_{\mathbf{p}}^+ b_{\mathbf{p}} \right\rangle \ll n,$$

необходимое для применимости теории Боголюбова [6], в случае заряженного бозе-газа биполяронов сводится к неравенству $n_B^{1/3} a_B^* \gg 1$, где $a_B^* = \epsilon_0 \hbar^2 / 4e^2 m_B^*$ — борковский радиус биполярона с эффективной массой m_B^* и зарядом $2e$ в полярном кристалле с диэлектрической проницаемостью $\epsilon_0 \gg 1$. Как и в случае заряженного ферми-газа [55], это условие соответствует приближению большой плотности, однако в ионных (сегнетоэлектрических) кристаллах с аномально большой величиной $\epsilon_0 \geq 10^3$ оно может выполняться при относительно невысокой концентрации частиц $n_B \geq 10^{21} \text{ см}^{-3}$, если $m_B^* \lesssim 10m_0$ (где m_0 — масса свободного электрона). При этом критическая температура T_c перехода в сверхпроводящее (сверхтекучее) состояние, которая в данном случае совпадает с температурой бозе-конденсации [55]

$$T_B = 3,31 \frac{\hbar^2 n_B^{2/3}}{k_B m_B^*}, \quad (10)$$

где k_B — постоянная Больцмана, может достигать весьма высоких значений $T_c = T_B \geq 200$ К, превышающих максимальные T_c для открытых Беднорцем и Мюллером [56] *высокотемпературных сверхпроводников* [57] на основе купратных металлооксидных соединений*. Однако в настоящее время нет достаточно веских оснований (ни экспериментальных, ни теоретических) утверждать, что в этих соединениях реализуется биполярный механизм *высокотемпературной сверхпроводимости* (ВТСП).

3.1.2. *Нейтральный бозе-газ с частицами конечного радиуса.* В отличие от [6, 52], Бракнером и Савадой [4,5] была рассмотрена модель бозе-газа, состоящего из нейтральных частиц конечного размера в виде твердых сфер диаметром a , так что потенциал парного взаимодействия соответствует бесконечному отталкиванию на расстояниях $r \leq a$ и равен нулю при $r > a$. В этом случае фурье-компонента эффективного взаимодействия

с учетом квантовых (волновых) свойств частиц и их взаимной дифракции имеет вид [5] ($\hbar = 1$)

$$V(p) = V_0 \frac{\sin pa}{pa} \equiv V_0 j_0(pa), \quad (11)$$

где $j_0(x)$ — сферическая функция Бесселя с нулевым индексом, а V_0 — положительная константа дальнедействующего отталкивания (при $p = 0$), которое обеспечивает устойчивость системы по отношению к самопроизвольному сжатию (коллапсу). Однако, как следует из (11), в области достаточно больших передаваемых импульсов (в частности, при $\pi/a < p < 2\pi/a$) знак взаимодействия $V(p)$ меняется на противоположный, что соответствует эффективному притяжению дифракционной квантовой природы (рис. 2,а). Подстановка потенциала (11) в боголюбовский спектр (7) приводит к немонотонному закону дисперсии с минимумом при $p \approx 3\pi/2a$ (рис. 2,б), что качественно согласуется с экспериментально наблюдаемым по рассеянию нейтронов спектром элементарных возбуждений в жидком ^4He [2] с так называемым «ротонным» минимумом.

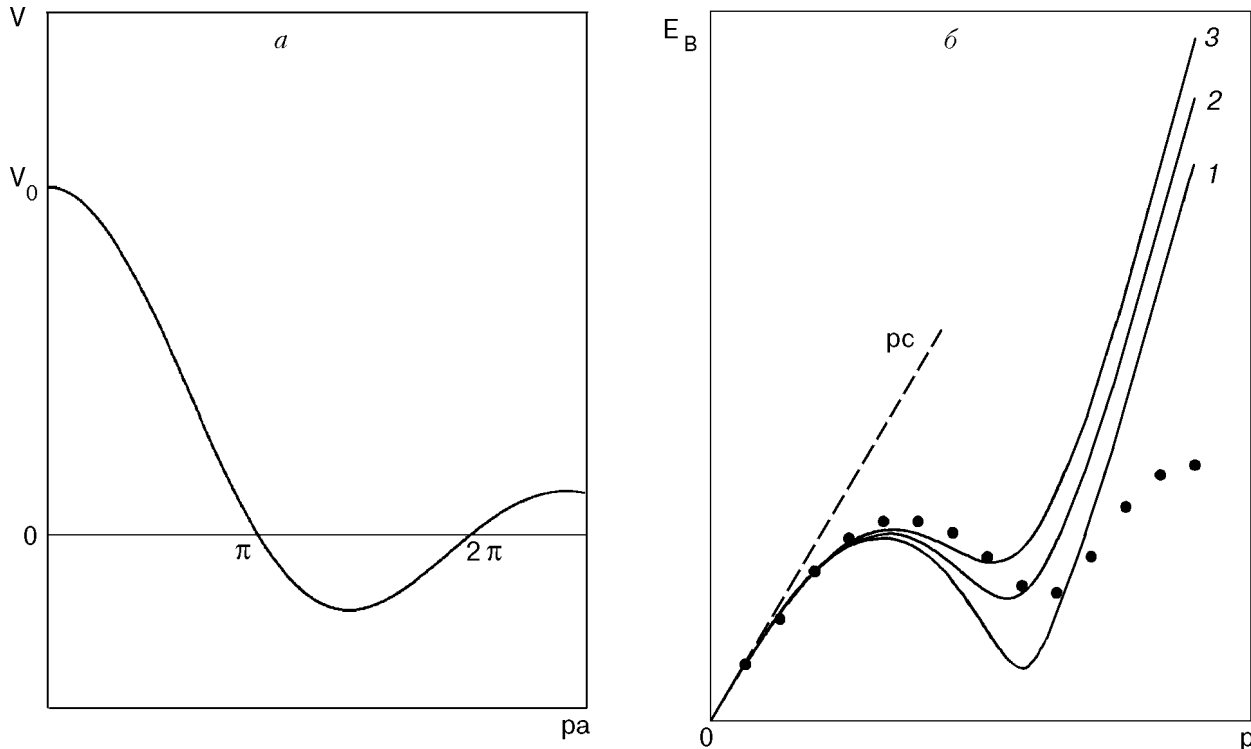


Рис. 2. а — Псевдопотенциал парного взаимодействия бозе-частиц в модели «твердых сфер». б — Боголюбовский спектр в модели «твердых сфер» при $u = c$ для разных значений безразмерного параметра $\beta_0 = 4n m a^2 V_0 / \hbar^2$: 80 (1); 64 (2); 53 (3). Черными кружками показан экспериментальный спектр квазичастиц в ^4He .

* При этом $\omega_{pl}^* = (16\pi e^2 n_B / \epsilon_0 m_B^*)^{1/2} \geq 3,6 \cdot 10^{13} \text{ c}^{-1}$ и $v_c = 2 \sqrt{\hbar \omega_{pl}^* / m_B^*} \geq 4 \cdot 10^6 \text{ см/с}$, так что плотность критического тока $j_c = 2en_B v_c \geq 10^8 \text{ А/см}^2$.

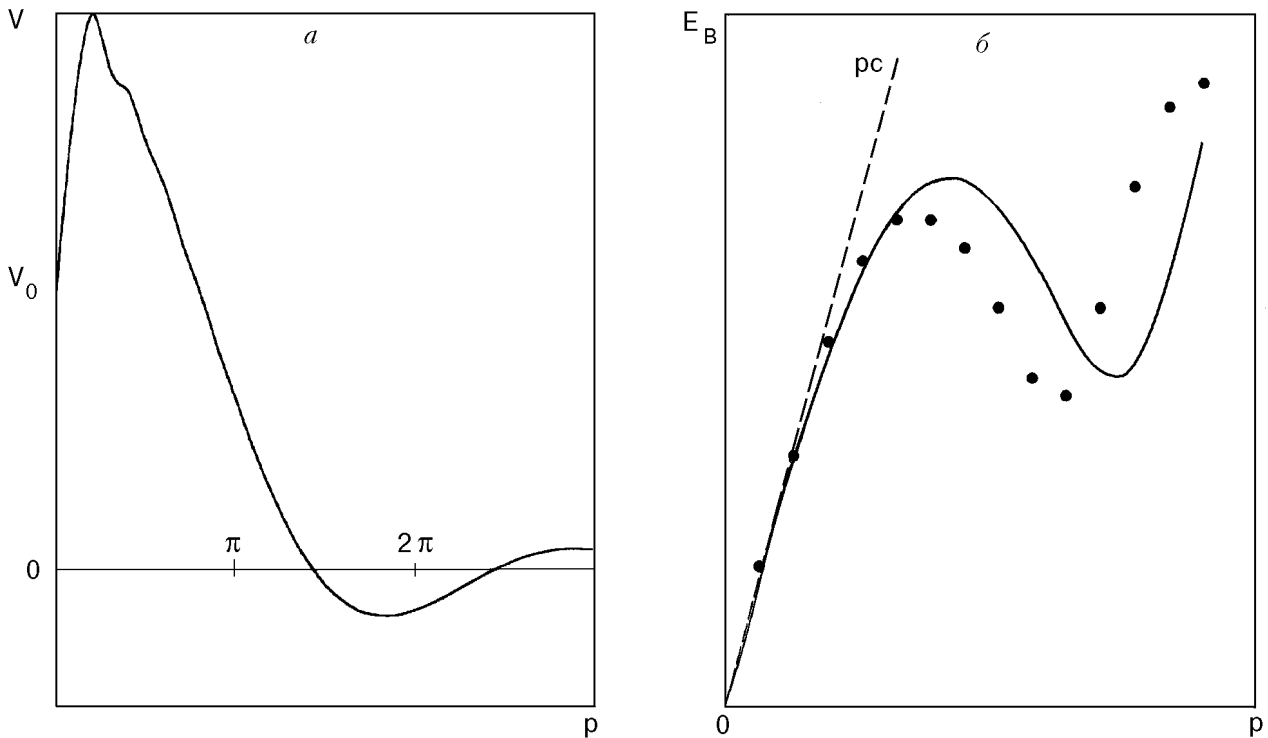


Рис. 3. *a* – Псевдопотенциал парного взаимодействия бозе-частиц в модели «полупрозрачных сфер» с притяжением в области $a < r < b$ для значений параметров $|V_2|/V_1 = 0,5$, $a/b = 0,1$ и $V_0 = V_1 - |V_2|$. *б* – Боголюбовский спектр в модели «полупрозрачных сфер» с притяжением для приведенных выше значений параметров при $u = c$ и $\beta_0 = 667$. Черными кружками показан экспериментальный спектр квазичастиц в ^4He .

В рамках модели «полупрозрачных» сфер [19] с конечным отгалькиванием $V_1 > 0$ в области $r \leq a$ и при дополнительном учете слабого (ван-дер-ваальсовского) притяжения $V_2 < 0$ в некоторой области $a < r < b$ фурье-компонента потенциала парного взаимодействия равна (рис. 3,а)

$$V(p) = V_1 j_1(pa)/pa - |V_2| j_1(pb)/pb, \quad (12)$$

где $V_1 \gg |V_2|$, а $j_1(x) = -3(x \cos x - \sin x)/x^3$ – сферическая функция Бесселя с единичным индексом. Подбирая параметры, с помощью потенциала (12) можно добиться достаточно близкого совпадения теоретического спектра (7) с экспериментальным спектром квазичастиц в ^4He (рис. 3,б). Однако ясно, что такое совпадение в значительной мере является случайным и не соответствует реальности, поскольку теория Боголюбова [6] неприменима для описания свойств бозе-жидкости с сильно «истощенным» ОБК ($n_0 \ll n$). Более того, как отмечалось в разд. 2, структура коллективной ветви спектра, восстанавливаемая по динамическому формфактору нейтронного рассеяния, может не иметь прямого отношения к критерию сверхтекучести ^4He . Поэтому необходимо более последовательное рассмотрение неидеальных бозе-систем.

3.2. Неидеальные бозе-системы с фиксированным числом частиц (метод Фолди–Бракнера)

Как известно, в приближении Боголюбова [6] все частицы слабонеидеального бозе-газа, которые не находятся в ОБК с плотностью $n_0 \approx n$, объединены в конденсат несвязанных бозонных пар. Можно попытаться улучшить это приближение, сохранив (хотя бы частично) в гамильтониане (4) члены более высокого порядка по малому параметру n'/n_0 , которые описывают конденсат связанных «куперовских» пар бозонов с противоположными импульсами, как это делалось в [27–33].

Рассмотрим этот вопрос с помощью метода, развитого в [20], когда в гамильтониане (5), наряду с квадратичными по b_p^+ и b_p членами, сохраняются те члены четвертого порядка (второго порядка по n'/n_0), которые в приближении среднего поля могут быть представлены через комбинации ненулевых нормальных $\langle b_p^+ b_p \rangle$ и аномальных $\langle b_p^+ b_{-p}^+ \rangle$ и $\langle b_p b_{-p} \rangle$ средних. В результате перенормированный квадратичный гамильтониан Боголюбова (5) с учетом сохранения полного числа частиц принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_B = & \frac{1}{2} n_0^2 V(0) + \sum_{\mathbf{p}} \left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \Phi(\mathbf{p}) \right] b_{\mathbf{p}}^+ b_{\mathbf{p}} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}} [n_0 V(\mathbf{p}) - \Psi(\mathbf{p})] (b_{\mathbf{p}^+}^+ b_{-\mathbf{p}}^+ + b_{\mathbf{p}} b_{-\mathbf{p}}), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\Phi(\mathbf{p}) = n_0 V(\mathbf{p}) + \varphi(\mathbf{p}) - \varphi(0) + \Psi(0); \quad (14)$$

$$\varphi(\mathbf{p}) = \sum_{\mathbf{p}'} V(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \langle b_{\mathbf{p}'}^+, b_{\mathbf{p}} \rangle; \quad (15)$$

$$\Psi(\mathbf{p}) = - \sum_{\mathbf{p}'} V(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \langle b_{\mathbf{p}'} b_{-\mathbf{p}} \rangle. \quad (16)$$

Применяя к (13) канонические преобразования (6) и учитывая, что для новых невзаимодействующих квазичастиц аномальные средние $\langle \beta_{\mathbf{p}}^+ \beta_{-\mathbf{p}}^+ \rangle = \langle \beta_{\mathbf{p}} \beta_{-\mathbf{p}} \rangle = 0$, приведем гамильтониан (13) к виду

$$\begin{aligned} \tilde{H}_B = & \tilde{E}_0 + \sum_{\mathbf{p}} [\varepsilon_0(\mathbf{p})(\lambda_{\mathbf{p}}^2 + \mu_{\mathbf{p}}^2) + 2\lambda_{\mathbf{p}} \mu_{\mathbf{p}} \eta(\mathbf{p})] \beta_{\mathbf{p}}^+ \beta_{\mathbf{p}} + \\ & + \sum_{\mathbf{p}} [\varepsilon_0(\mathbf{p})\lambda_{\mathbf{p}} \mu_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} (\lambda_{\mathbf{p}}^2 + \mu_{\mathbf{p}}^2)\eta(\mathbf{p})] (\beta_{\mathbf{p}}^+ \beta_{-\mathbf{p}}^+ + \beta_{\mathbf{p}} \beta_{-\mathbf{p}}), \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\varepsilon_0(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \Phi(\mathbf{p}); \quad \eta(\mathbf{p}) = n_0 V(\mathbf{p}) - \Psi(\mathbf{p}); \quad (18)$$

$$\tilde{E}_0 = \frac{1}{2} n_0^2 V(0) - \sum_{\mathbf{p}} [\varepsilon_0(\mathbf{p}) \mu_{\mathbf{p}}^2 + \lambda_{\mathbf{p}} \mu_{\mathbf{p}} \eta(\mathbf{p})]. \quad (19)$$

Из условия обращения в нуль взаимодействия между квазичастицами в (17) находим

$$\lambda_{\mathbf{p}} = \frac{\eta(\mathbf{p})}{\sqrt{\eta^2(\mathbf{p}) - [\tilde{E}(\mathbf{p}) - \varepsilon_0(\mathbf{p})]^2}}; \quad (20)$$

$$\mu_{\mathbf{p}} = \frac{\tilde{E}(\mathbf{p}) - \varepsilon_0(\mathbf{p})}{\sqrt{\eta^2(\mathbf{p}) - [\tilde{E}(\mathbf{p}) - \varepsilon_0(\mathbf{p})]^2}},$$

где $\tilde{E}(\mathbf{p})$ — перенормированный спектр квазичастиц:

$$\tilde{E}(\mathbf{p}) = \sqrt{\varepsilon_0^2(\mathbf{p}) - \eta^2(\mathbf{p})}. \quad (21)$$

При этом уравнение (16) для парного «параметра порядка» $\Psi(\mathbf{p})$ с учетом (20) принимает вид

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{p}) = & \\ = & \sum_{\mathbf{p}'} V(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \frac{\eta(\mathbf{p}') [\tilde{E}(\mathbf{p}') - \varepsilon_0(\mathbf{p}')] }{[\tilde{E}(\mathbf{p}') - \varepsilon_0(\mathbf{p}')]^2 - \eta^2(\mathbf{p}')} [1 + 2\langle \beta_{\mathbf{p}'}^+, \beta_{\mathbf{p}'} \rangle], \end{aligned} \quad (22)$$

где $\langle \beta_{\mathbf{p}}^+, \beta_{\mathbf{p}} \rangle = [e^{\tilde{E}(\mathbf{p})/T} - 1]^{-1}$ — бозе-эйнштейновская функция распределения квазичастиц при $T \neq 0$ ($k_B = 1$).

С учетом (18) нетрудно показать, что спектр квазичастиц (21) при $\mathbf{p} \rightarrow 0$ имеет вид

$$\tilde{E}(\mathbf{p}) \cong \sqrt{\mathbf{p}^2 \tilde{u}^2(0) + \Delta_0^2}, \quad (23)$$

где

$$\tilde{u}(0) = \sqrt{\Phi(0)/m}; \quad \Delta_0 = 2 \sqrt{n_0 V(0) \Psi(0)}. \quad (24)$$

Отсюда следует, что при одновременном существовании ОБК и ПКК ($n_0 \neq 0$ и $\Psi(0) \neq 0$) в одночастичном спектре элементарных возбуждений существует конечная щель $\Delta_0 \neq 0$ при $\mathbf{p} = 0$ (ср. с [27–33]). Это противоречит общетеоретическим представлениям о сильной гибридизации одночастичной и коллективной (двухчастичной) ветвей и о звуковом характере спектра при $\mathbf{p} \rightarrow 0$ в нейтральных бозе-системах [8,26].

Согласно (23) и (24), акустический закон дисперсии при $\mathbf{p} \rightarrow 0$ в данном случае возможен только при полном отсутствии макроскопически заполненного ОБК, т.е. при $n_0 = 0$, когда $\Delta_0 = 0$, $\eta(\mathbf{p}) = \Psi(\mathbf{p})$, а $\Phi(0) \equiv \Psi(0)$, так что $\tilde{E}(\mathbf{p}) \approx p\tilde{u}(0)$. При этом интегральное уравнение (22) приводится к виду

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{p}) = & \\ = & - \sum_{\mathbf{p}'} V(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \frac{\Psi(\mathbf{p}') [\tilde{E}(\mathbf{p}') - \varepsilon_0(\mathbf{p}')] }{[\tilde{E}(\mathbf{p}') - \varepsilon_0(\mathbf{p}')]^2 - \Psi^2(\mathbf{p}')} \operatorname{cth} \frac{\tilde{E}(\mathbf{p}')}{2T}, \end{aligned} \quad (25)$$

а фазовая скорость $\tilde{u}(0) = \sqrt{\Psi(0)/m}$ является вещественной только при условии $\Psi(0) > 0$, т.е. при определенном характере двухчастичного взаимодействия $V(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$, которое должно иметь достаточно широкую область притяжения (см. рис. 2,а и 3,а).

Однако изложенный выше приближенный подход к описанию сверхтекучего состояния неидеальной бозе-системы с постоянным числом частиц $n = \text{const}$ (называемый часто *методом Фолди — Бракнера*) не является строго последовательным в теоретическом плане и аналогичен в определенном смысле первоначальному упрощенным вари-

антам модели БКШ [9] или метода канонических uv -преобразований Боголюбова [58] в теории сверхпроводимости. Более последовательный подход на основе метода функций Грина [8] с фиксированным значением химического потенциала $\mu = \text{const}$ бозе-системы (так называемый *метод Гугенгольца — Пайнса*) будет рассмотрен в следующем разделе.

4. Применение метода функций Грина для описания сверхтекучей бозе-жидкости с интенсивным конденсатом бозонных пар

4.1. Уравнения Дайсона — Беляева и метод Гугенгольца — Пайнса для бозе-жидкости с «истощенным» ОБК

Для описания свойств сверхтекучей бозе-жидкости в рамках метода функций Грина [8] обычно используются уравнения Дайсона — Беляева [25], позволяющие выразить одночастичные нормальную G_{11} и аномальную G_{12} функции Грина через соответствующие собственно-энергетические части Σ_{11} и Σ_{12} :

$$G_{11}(p) = [G_0^{-1}(-p) - \Sigma_{11}(-p)]/Z(p); \quad (26)$$

$$G_{12}(p) = \Sigma_{12}(p)/Z(p),$$

где

$$Z(p) = [G_0^{-1}(-p) - \Sigma_{11}(-p)] \times \\ \times [G_0^{-1}(p) - \Sigma_{11}(p)] - |\Sigma_{12}(p)|^2; \quad (27)$$

$$G_0^{-1}(\pm p) = [\pm \varepsilon - \frac{p^2}{2m} + \mu - i\delta]; \quad (28)$$

$$p = (\mathbf{p}, \varepsilon); \quad \delta \rightarrow +0;$$

μ — химический потенциал квазичастиц, который удовлетворяет соотношению Гугенгольца — Пайнса [26]:

$$\mu = \Sigma_{11}(0) - \Sigma_{12}(0). \quad (29)$$

В дальнейшем вместо обычной формулировки теории возмущений [8,25] будет использоваться перенормированная в области малых импульсов полевая теория [14,16], в которой исходные переменные ψ заменены на «адекватные» переменные $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_L + \tilde{\psi}_{sh}$, представляющие собой комбинации длинноволновых «гидродинамических» переменных $\tilde{\psi}_L$ и коротковолновых «полевых» переменных $\tilde{\psi}_{sh}$. В такой теории устранена так называемая «инфракрасная аномалия ангармонизма» [14,16], которая приводит к неаналитич-

ности собственно-энергетической части $\Sigma_{ik}(p)$ при $p \rightarrow 0$ и к равенству $\Sigma_{12}(0) = 0$. В терминах перенормированных переменных $\tilde{\Sigma}_{12}(0) \neq 0$, так что для спектра квазичастиц $\varepsilon(\mathbf{p})$ остаются справедливыми те же формулы, что и в исходной полевой теории [8]:

$$\varepsilon(\mathbf{p} \rightarrow 0) \approx c |\mathbf{p}|; \quad c = [\tilde{\Sigma}_{12}(0)/m^*]^{1/2}, \quad (30)$$

где

$$\frac{1}{m^*} = \frac{2}{B} \left[\frac{1}{2m} + \frac{\partial \tilde{\Sigma}_{11}(0)}{\partial |\mathbf{p}|^2} - \frac{\partial \tilde{\Sigma}_{12}(0)}{\partial |\mathbf{p}|^2} \right]; \quad (31)$$

$$B = \left[1 - \frac{\partial \tilde{\Sigma}_{11}(0)}{\partial \varepsilon} \right]^2 - \\ - \tilde{\Sigma}_{11}(0) \frac{\partial^2 \tilde{\Sigma}_{11}(0)}{\partial \varepsilon^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} [\tilde{\Sigma}_{12}(0)]^2. \quad (32)$$

В общем случае спектр элементарных возбуждений с нулевой спиральностью определяется полюсами $G_{ik}(p)$, т.е. нулями функции $Z(p)$:

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \left\{ \left[\frac{p^2}{2m} + \tilde{\Sigma}_{11}^s(\mathbf{p}) - \mu \right]^2 - |\tilde{\Sigma}_{12}(\mathbf{p})|^2 \right\}^{1/2} + \tilde{\Sigma}_{11}^a(\mathbf{p}), \quad (33)$$

где

$$\tilde{\Sigma}_{11}^{s,a}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} [\tilde{\Sigma}_{11}^s(\mathbf{p}, \varepsilon(\mathbf{p})) \pm \tilde{\Sigma}_{11}^s(-\mathbf{p}, -\varepsilon(\mathbf{p}))]. \quad (34)$$

Основная трудность теории бозе-систем с интенсивным ОБК состоит в вычислении собственной энергии $\tilde{\Sigma}_{ik}(p)$, представленной в виде бесконечной последовательности диаграмм Фейнмана с возрастающим числом внешних конденсатных линий [25], что соответствует разложению по степеням $n_0^{1/2}$.

Однако, как было впервые показано в [18], задача существенно упрощается в случае бозе-жидкости с сильным взаимодействием между частицами и, следовательно, с сильно подавленным ОБК, когда выполняется неравенство

$$n_0 \ll n' = \langle \sum_{\mathbf{p} \neq 0} b_{\mathbf{p}}^+ b_{\mathbf{p}} \rangle \approx n, \quad (35)$$

прямо противоположное условию слабой неидеальности бозе-газа в теории Боголюбова [6] ($n' \ll n_0 \approx n$). В этом случае в уравнениях для $\tilde{\Sigma}_{11}$ и $\tilde{\Sigma}_{12}$ с хорошей точностью можно ограничиться учетом только первого члена разложения по $n_0^{1/2}$, который содержит только две конденсатные

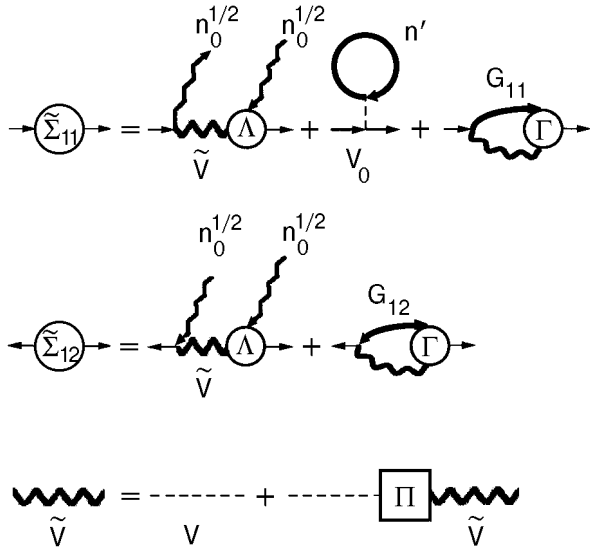


Рис. 4. Диаграммное представление уравнений Дайсона – Беляева для $\tilde{\Sigma}_{11}$ и $\tilde{\Sigma}_{12}$ для бозе-жидкости с «истощенным» ОБК в низжайшем по числу конденсатных линий приближении (с учетом членов порядка n_0) и уравнение Дайсона для перенормированного («экранированного») парного взаимодействия между бозонами \tilde{V} .

линии, и пренебречь членами более высокого порядка по $n_0^{1/2}$.

Соответствующая «укороченная» система уравнений для $\tilde{\Sigma}_{ik}(p)$ имеет вид [18]

$$\tilde{\Sigma}_{11}(p) = n_0 \Lambda(p) \tilde{V}(p) + n' V(0) + \tilde{\Phi}(p); \quad (36)$$

$$\tilde{\Sigma}_{12}(p) = n_0 \Lambda(p) \tilde{V}(p) + \tilde{\Psi}(p), \quad (37)$$

где

$$\tilde{\Phi}(p) = i \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} G_{11}(p') \tilde{V}(p-p') \Gamma(p, p'); \quad (38)$$

$$\tilde{\Psi}(p) = i \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} G_{12}(p') \tilde{V}(p-p') \Gamma(p, p'); \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}(p) &= V(p) [1 - V(p)\Pi(p)]^{-1}; \\ \Lambda(p) &= \Gamma(p, 0) = \Gamma(0, p); \end{aligned} \quad (40)$$

$$\Pi(p) = i \int \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} [G_{11}(p') G_{11}(p'-p) +$$

$$+ G_{12}(p') G_{12}(p'-p)] \Gamma(p, p'). \quad (41)$$

Здесь $\Gamma(p, p')$ — вершинная часть (трехполюсник) взаимодействия, описывающая многочастичные эффекты; $\Pi(p)$ — поляризационный оператор бозонов; $\tilde{V}(p)$ — перенормированная («экранированная») фурье-компонента потенциала парного взаимодействия, а функция $\tilde{\Psi}(p)$ играет роль *парного параметра порядка сверхтекучей компоненты* в системе бозонов. В графическом виде уравнения для $\tilde{\Sigma}_{11}$, $\tilde{\Sigma}_{12}$ и \tilde{V} показаны на рис. 4.

Если пренебречь полюсами вершины $\Gamma(p, p')$ и эффектами запаздывания в «экранированном» взаимодействии $\tilde{V}(p)$, т.е. не учитывать вклад двухчастичных и коллективных возбуждений*, то интегрирование по частотам в (38) и (39) сведется к взятию вычетов в полюсах одночастичных функций Грина $G_{11}(p)$ и $G_{12}(p)$. В результате этого интегральные уравнения (38) и (39) с учетом (26)–(28), (36) и (37) принимают вид (см. [18])

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(\mathbf{p}) &= \\ &= - \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \tilde{V}(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \frac{n_0 \Lambda(\mathbf{p}') \tilde{V}(\mathbf{p}') + \tilde{\Psi}(\mathbf{p}')}{2\varepsilon(\mathbf{p}')}, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \tilde{V}(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \left[\frac{A_0(\mathbf{p}')}{\varepsilon(\mathbf{p}')} - 1 \right], \quad (43)$$

где

$$A_0(\mathbf{p}) = n_0 \Lambda(\mathbf{p}) \tilde{V}(\mathbf{p}) + n' V(0) + \tilde{\Phi}(\mathbf{p}) + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu. \quad (44)$$

При этом полное число частиц определяется соотношением

$$\begin{aligned} n &= n_0 + \\ &+ i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} G_{11}(p) = n_0 + \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[\frac{A_0(\mathbf{p})}{\varepsilon(\mathbf{p})} - 1 \right], \end{aligned} \quad (45)$$

а соотношение (29) с учетом (36) и (37) приводится к виду

* Такое приближение оправданно, если ветвь одночастичных возбуждений лежит гораздо ниже ветви коллективных возбуждений (см. ниже).

$$\mu = n'V(0) + \tilde{\varphi}(0) - \tilde{\Psi}(0). \quad (46)$$

Однако, как будет видно из дальнейшего, сосуществование слабого ОБК и интенсивного ПКК может приводить к неустойчивости основного состояния бозе-системы.

4.2. Неустойчивость состояния бозе-системы со слабым ОБК и интенсивным ПКК

Прежде всего рассмотрим интегральное уравнение (42) при $\mathbf{p} = 0$:

$$\tilde{\Psi}(0) = - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{n_0 [\Lambda(\mathbf{p})\tilde{V}(\mathbf{p})]^2 + \Lambda(\mathbf{p})\tilde{V}(\mathbf{p})\tilde{\Psi}(\mathbf{p})}{2\varepsilon(\mathbf{p})}. \quad (47)$$

Легко видеть, что первый член в правой части (47), пропорциональный n_0 и не зависящий от $\tilde{\Psi}(\mathbf{p})$, отрицателен при любом знаке $\Lambda(\mathbf{p})$ и $\tilde{V}(\mathbf{p})$. Поэтому если предположить, что отрицательный знак этого неоднородного члена, описывающего вклад ОБК, определяет в целом знак (фазу) параметра $\tilde{\Psi}(\mathbf{p})^*$, то состояние бозе-системы со слабым («истощенным») ОБК и с интенсивным ПКК может оказаться неустойчивым, поскольку, согласно (37), при $\tilde{\Psi}(0) < 0$ и при достаточно малой величине n_0

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_{12}(0) = n_0 \Lambda(0)\tilde{V}(0) + \tilde{\Psi}(0) < 0, \\ \text{т.е. } c^2 = \frac{\tilde{\Sigma}_{12}(0)}{m^*} < 0, \end{aligned} \quad (48)$$

несмотря на условие $\Lambda(0)\tilde{V}(0) > 0$, необходимое для обеспечения макроскопической устойчивости системы относительно самопроизвольного сжатия (коллапса). Иными словами, как было впервые отмечено в [18], при совпадении фазы $\tilde{\Psi}(\mathbf{p})$ с фазой, индуцируемой ненулевым ОБК, возникает *неустойчивость фононного спектра бозе-системы* при $n_0 < |\tilde{\Psi}(0)|/\Lambda(0)\tilde{V}(0)$.

Заметим, что если пренебречь членом $\sim n_0$, то уравнение (42) принимает вид, аналогичный уравнению для фурье-компоненты волновой функции пары частиц в вакууме

$$\Psi_0(\mathbf{p}) = \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \frac{\Psi_0(\mathbf{p}')}{\omega_0 - 2\varepsilon(\mathbf{p}) + i\delta} \quad (49)$$

с нулевой энергией связи $\omega_0 \equiv \Omega - \mathbf{P}^2/4m = 0$, где Ω и \mathbf{P} — суммарные энергия и импульс. Из этой

аналогии ясно, что для образования интенсивного ПКК *эффективный потенциал* $\Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{p}')\tilde{V}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ должен отвечать *притяжению в значительной части импульсного пространства*, существенной для интеграла по \mathbf{p}' в (42). Такого притяжения ($\Gamma\tilde{V} < 0$) должно быть почти достаточно для поддержания *связанного состояния пары квазичастиц* с кинетической энергией $2\varepsilon(\mathbf{p})$, т.е. для существования нетривиального решения ($\tilde{\Psi} \neq 0$) уравнения (42) при $n_0 \rightarrow 0$.

В связи с этим следует заметить, что статический эффективный потенциал $\tilde{V}(\mathbf{p})$ может существенно отличаться от исходного потенциала взаимодействия между частицами $V(\mathbf{p})$. В частности, поскольку статический поляризационный оператор $\Pi(\mathbf{p}, 0)$ отрицателен при любых \mathbf{p} , то в «экранированном» потенциале $\tilde{V}(\mathbf{p}) = V(\mathbf{p}) \times [1 - V(\mathbf{p})\Pi(\mathbf{p}, 0)]^{-1}$ происходит *ослабление отталкивания* в той области импульсов, где $V(\mathbf{p}) > 0$ (например, при $p < \pi/a$ для модели «твердых сфер»), и *усиление притяжения* в той области, где $V(\mathbf{p}) < 0$ (для потенциала (11) эта область соответствует $\pi/a < p < 2\pi/a$). Это обстоятельство было учтено в [35], где $\Pi(\mathbf{p}, 0)$ для простоты заменялся его длинноволновым пределом $\Pi_0 = -m/\pi a$ при $\mathbf{p} \rightarrow 0$. Учет импульсной зависимости в приближении хаотических фаз (ПХФ) приводит к выражению

$$\Pi(\mathbf{p}, 0) = - \frac{m}{2\pi} \left[1 - \frac{a\beta(\mathbf{p})}{2\pi} \arctg \frac{2\pi}{a\beta(\mathbf{p})} \right]; \quad (50)$$

$$\beta(\mathbf{p}) = \sqrt{\mathbf{p}^2/4 - 2m\mu}.$$

Соответствующий эффективный потенциал $\tilde{V}(\mathbf{p})$ показан на рис. 5 при $\mu = 0$ для разных значений безразмерного параметра $\alpha = mV(0)/\pi a$. Как видим, интегральный вклад области усиленного притяжения при достаточно больших значениях α может превысить вклад ослабленного отталкивания в уравнении (42) или (47) при $n_0 = 0$ даже для модели «твердых сфер» с бесконечным отталкиванием при $r \leq a$. Учет *ван-дер-ваальсовых сил притяжения* в более реалистических моделях взаимодействия атомов ${}^4\text{He}$ (например, *потенциала Ленарда-Джонса*) должен привести к еще большему усилению эффективного притяжения, достаточному для образования интенсивного ПКК в He-II или, возможно, связанных пар атомов ${}^4\text{He}$ (см. ниже).

* Отрицательный знак $\tilde{\Psi}(\mathbf{p})$ поддерживается также эффективным притяжением, когда $\tilde{V}(\mathbf{p}) < 0$ в некоторой области $\mathbf{p} \neq 0$.

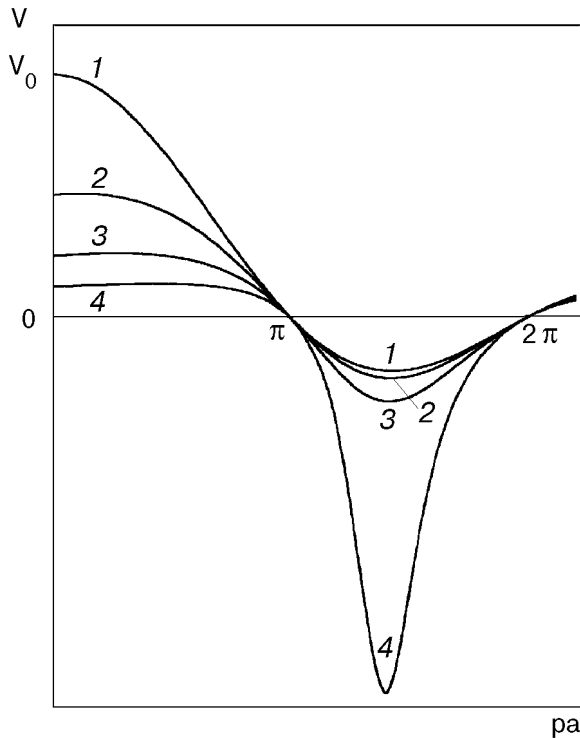


Рис. 5. Зависимость статического «экранированного» потенциала \tilde{V} от p для модели «твердых сфер» в ПХФ для поляризационного оператора $\Pi(p, 0)$ при разных значениях безразмерного параметра $\alpha = mV(0)/(\pi a)$: 0 (1); 1 (2); 3 (3); 7 (4).

Согласно (47), образованию ПКК препятствует отрицательный неоднородный член, пропорциональный n_0 и связанный с ОБК, который, как было показано выше, приводит к неустойчивости фононного спектра, если фаза ПКК совпадает с фазой ОБК. Между тем нелинейное неоднородное интегральное уравнение (42) в принципе допускает решение и с $\tilde{\Psi}(\mathbf{p}) > 0$, когда интенсивный ПКК отличается по фазе на π от фазы ОБК. При этом фононный спектр как будто устойчив, поскольку $\tilde{\Sigma}_{12}(0) > 0$ и $c^2 > 0$. Однако в этом случае устойчивость состояния бозе-системы с ПКК в противофазе с ОБК для одночастичной ветви ($c^2 > 0$) нарушается в канале двухчастичных возбуждений. Действительно, как было показано в [18], знаки первого и второго членов в (42) в существенной для возникновения ПКК области интегрирования ($\pi/a < p < 2\pi/a$) противоположны ($\tilde{\Psi}(\mathbf{p}) > 0$, $\tilde{V}(\mathbf{p}) < 0$). Поэтому уравнение (42) формально может быть представлено в виде, аналогичном (49):

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{p}) = \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \tilde{V}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \frac{\tilde{\Psi}(\mathbf{p}')}{\tilde{\omega}_0(\mathbf{p}') - 2\varepsilon(\mathbf{p}')}, \quad (51)$$

но с отрицательной энергией связи $\tilde{\omega}_0 < 0$. Это соответствует неустойчивому состоянию с самопроизвольным рождением пар, которое отвечает энергетически выгодному «повороту» фазы ПКК на π до совпадения с фазой ОБК, т.е. изменению знака $\tilde{\Psi}(\mathbf{p})$. Действительно, как легко видеть, отрицательная «энергия спаривания»

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{i}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{\Sigma}_{12}(p) G_{21}(p) = \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{[n_0 \Lambda(\mathbf{p}) \tilde{V}(\mathbf{p}) + \tilde{\Psi}(\mathbf{p})]^2}{2\varepsilon(\mathbf{p})}, \quad (52) \end{aligned}$$

которая входит в усредненный по основному состоянию гамильтониан взаимодействия

$$\langle H_{\text{int}} \rangle =$$

$$= \frac{i}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} [\tilde{\Sigma}_{11}(p) G_{11}(p) + \tilde{\Sigma}_{12}(p) G_{21}(p)] + \frac{\mu n_0}{2}, \quad (53)$$

максимальна по абсолютной величине при совпадении знаков $\tilde{\Psi}(\mathbf{p})$ и $\Lambda(\mathbf{p})\tilde{V}(\mathbf{p})$ в наиболее существенной для (42) и (52) области импульсов, где $\Lambda(\mathbf{p})\tilde{V}(\mathbf{p}) < 0$, т.е. энергия основного состояния E_0 минимальна при совпадении фаз ПКК и ОБК. Однако при $\tilde{\Psi}(\mathbf{p}) < 0$ снова возникает неустойчивость фононного спектра ($c^2 < 0$) при достаточно малых значениях $n_0 \ll n$.

Таким образом, неустойчивость, возникающая в бозе-системе с интенсивным ПКК и слабым ОБК, сохраняется при любом знаке $\tilde{\Psi}(\mathbf{p})$: при $\tilde{\Psi}(\mathbf{p}) < 0$, когда фазы ПКК и ОБК совпадают, она проявляется в одночастичном спектре, а при $\tilde{\Psi}(\mathbf{p}) > 0$ — в двухчастичном спектре. Возможный способ устранения неустойчивости основного состояния — полное исчезновение ОБК при сохранении ПКК, разумеется, если существует нетривиальное (ненулевое) решение уравнения (42) при $n_0 = 0$.

Предположение об отсутствии макроскопически заполненного ОБК в сверхтекучем ^4He не противоречит экспериментальным данным [12] и позволяет объяснить полное исчезновение нормальной компоненты в He-II при $T \rightarrow 0$ [13], т.е. равенство плотности сверхтекучей компоненты полной плотности ^4He , несмотря на сильное «ис-

тошение» ОБК за счет взаимодействия между частицами в бозе-жидкости. В этом случае *сверхтекучая компонента* ρ_s определяется не интенсивным ОБК, как в слабонеидеальном бозегазе [6], а «*куперовским*» ПКК и высшими многочастичными конденсатами, содержащими четные числа несвязанных частиц [18].

4.3. Одночастичный спектр бозе-системы с ПКК без ОБК и критерий сверхтекучести

В отсутствие ОБК ($n_0 = 0$) исчезают все полевые диаграммы с конденсатными линиями в разложениях $\tilde{\Sigma}_{ik}(p)$ по $n_0^{1/2}$ [25], а уравнения (36) и (37) при условии $n' = n$ превращаются в тождества [18]

$$\tilde{\Sigma}_{11}(p) \equiv nV(0) + \tilde{\varphi}(p); \quad \tilde{\Sigma}_{12}(p) \equiv \tilde{\Psi}(p). \quad (54)$$

При этом уравнения (42)–(45) принимают вид (при $T = 0$)

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{p}) = - \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \tilde{V}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \frac{\tilde{\Psi}(\mathbf{p}')}{2\varepsilon(\mathbf{p}')}; \quad (55)$$

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \tilde{V}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \left[\frac{A(\mathbf{p}')}{\varepsilon(\mathbf{p}')} - 1 \right]; \quad (56)$$

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \sqrt{A^2(\mathbf{p}) - |\tilde{\Psi}(\mathbf{p})|^2}, \quad (57)$$

где

$$A(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu + nV(0) + \tilde{\varphi}(\mathbf{p}); \quad (58)$$

$$n = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[\frac{A(\mathbf{p})}{\varepsilon(\mathbf{p})} - 1 \right].$$

Как видим, уравнение (55) для «парного» параметра порядка $\tilde{\Psi}(\mathbf{p})$ при $n_0 = 0$ становится однородным. Это означает, что фаза ПКК является независимой и произвольной и характеризует вырождение основного состояния бозе-жидкости (аналогично вырождению основного состояния сверхпроводников [9]).

Соответственно *голдстоуновской модой*, отвечающей *гидродинамическому звуку*, как показано в [15], является *двухчастичная ветвь спектра* $E(\mathbf{p})$, которая определяется полюсами двухчастичной функции Грина и содержится в структуре динамического формфактора $S(\mathbf{p}, \varepsilon)$. В то же время одночастичная ветвь $\varepsilon(\mathbf{p})$ в принципе может иметь конечную щель $\Delta_0 \neq 0$ при $\mathbf{p} = 0$, поскольку нет достаточных оснований считать, что в данном случае (при произвольной фазе $\tilde{\Psi}$) продолжает

выполняться соотношение (29), основанное на разложении $\tilde{\Sigma}_{ik}(p)$ в ряд по степеням $n_0^{1/2}$ при фиксированной фазе параметров $\tilde{\Sigma}_{11}(p)$ и $\tilde{\Sigma}_{12}(p)$ (см. [18]).

Более того, как было показано в [18,29], в бозе-системе с «щелевым» одночастичным спектром $\varepsilon(p)$ уменьшение щели Δ_0 с ростом концентрации частиц n (или внешнего давления P) приводит к потере устойчивости системы при некотором конечном значении $\Delta_0 \neq 0$, т.е. исчезновение и появление ОБК сопровождается скачком n_0 и Δ_0 . Это означает, что *переход из состояния с ОБК* ($n_0 \neq 0$) и с акустическим спектром $E(\mathbf{p}) \approx pc$ элементарных возбуждений при $\mathbf{p} \rightarrow 0$ в *состояние с ПКК без ОБК* ($n_0 = 0$) и с перестроенным щелевым одночастичным спектром ($\Delta_0 \neq 0$) при изменении n или P является *фазовым переходом I-го рода*.

Наконец, следует учесть, что щелевой спектр $\varepsilon(\mathbf{p}) = \sqrt{\Delta_0^2 + \mathbf{p}^2 \tilde{u}^2}$ при достаточно малых \mathbf{p} лежит выше коллективного акустического спектра $E(\mathbf{p}) \approx pc$, так что нельзя пренебречь вкладом полюсов $\Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ и $\tilde{V}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ при вычислении интегралов по частотам в (38) и (39), и уравнения (42), (43) недостаточны для описания сверхтекучего состояния бозе-жидкости.

В связи с этим рассмотрим обсуждавшуюся в [20,35] альтернативную возможность существования в сверхтекучей бозе-жидкости с ПКК без ОБК *акустического одночастичного спектра* $\varepsilon(\mathbf{p}) \sim p$ при $\mathbf{p} \rightarrow 0$. Такая возможность реализуется, если предположить, что по-прежнему *выполняется теорема Гугенгольца – Пайнса* [26] (см. (29) и (46) при $n' \equiv n$). При произвольных \mathbf{p} одночастичный спектр (57) в этом случае с учетом (58) принимает вид

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \left\{ \left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \tilde{\varphi}(\mathbf{p}) - \tilde{\varphi}(0) + \tilde{\Psi}(0) \right]^2 - |\tilde{\Psi}(\mathbf{p})|^2 \right\}^{1/2}. \quad (59)$$

При $\mathbf{p} \rightarrow 0$ отсюда следует, что

$$\varepsilon(\mathbf{p} \rightarrow 0) \approx |\mathbf{p}| \tilde{u}; \quad \tilde{u}^2 = \tilde{\Psi}(0)/m^*, \quad (60)$$

где

$$\frac{1}{m^*} = \left\{ \frac{1}{m} + 2 \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}(\mathbf{p})}{\partial |\mathbf{p}|^2} - \frac{\partial \tilde{\Psi}(\mathbf{p})}{\partial |\mathbf{p}|^2} \right]_{\mathbf{p}=0} \right\}. \quad (61)$$

Следует подчеркнуть, что скорость \tilde{u} не равна скорости гидродинамического звука c , и $\tilde{u}^2 > 0$ при $\tilde{\Psi}(0) > 0$. При больших импульсах спектр (59) становится квадратичным по \mathbf{p} и, следовательно, для обеспечения устойчивости относи-

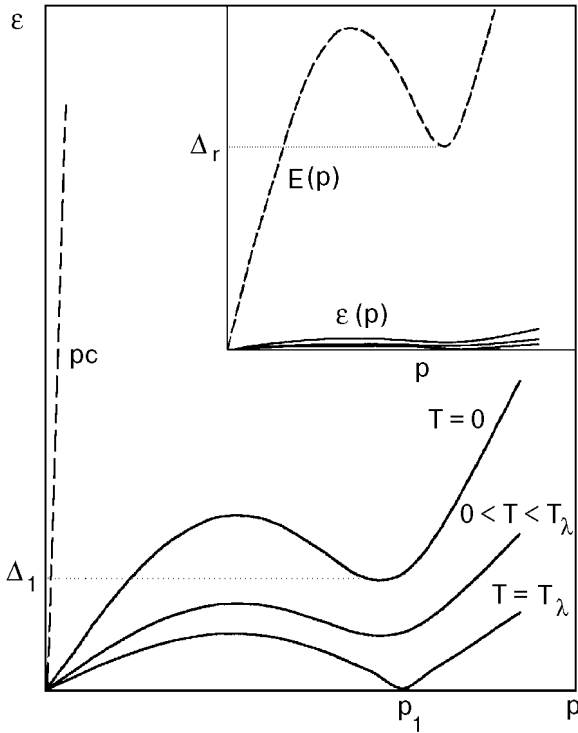


Рис. 6. Предполагаемый вид бесщелевого одночастичного спектра бозонов $\epsilon(p)$ в сверхтекучей бозе-жидкости с ПКК без ОБК при разных температурах. Штриховой кривой показан экспериментальный спектр элементарных возбуждений $E(p)$ в ^4He при отношении $\Delta_r/\Delta_1 = 30$, что соответствует максимальной критической скорости $v_{cm} = 2$ м/с при $T = 0$.

тельно распадков квазичастиц он должен иметь минимум (или точку перегиба) в области промежуточных значений $\mathbf{p} \neq 0$. Действительно, как следует из интегрального уравнения (55) с разностным ядром $\tilde{V}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$, модуль $\tilde{\Psi}(\mathbf{p})$ может иметь максимум в точке отрицательного минимума перенормированного («экранированного») потенциала парного взаимодействия $\tilde{V}(\mathbf{p})$ (см. рис. 5), если основной вклад в интеграл по \mathbf{p}' вносит область малых значений $|\mathbf{p}'| \ll p_{\min}$. Это означает, что вблизи точки $p = p_{\min}$, согласно (59), одночастичный спектр $\epsilon(\mathbf{p})$ может иметь локальный минимум (рис. 6). Вследствие этого при $p \approx p_{\min}$ существует ненулевое значение $v_c = \min [\epsilon(\mathbf{p})/p] \neq 0$, т.е. спектр (59) удовлетворяет критерию сверхтекучести Ландау [1].

С другой стороны, при $\tilde{\Psi}(\mathbf{p}) \rightarrow 0$ одночастичный спектр (59) вырождается в квадратичную зависимость $\epsilon(\mathbf{p}) \sim p^2$ при малых \mathbf{p} и перестает удовлетворять критерию сверхтекучести, поскольку в этом случае $\min [\epsilon(\mathbf{p})/p] = 0$ при $p = 0$. Поэтому при исчезновении ПКК и при отсутствии

ОБК ($n_0 = 0$) сверхтекучая бозе-жидкость должна переходить в нормальное состояние, несмотря на то что в коллективном спектре $E(\mathbf{p})$ сохраняется «ротонный» минимум (т.е. $E(\mathbf{p})$ формально удовлетворяет критерию сверхтекучести). Как будет видно из дальнейшего, исчезновение ПКК возможно при повышении температуры.

4.4. Фазовые переходы в бозе-жидкости с интенсивным ПКК

При конечных температурах ($T \neq 0$) система уравнений (42)–(45) с учетом (46) для бозе-жидкости с «истощенным» ОБК и интенсивным ПКК имеет вид [18]

$$\tilde{\Psi}_T(\mathbf{p}) = - \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \tilde{V}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \times \times \frac{n_0 \Lambda(\mathbf{p}') \tilde{V}(\mathbf{p}') + \tilde{\Psi}_T(\mathbf{p}')}{2\epsilon_T(\mathbf{p}')} \text{cth} \frac{\epsilon_T(\mathbf{p}')}{2T}; \quad (62)$$

$$\tilde{\Phi}_T(\mathbf{p}) =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \tilde{V}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \left[\frac{A_T(\mathbf{p}')}{\epsilon_T(\mathbf{p}')} \text{cth} \frac{\epsilon_T(\mathbf{p}')}{2T} - 1 \right]; \quad (63)$$

$$n = n_0(T) + \frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[\frac{A_T(\mathbf{p})}{\epsilon_T(\mathbf{p})} \text{cth} \frac{\epsilon_T(\mathbf{p})}{2T} - 1 \right], \quad (64)$$

где

$$A_T(\mathbf{p}) = n_0 \Lambda(\mathbf{p}) \tilde{V}(\mathbf{p}) + \frac{p^2}{2m} + \tilde{\Phi}_T(\mathbf{p}) - \tilde{\Phi}_T(0) + \tilde{\Psi}_T(0), \quad (65)$$

а $\epsilon_T(\mathbf{p})$ определяется выражением (33) с заменой $\tilde{\Phi}$ и $\tilde{\Psi}$ в (36) и (37) на $\tilde{\Phi}_T$ и $\tilde{\Psi}_T$.

Предположим, что при $T = 0$ плотность ОБК мала ($n_0 \ll n$), однако $n_0 > |\tilde{\Psi}(0)|/\Lambda(0)\tilde{V}(0)$, так что $\tilde{\Sigma}_{12}(0) > 0$ и $c^2 > 0$ (см. (48)). По мере повышения температуры должно происходить тепловое «истощение» ОБК, т.е. $n_0(T)$ уменьшается с ростом T и выше некоторого значения T_0 становится меньше величины $|\tilde{\Psi}_T(0)|/\Lambda(0)\tilde{V}(0)$. При этом возникает неустойчивость одночастичного фононного спектра (поскольку $\tilde{\Sigma}_{12}(0) < 0$ и $c^2 < 0$), и бозе-система скачком переходит в состояние с ПКК без ОБК ($n_0 = 0$), т.е. в точке $T = T_0$ происходит фазовый переход I-го рода по

температуре*. Если же вследствие сильного взаимодействия между частицами уже при $T = 0$ выполняется неравенство $n_0 < |\tilde{\Psi}(0)|/\Lambda(0)\tilde{V}(0)$, то такой переход не происходит (поскольку ОБК исходно подавлен), и сверхтекучая компонента бозе-жидкости изначально определяется «куперовским» ПКК и высшими четными конденсатами, которые в совокупности образуют парный ЭКК [18]. В этом случае уравнения (62) и (64) для любых $T \geq 0$ имеют вид ($n_0 = 0$)

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_T(\mathbf{p}) = \\ = - \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \tilde{V}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \frac{\tilde{\Psi}_T(\mathbf{p}')}{2\varepsilon_T(\mathbf{p}')} \operatorname{cth} \frac{\varepsilon_T(\mathbf{p}')}{2T}; \end{aligned} \quad (66)$$

$$n = \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\frac{A_T(\mathbf{p})}{\varepsilon_T(\mathbf{p})} \operatorname{cth} \frac{\varepsilon_T(\mathbf{p})}{2T} - 1 \right], \quad (67)$$

где $\varepsilon_T(\mathbf{p})$ определяется выражением (59) с заменой $\tilde{\phi}(\mathbf{p})$ и $\tilde{\Psi}(\mathbf{p})$ на $\tilde{\phi}_T(\mathbf{p})$ и $\tilde{\Psi}_T(\mathbf{p})$, так что $\varepsilon_T(\mathbf{p}) \approx p \sqrt{\tilde{\Psi}_T(0)/m^*}$ при $\mathbf{p} \rightarrow 0$.

Как отмечалось выше, нетривиальное (ненулевое) решение однородного интегрального уравнения (55) при $T = 0$ и, следовательно, уравнения (66) при $T > 0$ для парного параметра порядка $\tilde{\Psi}_T(\mathbf{p})$ возможно только в том случае, когда основной вклад в интеграл по \mathbf{p}' вносит область достаточно сильного эффективного притяжения между частицами ($\Gamma\tilde{V} < 0$). С повышением T такое притяжение должно усиливаться благодаря росту теплового множителя $\operatorname{cth} \varepsilon_T(\mathbf{p}')/2T$ в подынтегральном выражении в (66), т.е. параметр $\tilde{\Psi}_T(\mathbf{p})$, казалось бы, должен возрастать с повышением T .

С другой стороны, при постоянной или убывающей с ростом T концентрации бозонов n первое слагаемое в (67) может оставаться постоянным или убывать в процессе роста «тепловой составляющей» $\sim \operatorname{cth} \varepsilon_T(\mathbf{p})/2T$ только в том случае, если происходит соответствующее уменьшение коэффициента $A_T(\mathbf{p})$, т.е. если $\tilde{\Psi}_T(0)$ в (65) достаточно быстро убывает при повышении T . Как следует из уравнения (66), при $\mathbf{p} = 0$

$$\tilde{\Psi}_T(0) = - \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{2\pi^2} \Lambda(\mathbf{p}) \tilde{V}(\mathbf{p}) \frac{\tilde{\Psi}_T(\mathbf{p})}{2\varepsilon_T(\mathbf{p})} \operatorname{cth} \frac{\varepsilon_T(\mathbf{p})}{2T}, \quad (68)$$

убывание $\tilde{\Psi}_T(0)$ с ростом T действительно должно происходить в результате конкуренции вкладов разного знака от двух областей импульсного пространства: области малых $p < \pi/a$, в которой преобладает отталкивание $\tilde{V}(\mathbf{p}) > 0$, и области промежуточных значений импульса $\pi/a < p < 2\pi/a$, в которой существует эффективное притяжение $\tilde{V}(\mathbf{p}) < 0$ между бозонами (см. рис. 5). Если при $T = 0$ преобладает вклад второй области интегрирования (притяжение), то $\tilde{\Psi}_T(0) > 0$. Но по мере повышения T вклад первой области (отталкивание) возрастает из-за роста ширины и высоты пика «тепловой» функции $(1/\varepsilon_T(\mathbf{p})) \operatorname{cth} \varepsilon_T(\mathbf{p})/2T \sim T/p^2$ при $\mathbf{p} \rightarrow 0$, так что величина $\tilde{\Psi}_T(0)$ уменьшается и стремится к нулю при некоторой «критической» температуре T_c^* , при которой отрицательный и положительный интегральные вклады в правую часть (68) становятся равными по абсолютной величине.

Однако, как отмечалось выше, при $\tilde{\Psi}_T(0) \rightarrow 0$ одночастичный спектр $\varepsilon_T(\mathbf{p})$ при малых \mathbf{p} вырождается в параболический:

$$\varepsilon_T(\mathbf{p}) \approx \frac{p^2}{2m_0^*}; \quad \frac{1}{m_0^*} = \frac{1}{m} + \left. \frac{\partial \tilde{\phi}_T(\mathbf{p})}{\partial |\mathbf{p}|^2} \right|_{\mathbf{p}=0}. \quad (69)$$

В результате этого «тепловая» функция $(1/\varepsilon_T(\mathbf{p})) \operatorname{cth} (\varepsilon_T(\mathbf{p})/2T) \sim T/p^4$ при $\mathbf{p} \rightarrow 0$, что приводит к расходимости интеграла в правой части (68) на нижнем пределе (при $\mathbf{p} = 0$) и к бесконечному отрицательному вкладу вследствие отталкивания $\Lambda(0)\tilde{V}(0) > 0$. Отсюда следует, что нетривиальное решение уравнения (66) при $T \neq 0$ может существовать только в том случае, когда за счет преобладающего притяжения $\tilde{\Psi}_T(0) > 0$ и $\varepsilon_T(\mathbf{p}) \sim p$ при $p \rightarrow 0$. Это означает, что *переход из сверхтекучего состояния, когда $\tilde{\Psi}_T(\mathbf{p}) \neq 0$ и $v_c = \min [\varepsilon_T(\mathbf{p})/p] \neq 0$, в нормальное состояние, когда $\Psi_T(\mathbf{p}) = 0$ и $v_c = 0$, сопровождается скачком величины $\tilde{\Psi}_T(0)$ от некоторого конечного (минимального) значения до нуля и, следовательно, является фазовым переходом I-го рода***. Температура

* Аналогичный фазовый переход I-го рода рассматривался в [82,83] для разреженного бозе-газа с притяжением на больших расстояниях.

** При достаточно сильном притяжении это может быть фазовый переход I-го рода, близкий ко второму, с малой величиной скачка $\tilde{\Psi}_T(0)$ при $T = T_c^*$, а в пространственно ограниченном объеме с конечным минимальным значением импульса $p_{\min} \neq 0$ возможен фазовый переход II-го рода, если $T_c^* \leq T_c$.

этого перехода $T_c < T_c^*$ и может быть сопоставлена с той температурой, при которой минимум отношения $\epsilon_T(\mathbf{p})/p$ и соответственно критическая скорость сверхтекучести v_c обращаются в нуль (см. рис. 6), т.е. T_c соответствует λ -точке в ^4He .

Такая ситуация с исчезновением сверхтекучести в бозе-жидкости выше $T_c = T_\lambda$ аналогична механизму исчезновения сверхпроводимости в электронной ферми-жидкости металлов [9], когда при $T = T_c$ одновременно обращаются в нуль сверхпроводящий параметр порядка Ψ_S , энергетическая щель Δ в спектре квазичастиц на уровне Ферми и критическая скорость $v_c = \Delta/p_F$, определяющая максимальный критический ток распаривания. Однако в сверхпроводниках переход из сверхпроводящего состояния в нормальное (в отсутствие магнитного поля), как известно [9,11], является фазовым переходом II-го рода. Такой переход сопровождается конечным скачком теплоемкости $C_v(T)$ и с большей точностью описывается теорией Ландау фазовых переходов в приближении самосогласованного поля (уравнением Гинзбурга–Ландау). Это обусловлено большой по сравнению с атомными масштабами корреляционной длиной (или длиной когерентности ξ_0) в обычных сверхпроводниках и соответственно аномально малой величиной безразмерного числа Гинзбурга $Gi \lesssim 10^{-12}$ [59], характеризующего относительную ширину флуктуационной области вблизи T_c (в высокотемпературных сверхпроводниках с аномально малой величиной ξ_0 число $Gi \lesssim 10^{-3}-10^{-2}$ [60]).

Напротив, в жидком ^4He число $Gi \sim 1$, так что критические флуктуации с частотами $\omega_q \sim q^{3/2}$ [59] играют решающую роль вблизи температуры перехода T_λ из сверхтекучего состояния (He-II) в нормальное (He-I), и теория самосогласованного поля Ландау неприменима. С этим связана, в частности, логарифмическая расходимость теплоемкости $C_v(T)$ жидкого гелия в λ -точке [7,61], однако переход при $T = T_\lambda$ остается фазовым переходом II-го рода.

Вообще говоря, это противоречит вытекающему из уравнения (66) выводу о фазовом переходе I-го рода в точке $T = T_c$ с конечным скачком «парного» параметра порядка $\tilde{\Psi}_T(0)$, но с плавным обращением в нуль критической скорости $v_c(T) = \min[\epsilon_T(p)/p]$ при $T \rightarrow T_c$ (в соответствии с измерениями v_c для He-II в сверхтонких каналах вблизи λ -точки [10]). Однако следует иметь в виду, что интегральное уравнение (66) для $\tilde{\Psi}_T(p)$ соответствует, по сути, приближению среднего (самосогласованного) поля и поэтому неприменимо в окрестности критической температуры из-за

флуктуационных эффектов, если $Gi \sim 1$. В этом случае параметр порядка $\tilde{\Psi}_T(0)$ подавляется крупномасштабными критическими флуктуациями ниже T_c (и, наоборот, индуцируется выше T_c) в достаточно широкой области температур $\Delta T = |T_c - T| \lesssim T_c$.

По этой причине акустическая часть одночастичного спектра $\epsilon_T(\mathbf{p}) \approx p\tilde{y}_T$ с $\tilde{y}_T = \sqrt{\tilde{\Psi}_T(0)}/m^*$ вблизи T_c должна быть сильно размыта вследствие флуктуаций $\tilde{\Psi}_T(0)$, т.е. длинноволновые одностичные возбуждения должны сильно затухать во времени и, следовательно, не могут давать заметный вклад в кинетические и термодинамические свойства жидкого ^4He . В области больших импульсов \mathbf{p} роль флуктуаций не столь существенна, и следующий из (66) вывод о существовании минимального значения $\epsilon_T(\mathbf{p})/p$, которое может обращаться в нуль при $T = T_c$ (т.е. в λ -точке), остается в силе (см. рис. 6).

Кроме того, как отмечалось выше (см. сноску ** на стр. 131), в системах конечного размера (тонких каналах, пленках, капиллярах) фазовый переход из сверхтекучего состояния в нормальное может оставаться переходом II-го рода даже в приближении самосогласованного поля, поскольку расходимость интеграла в (68) на нижнем пределе при квадратичном спектре $\epsilon(\mathbf{p}) \sim p^2$ отсутствует, и точка T_c^* при достаточно сильном притяжении (в области $p > \pi/a$) может лежать ниже по температуре, чем точка фазового перехода $T_c = T_\lambda$.

4.5. Структура бозонных пар в ПКК

Как отмечалось в разд. 3, в слабонеидеальном бозе-газе с интенсивным ОБК надконденсатные возбуждения объединены в свободные (несвязанные) пары бозонов с антипараллельными импульсами. При этом волновая функция такого газа в первом порядке теории возмущений Боголюбова–Зубарева [62] имеет вид

$$|\Phi_B\rangle = \exp \left\{ -\frac{1}{4V} \sum_{\mathbf{p} \neq 0} U_B(\mathbf{p}) \hat{n}_{\mathbf{p}} \hat{n}_{-\mathbf{p}} \right\} |0\rangle, \quad (70)$$

где

$$U_B(\mathbf{p}) = \frac{1}{n} \left[\frac{2m}{p^2} E_B(\mathbf{p}) - 1 \right]; \quad \hat{n}_{\mathbf{p}} = b_{\mathbf{p}}^+ b_{\mathbf{p}}; \quad (71)$$

V — объем системы, а $E_B(\mathbf{p})$ — боголюбовский спектр (2). При малых \mathbf{p} , когда $E_B(\mathbf{p}) \approx pu_B(0)$, из (71) получаем

$$U_B(\mathbf{p}) \approx \frac{2mu_B(0)}{n|\mathbf{p}|}; \quad u_B(0) = \sqrt{nV(0)/m}, \quad (72)$$

так что при $\mathbf{r} \rightarrow \infty$ длинноволновая асимптотика потенциала $U_B(\mathbf{r})$ имеет вид

$$U_B(\mathbf{r}) \approx \frac{mu_B(0)}{2\pi nr^2}. \quad (73)$$

Покажем, что аналогичная асимптотика характерна также для сильно связанных («локальных») бозонных пар. Волновая функция конденсата N независимых пар бозонов с нулевым суммарным импульсом в конфигурационном пространстве и соответственно в представлении вторичного квантования имеет вид [18]

$$\Phi = C \sum_{(P)} \prod_{j=1}^{2N-1} f(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_{j+1}); \quad |\Phi\rangle = \frac{(\hat{O}^+)^N}{(N!)^{1/2}} |0\rangle, \quad (74)$$

где C — нормировочный множитель; $\sum_{(P)}$ — сумма по всем перестановкам аргументов функции f ; \hat{O}^+ — оператор рождения пары:

$$\begin{aligned} \hat{O}^+ &= \int' \frac{d\mathbf{r} d\mathbf{r}'}{(v_0 V)^{1/2}} f^*(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\psi}^+(\mathbf{r}) \hat{\psi}^+(\mathbf{r}') = \\ &= \frac{1}{(v_0 V)^{1/2}} \sum_{\mathbf{p}} f(\mathbf{p}) b_{\mathbf{p}}^+ b_{-\mathbf{p}}^+. \end{aligned} \quad (75)$$

Здесь штрих у знаков интеграла и суммы означает ограничение области интегрирования или суммирования полупространством для того, чтобы дважды не учитывать одно и то же состояние, а корреляционный объем v_0 определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \int' d\mathbf{r} d\mathbf{r}' |f(\mathbf{r} - \mathbf{r}')|^2 &= v_0 V; \\ \int d\mathbf{r} |f(\mathbf{r})|^2 &= v_0 \equiv \frac{4}{3} \pi r_0^3. \end{aligned} \quad (76)$$

По аналогии с известными соотношениями для бозе-конденсата «элементарных» бозонов

$$\langle \hat{\psi}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{V^{1/2}} \sum_n f_n(\mathbf{r}) \langle \hat{b}_n \rangle; \quad \langle \hat{b}_n \rangle = N^{1/2} \delta_{n0}, \quad (77)$$

где \hat{b}_n — оператор уничтожения, а $f_n(\mathbf{r})$ — волновая функция частицы в n -м квантовом состоянии, для конденсата N связанных бозонных пар, согласно (75) и (76), аномальные средние в конфигурационном и импульсном пространствах могут быть представлены в следующем виде [18]:

$$\langle \hat{\psi}(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}') \rangle = \left(\frac{n}{v_0} \right)^{1/2} f(\mathbf{r} - \mathbf{r}'); \quad \langle b_{\mathbf{p}} b_{-\mathbf{p}} \rangle = \left(\frac{n}{v_0} \right)^{1/2} f(\mathbf{p}), \quad (78)$$

где $n \equiv N/V$. Следует подчеркнуть, что возможность рассматривать операторы пар \hat{O}^+ и \hat{O} как бозонные, строго говоря, обоснована лишь в том случае, когда размер пар мал по сравнению со средним расстоянием между ними ($r_0 \ll n^{-1/3}$) и волновые функции пар не перекрываются друг с другом.

В случае *перекрывающихся пар* волновая функция конденсата с учетом корреляций между частицами разных пар может быть выбрана в виде функции Джастрова [38]:

$$\Phi_J = \prod_{i < j} f(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i < j} U(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \right\}, \quad (79)$$

где $U(\mathbf{r})$ — потенциальная энергия парных взаимодействий между частицами.

Для бозе-системы с ОБК волновая функция пары $f(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ в (79) на малых расстояниях хорошо описывает сильные парные корреляции и определяется конкретным видом взаимодействия $U(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$. Вместе с тем на больших расстояниях Φ_J отвечает асимптотике, вытекающей из общих постулатов квантовой гидродинамики [7], и поэтому $f(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ при $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \infty$ приобретает универсальный характер, изменяясь по степенному (квадратичному) закону [36,37]. Действительно, *основное состояние в гидродинамике — это вакуум независимых звуковых колебаний* (гармонических фоновых осцилляторов) с частотами $\omega = pc$, волновая функция которых равна

$$|\Phi_{\text{ph}}\rangle = \exp \left\{ -\frac{1}{4N} \sum_{|\mathbf{p}| < Q} \frac{2mc}{|\mathbf{p}|} n_{\mathbf{p}} n_{-\mathbf{p}} \right\} |0\rangle, \quad (80)$$

где

$$n_{\mathbf{p}} = \sum_{j=1}^N e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}_j}; \quad n(\mathbf{r}) = \sum_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_j) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}. \quad (81)$$

Выражение (80) можно представить в виде функции Джастрова (79):

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{ph}} &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i < j} U_{\text{ph}}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right\} = \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{4V} \sum_{\mathbf{p}} U_{\text{ph}}(\mathbf{p}) n_{\mathbf{p}} n_{-\mathbf{p}} \right\}, \end{aligned} \quad (82)$$

где

$$U_{\text{ph}}(\mathbf{p}) = \frac{2mc}{n|\mathbf{p}|}; \quad (83)$$

$$U_{\text{ph}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} U_{\text{ph}}(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} = \frac{mc}{2\pi n r^2}.$$

Таким образом, для волновой функции пар $f(\mathbf{r})$ при $\mathbf{r} \rightarrow \infty$ получаем квадратичную асимптотику Реатто—Честера [36]:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r} \rightarrow \infty) &\approx f_{\text{ph}}(\mathbf{r}) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} U_{\text{ph}}(\mathbf{r}) \right\} \approx \\ &\approx 1 - \frac{U_{\text{ph}}(\mathbf{r})}{2} = 1 - \frac{mc}{4\pi n r^2}. \end{aligned} \quad (84)$$

Заметим, что вид функции Джастрова (79) имеет и волновая функция слабонеидеального бозе-газа (70).

Согласно (84), фурье-компонента волновой функции пары равна

$$f_{\text{ph}}(\mathbf{p}) \approx -\frac{1}{2} U_{\text{ph}}(\mathbf{p}) = -\frac{mc}{n|\mathbf{p}|}, \quad (85)$$

аналогично случаю несвязанных «боголюб-ских» пар с бесконечным радиусом (см. (72)).

С другой стороны, учитывая соотношения (81), получаем асимптотику для аномального среднего

$$\langle b_{\mathbf{p}} b_{-\mathbf{p}} \rangle \approx -\left(\frac{n}{v_0} \right)^{1/2} \frac{mc}{n|\mathbf{p}|}. \quad (86)$$

В бозе-жидкости с ПКК без ОБК одночастичному спектру $\epsilon(\mathbf{p})$ с щелью $\Delta_0 \neq 0$ при $\mathbf{p} = 0$ соответствует гамильтониан боголюбовского типа (см. разд. 3), из которого в основном состоянии можно получить следующее выражение для аномального среднего (см. [18]):

$$\langle b_{\mathbf{p}} b_{-\mathbf{p}} \rangle \approx -\frac{\tilde{\Psi}(\mathbf{p})}{(\Delta_0^2 + \mathbf{p}^2 \tilde{u}^2)^{1/2}}. \quad (87)$$

Отсюда, учитывая универсальность соотношения (78), находим асимптотику волновой (корреляционной) функции при $\mathbf{p} \rightarrow 0$:

$$f(\mathbf{p}) \sim \langle b_{\mathbf{p}} b_{-\mathbf{p}} \rangle \approx -\frac{2\Delta_0 \tilde{\Psi}(0)}{\tilde{u}^2(\kappa_0^2 + \mathbf{p}^2)}; \quad \kappa_0^2 = \frac{2\Delta_0^2}{\tilde{u}^2}. \quad (88)$$

Из (88) для пространственной компоненты $f(\mathbf{r})$ при $\mathbf{r} \rightarrow \infty$ получаем [18]

$$|f(\mathbf{r}) - 1| \sim \frac{\Delta_0 \tilde{\Psi}(0)}{2\pi \tilde{u}^2 r} e^{-\kappa_0 r}, \quad (89)$$

т.е. степенная асимптотика парной корреляционной функции (86) при наличии щели ($\Delta_0 \neq 0$) в одночастичном спектре превращается в экспоненциальную.

С другой стороны, в отсутствие щели ($\Delta_0 = 0$), как видно из сравнения (86) и (87), в бозе-жидкости с ПКК без ОБК со спектром $\epsilon(\mathbf{p}) \approx p\tilde{u}$ при $\mathbf{p} \rightarrow 0$ восстанавливается обычная степенная асимптотика Реатто—Честера [36,37]:

$$\langle b_{\mathbf{p}} b_{-\mathbf{p}} \rangle \approx -\tilde{\Psi}(0)/\tilde{u}|\mathbf{p}|; \quad |f(\mathbf{r}) - 1| \sim \tilde{\Psi}(0)/4\pi \tilde{u} r^2. \quad (90)$$

Таким образом, возникновение связанных пар в ПКК и исчезновение ОБК не обязательно должны приводить к изменению асимптотики парной корреляционной функции. Сверхтекучее состояние с ПКК без ОБК с акустическим одночастичным спектром ($\epsilon(\mathbf{p}) \sim p$) имеет правильную гидродинамическую асимптотику парных корреляций ($\sim r^{-2}$), удовлетворяет теореме Гугенгольца—Пайнса [26] и имеет «парную» структуру ЭКК, который содержит только «четные» конденсаты (причем связанные пары бозонов существуют только в ПКК). Действительно, существование «нечетного», например трехчастичного конденсата $\langle \hat{\psi}\hat{\psi}\hat{\psi} \rangle \neq 0$, благодаря взаимодействию с ПКК привело бы к появлению ОБК. В высших «четных» конденсатах бозоны не образуют связанные многочастичные состояния, поскольку разные типы связанных когерентных систем (фаз) не могут сосуществовать в однокомпонентной бозе-жидкости (в отличие от растворов разных бозе- и ферми-жидкостей).

4.6. Роль парных корреляций в бозе-жидкости ^4He и в растворах квантовых жидкостей ^3He – ^4He

4.6.1. Экспериментальное свидетельство существования связанных пар атомов гелия в сверхтекучем ^4He . Важная роль парных корреляций между бозонами (атомами ^4He) в сверхтекучем состоянии квантовой бозе-жидкости находит косвенное подтверждение в успешном применении приближения Джастрова [38] для волновой функции основного состояния при описании свойств He-II [39,40]. С другой стороны, на основании теоретических результатов, полу-

ченных в работах [15,18], можно сделать вполне обоснованное предположение о том, что структура сверхтекучей компоненты в жидком ${}^4\text{He}$ ниже λ -точки определяется парным ЭКК, содержащим интенсивный ПКК со связанными состояниями пар бозонов и высшие четные конденсаты, при полном отсутствии ОБК и высших нечетных конденсатов.

Как отмечалось в [35], прямым экспериментальным свидетельством существования связанных пар атомов гелия в He-II может служить аномально большое значение эффективной массы m_3^* примесных атомов ${}^3\text{He}$ в сверхтекучем ${}^4\text{He}$. Эта так называемая «гидродинамическая» эффективная масса близка по величине к суммарной массе атомов ${}^3\text{He}$ и ${}^4\text{He}$ и даже несколько превышает ее [47–49]:

$$m_3^* \geq (m_3 + m_4) = \frac{7}{3} m_3 \simeq 2,33m_3. \quad (91)$$

Если на основании этого факта предположить, что в слабом растворе ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$ действительно образуются связанные состояния атомов ${}^3\text{He}$ и ${}^4\text{He}$, то отсюда сразу следует вывод о существовании и связанных пар атомов ${}^4\text{He}$. Действительно, исходный потенциал взаимодействия $V(r)$ между атомами ${}^3\text{He}$ и ${}^4\text{He}$ такой же, как и между двумя атомами ${}^4\text{He}$ [5], а энергия нулевых колебаний в связанном состоянии в первом случае больше, чем во втором, из-за меньшей величины приведенной массы ($4m_3/7$ для пары ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$ и $2m_3/3 \equiv m_4/2$ для пары ${}^4\text{He}$ – ${}^4\text{He}$). Кроме того, обменные корреляции между бозонами способствуют дополнительному притяжению. Поэтому существование связанных пар атомов ${}^3\text{He}$ и ${}^4\text{He}$ должно свидетельствовать о существовании связанных пар ${}^4\text{He}$ – ${}^4\text{He}$.

Следует заметить, что более поздние измерения эффективной массы атомов ${}^3\text{He}$ в ${}^4\text{He}$ [50,51] показали, что значения $m_3^* \geq 2,33m_3$ наблюдаются лишь при достаточно большом приложенном давлении ($P \geq 5$ атм), тогда как при нулевом давлении m_3^* не превышает значения $2,1m_3$ [51]. Однако необходимо учитывать, что в нормальных условиях пары бозонов (атомов ${}^4\text{He}$) в ПКК являются скорее «куперовскими» (сильно перекрывающимися), чем «локальными» (сильно связанными) [18]. Поэтому не следует придавать слишком буквальный смысл понятию «связанная пара» атомов ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$ или ${}^4\text{He}$ – ${}^4\text{He}$, а рассматривать такое состояние как результат сильных парных и многочастичных корреляций.

4.6.2. Метод Джастрова – Финберга для описания растворов ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$. Важная роль парных

и многочастичных корреляций подтверждается результатами работ [42–46], в которых использовался вариационный метод Джастрова – Финберга [38,41] для описания физических свойств растворов квантовых бозе- и ферми-жидкостей ${}^4\text{He}$ и ${}^3\text{He}$. Суть этого метода заключается в оптимальном выборе пробной волновой функции основного состояния системы в виде следующего «анзаца» [41,63,64]:

$$\Psi_0(\{\mathbf{r}_i^{(\alpha)}\}) = \Phi_0(\{\mathbf{r}_i^{(3)}\}) \exp\left[\frac{1}{2} U(\{\mathbf{r}_i^{(\alpha)}\})\right], \quad (92)$$

где Φ_0 – детерминант Слэтера, описывающий фермионную подсистему ${}^3\text{He}$, а U – потенциал взаимодействия между атомами ${}^3\text{He}$ ($\alpha = 3$) и ${}^4\text{He}$ ($\alpha = 4$), который учитывает как парные, так и тройные корреляции, и выбирается в виде

$$U(\{\mathbf{r}_i^{(\alpha)}\}) = \frac{1}{2!} \sum_{\alpha,\beta} \sum_{i,j}^{N_\alpha, N_\beta} u^{(\alpha\beta)}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) + \frac{1}{3!} \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \sum_{i,j,k}^{N_\alpha, N_\beta, N_\gamma} u^{(\alpha\beta\gamma)}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k). \quad (93)$$

Затем используется предложенный в [42,43] вариационный принцип, заключающийся в минимизации энергии основного состояния

$$E_0 = \langle \Psi_0 | \hat{H} | \Psi_0 \rangle / \langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle$$

по $u^{(\alpha\beta)}$ и $u^{(\alpha\beta\gamma)}$ с целью оптимизации параметров взаимодействия.

В недавней работе [65] этот метод применялся для расчета динамики одиночных примесных атомов ${}^3\text{He}$ в жидком ${}^4\text{He}$ и свойств растворов ${}^3\text{He}$ в ${}^4\text{He}$ с учетом фермижидкостных эффектов в системе атомов ${}^3\text{He}$. Полученные в [65] зависимости эффективной массы m_3^* атомов ${}^3\text{He}$ от их концентрации в растворе и внешнего давления P очень хорошо согласуются с экспериментальными данными [50,51]. Значительное возрастание m_3^* под давлением, вплоть до $m_3^* \simeq 2,9m_3$ при $P \simeq 20$ атм и концентрации ${}^3\text{He}$ 10%, указывает не только на возможность образования связанных состояний атомов ${}^3\text{He}$ и ${}^4\text{He}$, но и на сильные коллективные (многочастичные) эффекты при взаимодействии атомов ${}^3\text{He}$ с ${}^4\text{He}$ и друг с другом. В [65], кроме гидродинамической массы одиночного атома ${}^3\text{He}$ в ${}^4\text{He}$ и фермижидкостных поправок к m_3^* в растворах ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$, вычислялись затухание (торможение) движения квазичастиц ${}^3\text{He}$ в ${}^4\text{He}$, магнитная восприимчивость подсистемы ${}^3\text{He}$, а также сдвиг фазы матрицы рассеяния

в растворах ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$. Вычисление последней позволило получить зависимости от плотности ${}^4\text{He}$ (т.е. от приложенного давления) критической температуры фазового перехода ферми-жидкости ${}^3\text{He}$ из нормального состояния в сверхтекучее для s -волнового (синглетного) и p -волнового (триплетного) куперовского спаривания атомов ${}^3\text{He}$ в растворе ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$ при сверхнизких (милликельвиновых) температурах.

4.6.3. Квантование циркуляции скорости в сверхтекучей бозе-жидкости с ПКК без ОБК. Обсудим вопрос о характере квантования сверхтекучей скорости $v_s(r) = \kappa/r$ в квантовых вихрях Онсагера – Фейнмана и о величине кванта циркуляции κ в бозе-жидкости с ПКК без ОБК. В этом случае, как отмечалось ниже, сверхтекучая компонента определяется парным ЭКК, который состоит из ПКК со связанными («куперовскими») парами бозонов и из высших четных конденсатов с несвязанными четверками $\langle \hat{\psi}\hat{\psi}\hat{\psi}\hat{\psi} \rangle$, шестерками $\langle \hat{\psi}\hat{\psi}\hat{\psi}\hat{\psi}\hat{\psi}\hat{\psi} \rangle$ и т.д. частиц, поскольку разные типы связанных подсистем (конденсатов) не могут одновременно существовать в однокомпонентной бозе-жидкости*. Действительно, обмен частицами между разными конденсатами (вакуумами) энергетически запрещен, поскольку они соответствуют локальным минимумам энергии и разделены потенциальными барьерами. Поэтому таким конденсатам должны были бы соответствовать разные фазы, как в системах со спонтанно нарушенными симметриями.

В результате того, что «фундаментальными» квазичастицами в парном ЭКК являются связанные бозонные пары «куперовского» ПКК, можно ожидать, что эффективный квант циркуляции $\kappa^* = \hbar/m^*$ будет вдвое меньше обычного кванта $\kappa = \hbar/m_4$ (см. [18]), поскольку эффективная масса пары $m^* = 2m_4$. Экспериментальное наблюдение полупелых квантов циркуляции $\hbar/2m_4$ в сверхтекучем ${}^4\text{He}$ было бы прямым подтверждением существования связанных пар атомов ${}^4\text{He}$.

Такая ситуация аналогична удвоенному заряду $2e$ куперовских пар в сверхпроводниках [9] и полупелому кванту магнитного потока $\Phi_0 = \hbar c/2e$ в вихрях Абрикосова [11] (по сравнению с целым квантом потока $\Phi = \hbar c/e$, проходящего

через минимальную квантовую орбиту Ландау нормального электрона в сильном магнитном поле).

В экспериментах [66–68] в подавляющем числе случаев были зафиксированы скачки суммарной циркуляции сверхтекучей и нормальной компонент в He-II на целое число квантов $\kappa_4 = \hbar/m_4$. Однако, учитывая не слишком большую статистику наблюдений и возможность попарного рождения вихрей с одинаковым направлением скорости вращения при сохранении полного импульса системы, пока нельзя полностью исключить полупелую величину кванта циркуляции скорости в сверхтекучем ${}^4\text{He}$.

4.6.4. Проблема критических скоростей в сверхтонких пленках и капиллярах. В заключение вернемся к вопросу о величине критической скорости в потоке сверхтекучего ${}^4\text{He}$, которая почти на два порядка меньше «ротонной» критической скорости $v_{cr} = \Delta_r/p_r \approx 60$ м/с, вычисленной в соответствии с законом дисперсии экспериментально наблюдаемого по нейтронному рассеянию спектра элементарных возбуждений в He-II [2].

Согласно экспериментальным данным [69,70], критическая скорость v_c движения сверхтекучей компоненты ρ_s в широких каналах практически не зависит от температуры и связана с шириной канала d соотношением $v_c \sim d^{-1/4}$ в очень широком интервале $8 \cdot 10^{-7}$ см $< d < 1$ см. В более узких каналах v_c быстро уменьшается до нуля с уменьшением d и к тому же, начиная с $d \approx 3 \cdot 10^{-5}$ см, зависит от T [71–73]. Эта температурная зависимость $v_c(T)$ особенно существенна вблизи λ -точки, в которой v_c обращается в нуль. Как подчеркивалось в [10], ни величина, ни механизм изменения критической скорости в сверхтонких пленках и капиллярах не получили пока однозначного объяснения, тогда как аномально малая величина v_c в макроскопических потоках He-II, согласно общепринятому мнению, обусловлена рождением квантовых вихрей Онсагера – Фейнмана [74] или замкнутых вихревых колец [75].

Исходя из аналогии с динамикой вихрей Абрикосова в сверхпроводниках II-го рода в магнитных полях [11], попытаемся разобраться в эмпирических закономерностях поведения критической скорости v_c в сверхтекучем ${}^4\text{He}$. Так, например, можно связать увеличение v_c при уменьшении ширины канала d с возрастанием

* Заметим, что ПКК даже при $T \rightarrow 0$ может составлять малую долю ЭКК, в отличие от сверхпроводников, где при $T = 0$ все электроны (фермионы) связываются в куперовские пары.

приходящихся на единицу длины вихря сил сцепления (трения) нормальных сердцевин (кóров) вихревых нитей со стенками канала, аналогично силам «пиннинга» (закрепления) вихрей Абрикосова на границах разделов разных фаз и поверхностях кристаллов. В условиях ограничения сверхтекучести эффектами рождения и диссипативного движения квантовых вихрей (по аналогии с резистивным состоянием сверхпроводников в режиме низкотемпературного динамического депиннинга вихрей Абрикосова) критическая скорость не должна зависеть от T .

С другой стороны, в сверхтонких пленках и капиллярах, толщина (диаметр) которых сравнима с размером нормального кора вихря, рождение и движение квантовых вихрей (а тем более вихревых колец) невозможно, так что критическая скорость в случае сверхтекучей бозе-жидкости с ПКК без ОБК должна определяться максимально возможной скоростью «распаривания» v_{cm} , при которой происходит разрыв бозонных пар и разрушение ПКК. Эта ситуация аналогична ситуации в тонких сверхпроводящих нитях (проволочках) толщиной меньше лондоновской глубины проникновения магнитного поля λ_L (или длины когерентности ξ_0), в которых не могут поместиться вихри Абрикосова, и плотность критического тока $j_c = evv_c$ достигает предельной величины, при которой происходит разрыв куперовских пар.

Согласно [71,72], максимальная критическая скорость в сверхтонких смачивающих пленках He-II толщиной в несколько атомных слоев растет с понижением температуры, достигая значения $v_{c \max} \approx 2$ м/с при $T \approx 1,5$ К. Если принять эту скорость за критическую скорость распаривания v_{cm} , то радиус нормального кора вихря R_c , который определяется из условия равенства сверхтекучей скорости $v_s(r) = \kappa^*/r$ критическому значению v_{cm} , при $\kappa^* = h/2m_4$ равен $R_c \approx 40$ Å, что совпадает с половиной минимальной толщины пленки ($d_{\min} \approx 80$ Å), вплоть до которой v_c растет с уменьшением d [10]. При $d < d_{\min}$ квантовые вихри максимально жестко закреплены между твердой стенкой и поверхностью пленки и фактически являются двумерными (плоскими).

Критическая скорость «распаривания» $v_{cm} \approx 2$ м/с должна достигаться также в сверхтонких капиллярах диаметром $d \lesssim 2R_c \approx 80$ Å, в которых «не помещается» даже нормальный кор вихря.

Поскольку $v_{cm} \ll v_{cr}$, критерий сверхтекучести He-II, как уже отмечалось выше, должен определяться особенностями ненаблюдаемого в нейтронных экспериментах одночастичного спек-

тра квазичастиц $\epsilon(\mathbf{p})$, который существенно отличается от коллективного спектра $E(\mathbf{p})$ и кинетической энергии $\mathbf{p}^2/2m_4$ свободных атомов ${}^4\text{He}$ (рис. 6).

Что же касается уменьшения v_c с уменьшением d , начиная с минимальной толщины $d \approx 80$ Å, и обращения v_c в нуль в ультратонких пленках толщиной менее пяти атомных слоев [71,72], то этот эффект может быть связан с размерным квантованием поперечного импульса p_{\perp} квазичастиц, когда их дебройлевская длина волны $\lambda_D = h/p_{\perp}$ сравнима с толщиной пленки d . Поскольку v_c определяется квазичастицами вблизи минимума отношения $\epsilon_T(\mathbf{p})/p$, а с повышением T из-за уменьшения $\tilde{\Psi}_T(0)$ и \tilde{u}_T положение этого минимума смещается в сторону меньших импульсов, условие квантования $\lambda_D \sim d$ при более высоких T должно выполняться для более толстых пленок, что качественно согласуется с экспериментальными данными [71,72].

В ультраквантовом пределе ($\lambda_D \gg d$) спектр квазичастиц в пленке становится двумерным, а в капилляре — одномерным. Но, как известно [76], в 2D- и 1D-системах дальний порядок, соответствующий сверхтекучему (сверхпроводящему) состоянию в бозе- и ферми-жидкостях, при $T \neq 0$ невозможен из-за длинноволновых флуктуаций плотности, так что $\tilde{\Psi}_T(0) = 0$ и $v_c = 0$.

5. Заключение

Анализ экспериментальных и теоретических работ свидетельствует о том, что исследования открытого 60 лет тому назад П. Л. Капицей [77] и наблюдавшегося независимо Алленом и Мизнером [78] уникального явления сверхтекучести жидкого гелия далеки от завершения. Существует целый ряд противоречий между теорией и экспериментом, в частности, различие на полтора-два порядка между теоретической величиной критической скорости $v_{cr} \approx 60$ м/с, вычисленной, согласно критерию сверхтекучести Ландау [1], по величине щели Δ_r в области ротонного минимума в восстановленном по рассеянию медленных нейтронов [2,79,80] спектре элементарных возбуждений, с одной стороны, и экспериментально измеренными значениями v_c [69–73], с другой, а также между теоретической плотностью бозе-эйнштейновского конденсата, отождествляемого с плотностью сверхтекучей компоненты ρ_s в He-II, и экспериментально измеренной по рассеянию быстрых нейтронов [81] долей атомов ${}^4\text{He}$ (1–3%), находящихся в состоянии с нулевым импульсом при $T \approx 1$ К.

Первое противоречие отчасти устраняется при учете процессов рождения квантовых вихрей и вихревых колец в потоке сверхтекучего He-II [74,75], однако оно сохраняется для течения сверхтекучей компоненты в сверхтонких пленках и капиллярах [10], в которых рождение и движение вихрей невозможно. Попытка устранить второе противоречие путем введения эффективного конденсата [16,17], содержащего наряду с одночастичным также высшие многочастичные конденсаты, не привела к сколько-нибудь значительному прогрессу в понимании квантовой микроструктуры сверхтекучей компоненты в He-II.

Между тем высказанное в [15,18] предположение о полном отсутствии ОБК в сверхтекучем ${}^4\text{He}$ не противоречит эксперименту [12,81] и позволяет разрешить **парадокс № 3** (см. введение), а также сформулировать качественно новый подход к описанию сверхтекучего состояния в бозе-жидкости, в основе которого лежит представление о «парном» эффективном конденсате, состоящем из когерентного конденсата связанных «куперовских» пар бозонов (см., например, [84]) и высших четных конденсатов несвязанных частиц. Как показано в [18], интенсивный ПКК возникает при достаточно сильном эффективном притяжении между бозонами в широкой области импульсов $\mathbf{p} \neq 0$ и приводит к подавлению слабого ОБК, «истощенного» взаимодействием между частицами в квантовой бозе-жидкости. Сверхтекучее состояние с ПКК без ОБК характеризуется рядом особенностей, в частности отсутствием гибридизации между одночастичной и двухчастичной (коллективной) ветвями спектра элементарных возбуждений, что позволяет устранить противоречия между экспериментально наблюдаемой формой спектра квазичастиц в ${}^4\text{He}$ и критерием сверхтекучести Ландау (**парадокс № 1** и **№ 2**, сформулированные во введении).

Однако предположение о существовании энергетической щели $\Delta_0 \neq 0$ при $\mathbf{p} = 0$ в одночастичном спектре $\epsilon(\mathbf{p})$ [15,18] (см. также [27–33]) по аналогии со щелью в спектре сверхпроводников [9,11] приводит к новым парадоксам: нарушению теоремы Гугенгольца–Пайнса [26] для химического потенциала; замене степенной (гидродинамической) асимптотики парной корреляционной функции [36,37] на экспоненциальную; появлению не наблюдаемых в эксперименте особенностей температурной зависимости теплоемкости [32] и др. Предложенный в работе [35] отказ от щелевого характера одночастичного спектра устраняет эти парадоксы (в частности,

восстанавливает справедливость теоремы Гугенгольца–Пайнса [26] и степенную асимптотику Реатто–Честера [36]). При этом $\epsilon(\mathbf{p}) \approx p\tilde{u}$ при $\mathbf{p} \rightarrow 0$, где скорость \tilde{u} не совпадает со скоростью гидродинамического звука c в жидком гелии ($\tilde{u} \ll c$) и определяется парным параметром порядка $\tilde{\Psi}(\mathbf{p})$ при $\mathbf{p} = 0$: $\tilde{u} = \sqrt{\tilde{\Psi}(0)}/m^*$. В области больших импульсов спектр $\epsilon(\mathbf{p})$ может иметь минимум (или точку перегиба) и определяет критическую скорость $v_c = \min[\epsilon(\mathbf{p})/p] \approx \Delta_1/p_1$, которая может быть сопоставлена с максимальной критической скоростью $v_{cm} \approx 2$ м/с сверхтекучего ${}^4\text{He}$ в сверхтонких пленках и капиллярах [71,72].

Гипотеза о парном характере структуры сверхтекучей компоненты ρ_s в He-II с интенсивным «куперовским» ПКК подтверждается важной ролью парных корреляций, которые с хорошей точностью описываются методом Джастрова–Финберга [38–46] как для бозе-жидкости ${}^4\text{He}$, так и для растворов квантовых жидкостей ${}^3\text{He}$ – ${}^4\text{He}$. Эмпирическим подтверждением образования связанных пар атомов гелия в He-II может служить также экспериментально измеренная аномально большая эффективная масса примесных атомов ${}^3\text{He}$ в жидком ${}^4\text{He}$ [47–51], величина которой близка к суммарной массе ($m_3 + m_4$) атомов ${}^3\text{He}$ и ${}^4\text{He}$, что свидетельствует о связанном состоянии атомов ${}^3\text{He}$ и ${}^4\text{He}$ и, следовательно, пар ${}^4\text{He}$ – ${}^4\text{He}$ [35]. Однако эта гипотеза требует более строгого теоретического обоснования на базе численных расчетов парного параметра порядка $\tilde{\Psi}_T(\mathbf{p})$ и одночастичного спектра $\epsilon_T(\mathbf{p})$ при разных T с использованием реалистических потенциалов взаимодействия между атомами ${}^4\text{He}$, а также более детальной экспериментальной проверки, в частности, с помощью более прецизионных измерений кванта циркуляции скорости в сверхтекучей компоненте He-II и максимальной критической скорости v_c в сверхтонких каналах.

В заключение считаю своим долгом выразить глубокую благодарность Ю. А. Непомнящему, недолгое, но плодотворное сотрудничество с которым открыло для автора новые аспекты в области теории сверхтекучести. Выражаю благодарность И. П. Фомину, принимавшему активное участие в обсуждении затронутых в обзоре вопросов и впервые обратившему внимание на примечательную близость эффективной массы примесных атомов ${}^3\text{He}$ в ${}^4\text{He}$ к суммарной массе атомов ${}^3\text{He}$ и ${}^4\text{He}$, свидетельствующую о возможном возникновении связанных пар атомов гелия в сверхтекучей бозе-жидкости He-II.

1. Л. Д. Ландау, *ЖЭТФ* **11**, 592 (1941); *там же* **17**, 91 (1947).
2. D. G. Henshaw and A. D. B. Woods, *Phys. Rev.* **121**, 1266 (1961).
3. R. Feynman, *Phys. Rev.* **94**, 262 (1954).
4. K. A. Brueckner and K. Sawada, *Phys. Rev.* **106**, 1117 (1957); *ibid* 1128 (1957).
5. К. Бракнер, *Теория ядерной материи*, Мир, Москва (1964).
6. Н. Н. Боголюбов, *Изв. АН СССР, сер. физ.* **11**, 77 (1947); *J. Phys.* **9**, 23 (1947).
7. И. М. Халатников, *Теория сверхтекучести*, Физматгиз, Москва (1971).
8. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Физматгиз, Москва (1962).
9. Дж. Шриффер, *Теория сверхпроводимости*, Наука, Москва (1970).
10. С. Паттерман, *Гидродинамика сверхтекучей жидкости*, Мир, Москва (1978).
11. П. Де Жен, *Сверхпроводимость металлов и сплавов*, Мир, Москва (1968).
12. H. W. Jackson, *Phys. Rev.* **A10**, 278 (1974).
13. Э. А. Андроникашвили, *ЖЭТФ* **16**, 780 (1946).
14. А. А. Непомнящий, Ю. А. Непомнящий, *Письма в ЖЭТФ* **21**, 3 (1975).
15. П. С. Кондратенко, *ТМФ* **22**, 278 (1975).
16. Ю. А. Непомнящий, А. А. Непомнящий, *ЖЭТФ* **75**, 976 (1978).
17. Ю. А. Непомнящий, *ЖЭТФ* **85**, 1244 (1983); *там же* **89**, 511 (1985).
18. Ю. А. Непомнящий, Э. А. Пашицкий, *ЖЭТФ* **98**, 178 (1990).
19. Э. А. Пашицкий, *УФЖ* **18**, 1435 (1973).
20. Э. А. Пашицкий, *Основы теории сверхпроводимости*, Высшая школа, Киев (1985).
21. С. Mavrouyanis, *Phys. Rev.* **A10**, 1741 (1974).
22. А. Н. Бобрышева, С. А. Москаленко, *УФЖ* **25**, 3282 (1975).
23. В. Л. Винецкий, Э. А. Пашицкий, *УФЖ* **20**, 338 (1975); *ФТТ* **25**, 1744 (1983).
24. А. Б. Мигдал, *Фермионы и бозоны в сильных полях*, Наука, Москва (1978).
25. С. Т. Беляев, *ЖЭТФ* **34**, 417 (1958); *там же* 433 (1958).
26. N. M. Hugenholtz and D. Pines, *Phys. Rev.* **116**, 489 (1959).
27. T. G. Valatin and D. Butler, *Nuovo Cim.* **10**, 37 (1958).
28. M. Girardean and R. Arnowitt, *Phys. Rev.* **113**, 755 (1959).
29. A. Coniglio and M. Marinero, *Nuovo Cim.* **48**, 248 (1967).
30. W. A. V. Evans and Y. Imry, *Nuovo. Cim.* **63**, 155 (1969).
31. A. Coniglio and F. Mancini, *Nuovo. Cim.* **63**, 227 (1969).
32. R. Hasting and T. W. Halley, *Phys. Rev.* **B12**, 267 (1975).
33. С. И. Шевченко, *ФНТ* **11**, 339 (1985).
34. Ю. А. Непомнящий, *Письма в ЖЭТФ* **15**, 211 (1972).
35. С. И. Вильчинский, Э. А. Пашицкий, П. И. Фомин, *ФНТ* **23**, 1267 (1997).
36. L. Reatto and C. V. Chester, *Phys. Rev.* **155**, 88 (1967).
37. R. A. Ferrell, N. Meyard, and H. Schmidt, *Ann. Phys.* **47**, 565 (1968).
38. R. Justrow, *Phys. Rev.* **98**, 1479 (1955).
39. M. L. Ristig, P. Hecking, P. M. Lam, and T. W. Clark, *Phys. Lett.* **A63**, 94 (1977).
40. M. L. Ristig, *Phys. Rev.* **B18**, 1207 (1978).
41. E. Feenberg, *Theory of Quantum Liquids*, Academic, N.-Y. (1969).
42. C. E. Campbell and E. Feenberg, *Phys. Rev.* **188**, 396 (1969).
43. C. E. Campbell, *Phys. Lett.* **A44**, 471 (1973).
44. E. Krotscheck, *Phys. Rev.* **B33**, 3158 (1986).
45. E. Krotscheck and M. Saarela, *Phys. Rep.* **232**, 1 (1993).
46. M. Saarela and E. Krotscheck, *J. Low. Temp. Phys.* **90**, 415 (1993).
47. Б. Н. Есельсон, В. Н. Григорьев, В. Г. Иванов, Э. Я. Рудаковский, Д. Г. Саникидзе, И. А. Сербин, *Растворы квантовых жидкостей ^3He - ^4He* , Наука, Москва (1973).
48. A. C. Anderson, W. R. Roach, R. E. Sarwinski, and P. C. Wheatly, *Phys. Rev. Lett.* **16**, 263 (1968).
49. В. И. Соболев, Б. Н. Есельсон, *ЖЭТФ* **60**, 263 (1971).
50. C. Yorozu, H. Fukuyama, and H. Ishimoto, *Phys. Rev.* **B48**, 9660 (1993).
51. R. Simons and R. M. Mueller, *Czech. J. Phys. Suppl.* **46**, 201 (1996).
52. L. L. Foldy, *Phys. Rev.* **83**, 397 (1951); *ibid.* **124**, 649 (1961).
53. A. Alexandrov and J. Ranninger, *Phys. Rev.* **B24**, 1164 (1982).
54. В. Л. Винецкий, *ЖЭТФ* **40**, 1459 (1961).
55. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, Наука, Москва (1978).
56. J. G. Bednorz and K. A. Müller, *Z. Phys.* **B64**, 189 (1986).
57. Н. М. Плакида, *Высокотемпературная сверхпроводимость*, Москва (1996).
58. Н. Н. Боголюбов, В. В. Толмачов, Д. В. Ширков, *Новый метод в теории сверхпроводимости*, Изд-во АН СССР, Москва (1958).
59. А. З. Паташинский, В. Л. Покровский, *Флуктуационная теория фазовых переходов*, Наука, Москва (1975).
60. Л. Н. Булаевский, В. Л. Гинзбург, А. А. Собянин, *ЖЭТФ* **94**, 355 (1988).
61. J. Wilks, *The Properties of Liquid and Solid Helium*, Clarendon Press, Oxford (1967).
62. Н. Н. Боголюбов, Д. И. Зубарев, *ЖЭТФ* **28**, 129 (1955).
63. C. E. Campbell, *Progress in Liquid Physics*, C. A. Croxton (ed.), Wiley, London (1977).
64. M. Saarela, *Resent Progress in Many Body Theories*, Y. Avishai (ed.), Plenum, N.-Y. (1990).
65. E. Krotscheck, J. Paaso, M. Saareda, K. Schörkhuber, and R. Zillich, *Proceed. INTAS Workshop*, Lviv, Ukraine (1998).
66. W. F. Vinen, *Proc. Roy. Soc.* **F260**, 218 (1961).
67. G. W. Rayfield and F. Reif, *Phys. Rev. Lett.* **11**, 305 (1963).
68. S. C. Whitmore and W. Zimmermann, *Phys. Rev.* **166**, 181 (1968).
69. W. M. Van Alphen, J. F. Olijhoek, R. de Bruyn Ouboter, and K. W. Taconis, *Physica* **32**, 1901 (1966).
70. R. de Bruyn Ouboter, K. W. Taconis, and W. M. Van Alphen, *Progress in Low Temperature Physics*, C. J. Gorter (ed.), v. 5, North-Holland, Amsterdam (1967).
71. D. F. Brewre and K. Mendelsohn, *Proc. Roy. Soc.* **A260**, 1 (1961).
72. K. Fokkens, K. W. Taconis, and R. de Bruyn Ouboter, *Physica* **32**, 2129 (1966).
73. W. E. Keller and E. F. Hammel, *Physics* **2**, 221 (1966).
74. P. W. Anderson, *Rev. Mod. Phys.* **38**, 298 (1966).
75. F. Reif and L. Meyer, *Phys. Rev. Lett.* **5**, 1 (1960); *Phys. Rev.* **119**, 1164 (1960).
76. P. C. Hohenberg, *Phys. Rev.* **158**, 383 (1967).
77. P. L. Kapitza, *Nature* **141**, 74 (1938).
78. J. F. Allen and A. D. Misener, *Nature* **141**, 75 (1938).

79. J. L. Yarnell, G. P. Arnold, P. J. Bendt, and E. C. Kerr, *Phys. Rev.* **113**, 1379 (1959).
 80. A. D. B. Woods and R. A. Cowly, *Repts. Progr. Phys.* **36**, 1135 (1973).
 81. H. A. Mook, R. Sherm, and M. K. Wilkinson, *Phys. Rev.* **A6**, 2268 (1972).
 82. С. В. Иорданский, *ЖЭТФ* **47**, 167 (1964).
 83. Д. М. Черникова, *ЖЭТФ* **57**, 2125 (1969).
 84. В. D. Josephson, *Phys. Lett.* **21**, 608 (1966).

The role of pair correlations in the formation of the ground state and the spectrum of elementary excitations of superfluid Bose liquid
 (Review Article)

E. A. Pashitskii

The paradoxes and contradictions of the modern microscopic theory of superfluid helium (He-II) are discussed in the present review along with the possible ways of resolving them by taking into account the pair correlations of ^4He atoms. It is shown that most paradoxes are related to a commonly accepted starting assumption of the prevailing importance of a single-particle Bose-condensate (SPBC) in the quantum microstructure of a superfluid component ρ_s . It is known that the existence of the intensive SPBC leads to the strong hybridization of elementary excitation branches and to the appearance of a dispersion relation that is identical for all branches. This dispersion relation is identified with the quasiparticle spectrum $E(\mathbf{p})$ of liquid helium, which can be obtained experimentally by slow neutron scattering. However, the permanence of this spectrum on approaching the λ -point, as well as the large value of the gap in the vicinity of the «roton» minimum, do not agree with both the theoretical Landau criterion of superfluidity and the small value of the experimentally observed critical velocity. At the same time, it is known that due to the strong interaction between particles in the Bose liquid ^4He , the SPBC is considerably suppressed (making not more than 1% of all ^4He atoms) and thus cannot serve as the basis for the superfluid component (contrary to a weakly nonideal Bose-gas). Moreover, when the par-

ticle attraction becomes sufficiently strong in the certain region of the momentum space, coupled boson pairs can appear in superfluid Bose liquid and hence the pair coherent condensate (PCC) is formed. This PCC is similar to the condensate of the Cooper pairs in superconductors and can completely suppress the weak SPBC. In this case, the single-particle spectrum of the elementary excitations $\epsilon(\mathbf{p})$ is not hybridized with the collective (two-particle) spectrum and is not contained in the dynamic form-factor $S(\mathbf{p}, \epsilon)$, i.e., the spectrum does not coincide with that measured by neutron scattering. The dispersion of $\epsilon(\mathbf{p})$ is determined by the momentum dependence of the paired order parameter $\tilde{\Psi}(\mathbf{p})$ and can have a minimum or an inflection point at $\mathbf{p} \neq 0$. This feature of the single-particle spectrum of the SPBC-free Bose-liquid with PCC vanishes along with $\tilde{\Psi}(\mathbf{p})$ at the critical temperature $T_c = T_\lambda$ of the superfluid-normal liquid phase transition (in contrast to the «roton» minimum of the collective spectrum). The corresponding critical velocity $v_c = \min [\epsilon(\mathbf{p})/p]$ also vanishes at the λ -point according to the Landau criterion of superfluidity and in agreement with the experimental data. The assumption, that the intensive Cooper PCC serves as the basis for the quantum structure of the superfluid component ρ_s , is confirmed indirectly by two factors. It is supported, on the one hand, by the successful application of the Jastrow approximation, which takes into account strong pair correlations in the description of the properties of the liquid ^4He and the solutions of the quantum liquids ^3He - ^4He , and, on the other hand, by the anomalously large effective mass of the ^3He impurities in ^4He . The value of this effective mass is almost equal to that of the total mass of ^3He and ^4He atoms. This suggests the existence of the coupled pairs of the helium atoms in superfluid liquid He-II. The question about the value of the circulation quantum of the superfluid velocity in the Onzager-Freimann vortices in the SPBC-free Bose-liquid with PCC is discussed. The problem of the critical velocities of superfluid ^4He in superfine films and channels, where the creation and motion of the quantum vortices is impossible and the quasiparticle spectrum undergoes dimensional quantization, is also considered.