

УДК 517.9;537.8;538.566

ВИЗНАЧЕННЯ РЕЗОНАНСНИХ ЧАСТОТ ПІД ЧАС ЗОНДУВАННЯ ПРУЖНОЮ SH-ХВИЛЕЮ ІМПЕДАНСНОГО ДЕФЕКТУ НА МЕЖІ ЖОРСТКОГО З'ЄДНАННЯ ПЛАСТИНИ І ПІВПРОСТОРУ

М. В. ВОЙТКО

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

Розглянуто задачу дифракції пружної SH-хвилі на смужковій імпедансній поверхні жорстко закріпленого краю нескінченного пружного шару. Для розв'язання задачі використано метод Вінера–Хопфа. Досліджено власні значення оператора задачі, які відповідають резонансним коливанням динамічної системи на основній моді. Побудовано залежності першої вітки коренів характеристичного рівняння від відношення довжини тріщини до товщини пластини для різних значень імпедансу дефекту.

Ключові слова: дифракція, дефект, імпеданс, метод Вінера–Хопфа, пружний шар, резонанс.

Важлива задача неруйнівного контролю – виявити пошкодження матеріалів, які передують утворенню тріщин. Такі пошкоди моделюють введенням імпедансних поверхонь [1–4]. Тому доцільно дослідити вплив імпедансу на виявлення дефектів, розташованих на межі з'єднання пластин з інтерфейсом.

Методом інтегральних рівнянь досліджено [5–7] хвильові процеси та резонансні явища у пружному шарі під час дифракції хвиль на тріщинах та включеннях. Використовуючи числовий підхід, також вивчили взаємодію пружної хвилі із включенням та тріщиною у пружному шарі за плоского навантаження [8].

Методом Вінера–Хопфа [9, 10] досліджено дифракцію хвиль Лемба та резонансні явища на тріщині у пружному шарі, а також поширення SH-хвиль (хвиль Лява) у різних з'єднаннях пружних пластин [11]; у шарі з внутрішньою скінченною тріщиною, який з'єднаний з півпростором [12, 13], а також у шарі, який містить напівнескінченну тріщину [14]. Однак числових розрахунків у цих працях не наведено. Використовуючи цей метод [15–17], розв'язали задачу дифракції пружної SH-хвилі на міжфазній тріщині в абсолютно жорсткому з'єднанні пластини з півпростором і вивчили резонансні властивості такої структури.

Розглянемо жорстке з'єднання шару $P: \{x \in (-\infty, \infty), y \in (-d, 0), z \in (-\infty, \infty)\}$ з плоским інтерфейсом $S: \{x \in (-\infty, \infty), y = 0, z \in (-\infty, \infty)\}$ та дефектом $\Gamma: \{x \in (-L, 0), y = 0, z \in (-\infty, \infty)\}$, яке характеризується імпедансом Z , де $Oxyz$ – декартова система координат (рис. 1). Таку структуру опромінюємо однією з незгасальних нормальних SH-хвиль, що поширюються у шарі P , за відсутності дефекту. Залежність поля зміщень SH-хвилі від часу t приймаємо у вигляді множника $e^{-i\omega t}$, який надалі опускаємо. Дифракційні процеси у такій системі описують за допомогою однієї скалярної функції $u = u(x, y)$, яка визначає поле зміщень ($\mathbf{u} \equiv (\vec{e}_z u(x, y))$). Відповідну крайову задачу дифракції формулюємо так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u^{\text{tot}}(x, y)}{\partial y} = 0, y = -d; x \in (-\infty, \infty), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u^{\text{tot}}(x, y)}{\partial y} + \eta u^{\text{tot}}(x, y) = 0, y = 0; x \in (-L, 0), \quad (3)$$

$$u^{\text{tot}}(x, y) = u(x, y) + u_z^{\text{inc}}(x, y) = 0, y = 0; x \in (-\infty, -L) \cup (0, \infty). \quad (4)$$

Тут $u_z^{\text{inc}}(x, y) = e^{\gamma_j x} \sin(\beta_j y)$ – збуджувальна хвиля, яка поширюється у від’ємному напрямі осі x , $\beta_j = \pi(2j - 1)/2d, j = 1, 2, 3, \dots$, $\gamma_j = \sqrt{\beta_j^2 - k^2} = -i\sqrt{k^2 - \beta_j^2}$; $\text{Re } \gamma_j > 0$, $k = k' + ik''$ – хвильове число ($k', k'' > 0$, $k' \gg k''$); $\eta = Z/\mu$, μ – параметр Ламе матеріалу шару; Z – імпедансний параметр, який описує пошкодження з’єднання.

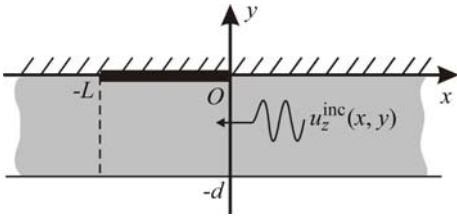


Рис. 1. Міжфазний дефект на межі з’єднання пружного шару з інтерфейсом.
Fig. 1. An interface defect at the elastic layer and interface junction.

Розв’язок крайової задачі (1)–(4) шукатимемо у класі функцій, які забезпечують виконання умови граничного поглинання, коли $|\rho| \rightarrow \infty$, а також умови Мейкснера у вершинах дефекту:

$$u \sim \rho_{1(2)}^\delta, \quad \partial u / \partial y \sim \rho_{1(2)}^{-(1-\delta)}, \quad \text{коли } \rho_1 = [x^2 + y^2]^{1/2} \rightarrow 0$$

$$\text{і } \rho_2 = [(x+L)^2 + y^2]^{1/2} \rightarrow 0, \quad (5)$$

де $0 < \delta \leq 1/2$.

Розглянемо трансформанту Фур’є дифрагovanого поля:

$$U(\alpha, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{i\alpha x} dx, \quad (6)$$

де $\alpha = \text{Re } \alpha + i \text{Im } \alpha$ ($\equiv \sigma + i\tau$) – аргумент перетворення Фур’є.

Застосовуючи інтегральне перетворення Фур’є до рівняння (1), подамо трансформанту (6) у вигляді

$$U(\alpha, y) = B(\alpha) e^{\gamma y} + C(\alpha) e^{-\gamma y}. \quad (7)$$

Тут $B(\alpha)$, $C(\alpha)$ – невідомі функції; $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - k^2} = -i\sqrt{k^2 - \alpha^2}$, $\text{Re } \gamma > 0$; функція $U(\alpha, y)$ регулярна у смугі $\alpha \in \Pi: \{-\tau_0 < \tau < \tau_0\}$, де $\tau_0 \leq \min(\text{Im } k, \text{Re } \gamma_1)$; $\text{Re } \gamma_1 < \text{Re } \gamma_j$, якщо $j > 1$.

Розглянемо інтеграл Фур’є

$$U'^-(\alpha, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-L} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} e^{i\alpha(x+L)} dx, \quad U'^+(\alpha, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} e^{i\alpha x} dx, \quad (8)$$

$$\Phi'(\alpha, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^0 \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} e^{i\alpha x} dx. \quad (9)$$

Тут $U'^-(\alpha, 0)$, $U'^+(\alpha, 0)$ – регулярні функції параметра α відповідно у півплощинах $\tau < \tau_0$ і $\tau > -\tau_0$, які мають спільну смугу регулярності Π ; $\Phi'(\alpha, 0)$ – ціла функція [18].

Продиференціювавши вираз (7) за змінною y і застосувавши інтегральне перетворення Фур’є до крайової умови (2), знаходимо:

$$C(\alpha) = B(\alpha)e^{-2\gamma d}. \quad (10)$$

Спрямувавши $y \rightarrow 0$ і взявши до уваги вирази (6)–(10), отримаємо:

$$e^{-i\alpha L}U'^-(\alpha, 0) + \Phi'(\alpha, 0) + U'^+(\alpha, 0) = \gamma B(\alpha)[1 - e^{-2\gamma d}]. \quad (11)$$

Крім того, застосовуючи інтегральне перетворення Фур'є до крайової умови (3), знаходимо:

$$\Phi'(\alpha, 0) + \eta\Phi(\alpha, 0) = \frac{i\beta_j}{\sqrt{2\pi(\alpha - i\gamma_j)}} \left[1 - e^{-iL(\alpha - i\gamma_j)} \right]. \quad (12)$$

Таким чином, беручи до уваги вирази (8)–(12), рівняння (7) запишемо так:

$$U(\alpha, y) = \left[e^{-i\alpha L}U'^-(\alpha, 0) - Z\Phi(\alpha, 0) + \frac{i\beta_j}{\sqrt{2\pi(\alpha - i\gamma_j)}} \left(1 - e^{-iL(\alpha - i\gamma_j)} \right) + U'^+(\alpha, 0) \right] \frac{\text{ch}\gamma(y+d)}{\gamma \text{sh}(\gamma d)}. \quad (13)$$

Використовуючи подання (13) і перетворення Фур'є крайової умови (4), приходимо до рівняння типу Вінера–Хопфа, яке подамо у вигляді

$$M(\alpha)[e^{-i\alpha L}\Psi^-(\alpha) + \Psi^{(+)}(\alpha)] = \tilde{\Phi}(\alpha). \quad (14)$$

Тут $\Psi^-(\alpha)$, $\Psi^{(+)}(\alpha)$ – невідомі Фур'є-трансформанти поля напружень на межі з'єднання зліва та справа від дефекту; $\tilde{\Phi}(\alpha) = \Phi(\alpha)/d$ – невідома ціла функція, яка є трансформантою Фур'є зміщення на поверхні дефекту; $M(\alpha)$ – відома функція:

$$\Psi^-(\alpha) = U'^-(\alpha, 0) - \frac{i\beta_j e^{-\gamma_j L}}{\sqrt{2\pi(\alpha - i\gamma_j)}}, \quad (15)$$

$$\Psi^{(+)}(\alpha) = U'^+(\alpha, 0) + \frac{i\beta_j}{\sqrt{2\pi(\alpha - i\gamma_j)}}, \quad (16)$$

$$M(\alpha) = \frac{\text{ch}(\gamma d)}{\gamma d \text{sh}(\gamma d) + \varepsilon \text{ch}(\gamma d)}, \quad (17)$$

де $\varepsilon = \eta d$.

Рівняння (14) виконується у смузі П, а функції $\Psi^{(+)}(\alpha)$ та $\Psi^-(\alpha)$ регулярні відповідно у півплощинах $\text{Im}\alpha > \tau_0$ і $\text{Im}\alpha < \tau_0$ ($\Psi^{(+)}(\alpha)$ у точці $\alpha = i\gamma_j$ ($\text{Re}\gamma_j > \tau_0$) має простий полюс). В областях регулярності $\Psi^{(+)}(\alpha) = O(\alpha^{-1/2})$, коли $|\alpha| \rightarrow \infty$; $\tilde{\Phi}(\alpha) = O(\alpha^{-3/2})$ в області $\tau < \tau_0$ та $e^{i\alpha L}\tilde{\Phi}(\alpha) = O(\alpha^{-3/2})$, якщо $\tau > -\tau_0$.

Парна функція (17) є мероморфною та регулярною у смузі П і $M(\alpha) = O(\alpha^{-1})$, коли $|\alpha| \rightarrow \infty$. Функція $M(\alpha)$ допускає факторизацію методом нескінченних добутків [18, 19] і її подамо у вигляді

$$M(\alpha) = M_+(\alpha)M_-(\alpha). \quad (18)$$

Для малих значень параметра ε ($\varepsilon \ll 1$)

$$M_{\pm}(\alpha) = \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 \pm \frac{\alpha}{i\gamma_{nc}} \right]}{\sqrt{\varepsilon - kd \text{tg}(kd)} \left(1 \pm \frac{\alpha}{i\gamma_{0s}} \right) \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{\alpha}{i\gamma_{ns}} \right]}, \quad (19)$$

де $\pm i\gamma_{nc}$, $\pm i\gamma_{ns}$ – відповідно прості нулі функцій $\text{ch}(\gamma d)$ та $\gamma d \text{sh}(\gamma d) + \varepsilon \text{ch}(\gamma d)$;

$$\gamma_{nc} = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{\pi^2}{4}(2n-1)^2 - k^2 d^2};$$

$$\gamma_{0s} = \frac{1}{d} \sqrt{\varepsilon - k^2 d^2}, \gamma_{ns} = \frac{1}{d} \sqrt{(\pi n + \varepsilon / \pi n)^2 - k^2 d^2}, n = 1, 2, 3, \dots; \operatorname{Re} \gamma_{nc}, \operatorname{Re} \gamma_{ns} > 0. \quad (20)$$

У формулах (19) функції $M_+(\alpha)$, $M_-(\alpha)$ регулярні і не мають нулів відповідно у півплощинах $\tau > -\tau_0$, $\tau < \tau_0$, а в областях регулярності, якщо $|\alpha| \rightarrow \infty$, справедлива асимптотична оцінка $M_{\pm}(\alpha) = O(\alpha^{-1/2})$. За межами областей регулярності вони мають прості нулі і полюси у точках $\alpha = \mp i\gamma_{nc}$ та $\alpha = \mp i\gamma_{ns}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) і простий полюс, якщо $\alpha = \mp i\gamma_{0s}$.

Враховуючи подання (18), з рівняння (14) отримуємо:

$$e^{-i\alpha L} M_+(\alpha) \Psi^-(\alpha) + M_+(\alpha) \Psi^{(+)}(\alpha) + \frac{\Phi(\alpha)}{M_-(\alpha)d} = 0, \quad \alpha \in \Pi, \quad (21)$$

$$M_-(\alpha) \Psi^-(\alpha) + M_-(\alpha) e^{i\alpha L} \Psi^{(+)}(\alpha) + \frac{e^{i\alpha L} \Phi(\alpha)}{M_+(\alpha)d} = 0, \quad \alpha \in \Pi. \quad (22)$$

Факторизуючи рівняння (21) і (22), приходимо до системи інтегральних рівнянь другого роду, які після заміни інтегралів рядами лишків зводимо до таких співвідношень:

$$M_+(\alpha) \Psi^{(+)}(\alpha) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{ns} L} \Psi^-(i\gamma_{ns})}{i\gamma_{ns} M_+(i\gamma_{ns})(i\gamma_{ns} + \alpha)} V_n(\varepsilon) = \frac{i\beta_j}{\sqrt{2\pi}} \frac{M_+(i\gamma_j)}{\alpha - i\gamma_j}, \quad (23)$$

$$M_-(\alpha) \Psi^-(\alpha) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{ie^{-\gamma_{ns} L} \Psi^{(+)}(i\gamma_{ns})}{\gamma_{ns} M_+(i\gamma_{ns})(\alpha - i\gamma_{ns})} V_n(\varepsilon) = 0. \quad (24)$$

Тут

$$V_n(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{3}, & n = 0, \\ 1 - \frac{\varepsilon}{\pi^2 n^2}, & n \neq 0, \end{cases} \quad \varepsilon \ll 1. \quad (25)$$

Покладаючи у першому рівнянні $\alpha = i\gamma_{ms}$, а у другому $-\alpha = -i\gamma_{ms}$, $m = 0, 1, 2, \dots$, із функціональних співвідношень (23), (24) отримуємо нескінченну систему лінійних алгебричних рівнянь (НСЛАР):

$$[I + A]X = F, \quad (26)$$

де $X = \{X_{ms}\}_{m=0}^{\infty}$, $X_{ms} = M_+(i\gamma_{ms}) \Psi^{(+)}(i\gamma_{ms})$ і $X_{ms} = O(m^{-1})$, коли $m \rightarrow \infty$; I – одинична матриця; $A: \{a_{mr}\}_{m,r=0}^{\infty}$; $F = \{f_m\}_{m=0}^{\infty}$,

$$a_{mr} = - \frac{d^{-2} e^{-\gamma_{rs} L} V_r(\varepsilon)}{[M_+(i\gamma_{rs})]^2 \gamma_{rs}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V_n(\varepsilon) e^{-\gamma_{ns} L}}{[M_+(i\gamma_{ns})]^2 (\gamma_{ms} + \gamma_{ns})(\gamma_{rs} + \gamma_{ns}) \gamma_{ns}}, \quad (27)$$

$$f_m = \frac{\beta_j}{\sqrt{2\pi}} \frac{M_+(i\gamma_j)}{\gamma_{ms} - \gamma_j}. \quad (28)$$

Якщо $m, r \rightarrow \infty$, то для матричних елементів (27) справедлива оцінка

$$|a_{mr}| \leq C \frac{e^{-\pi r L / d}}{mr}, \quad (29)$$

де C – відома стала, яка не залежить від m та r .

У просторі l_2 $\|A\| = \sum_{m,r} |a_{mr}|^2 < \infty$, а отже, НСЛАР (26) у ньому має єдиний розв'язок, за винятком дискретних значень хвильового параметра, для яких відповідне однорідне рівняння (26) допускає ненульовий розв'язок.

Для визначення частотного спектра вихідної дифракційної задачі розглянемо характеристичне рівняння

$$\det[I + A(\Omega)] = 0. \quad (30)$$

Тут елементи матриці $A = A(\Omega)$, де $\Omega = kd$, нелінійно залежать від частоти Ω і мають точки галуження в комплексній площині. Тому рівняння (30) розглядаємо на рімановій поверхні. Необхідні розрізи цієї площини вибрано із умови, яка забезпечує формування загасальних у часі власних коливань.

Корені рівняння (30) комплексні. Для їх знаходження дослідили функцію $f(\Omega) = |\det[I + A(\Omega)]|$ за дійсних значень хвильового числа. Побудуємо (рис. 2) залежність $f(\Omega)$ за різних значень параметра ε і фіксованого p ($p = L/d$). Значення безрозмірної частоти Ω , за якої функція $f(\Omega)$ досягає локального мінімуму, приймаємо за початкове, шукаючи комплексні корені рівняння (30).

Рис. 3а ілюструє зсув резонансних значень $\text{Re}\Omega$ у височастотну область зі зростанням імпедансного параметра ε . Оскільки при $\varepsilon \rightarrow 0$ імпедансний дефект перетворюється у тріщину, а при $\varepsilon \rightarrow \infty$ матимемо бездефектну структуру, то така залежність резонансних частот від імпедансного параметра вказує, що за “меншого” пошкодження (відповідає більше значення ε) динамічна система резонансно збуджується за вищих частот. Встановили також, що при $\varepsilon > 0$ резонансне її збудження відбувається, якщо $p > 2$. Коли $\varepsilon = 0$, його спостерігали, починаючи зі значень $p \geq 0,1$ [16, 17]. Крім того (рис. 3b), зі зростанням імпедансу збільшується модуль уявної частини резонансних частот, що вказує на зниження добротності резонансних коливань зі збільшенням параметра ε .

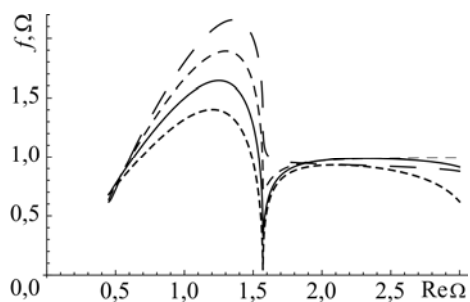


Рис. 2. Залежність модуля визначника рівняння (30) від $\text{Re}\Omega$ для $p = L/d = 0,1$: 1 – $\varepsilon = 0$; 2 – 0,05; 3 – 0,1; 4 – 0,15.

Fig. 2. Dependence of the determinant modulus (30) on the parameter $\text{Re}\Omega$ for $p = L/d = 0.1$: 1 – $\varepsilon = 0$; 2 – 0.05; 3 – 0.1; 4 – 0.15.

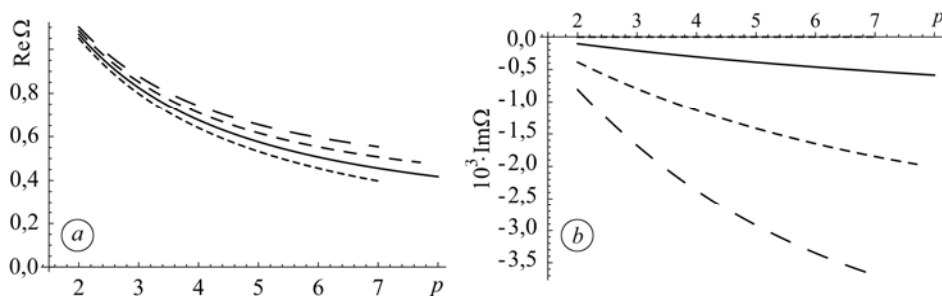


Рис. 3. Залежності дійсних (a) та уявних (b) частин першої вітки коренів рівняння (30) від параметра p : 1 – $\varepsilon = 0$; 2 – 0,05; 3 – 0,1; 4 – 0,15.

Fig. 3. Dependence of the real (a) and imaginary (b) parts of the first branch roots of equation (30) for parameter p : 1 – $\varepsilon = 0$; 2 – 0.05; 3 – 0.1; 4 – 0.15.

ВИСНОВКИ

Показано можливість збудження височастотних резонансних поперечних коливань у жорсткому з’єднанні шару з інтерфейсом за наявності міжфазного пошкодження, що характеризується імпедансом. Виявлено ефект зростання резонансної частоти зі збільшенням імпедансу дефекту. Щоб отримати резонансний відгук під час діагностування однакових за довжиною дефектів для виявлення

“меншого” пошкодження, що відповідає більшому значенню ε , необхідно вибрати вищі частоти.

РЕЗЮМЕ. Рассмотрена задача дифракции упругой SH-волны на полосковой импедансной поверхности жестко закрепленного края бесконечного упругого слоя. Для решения задачи использован метод Винера–Хопфа. Исследованы собственные значения оператора задачи, соответствующие резонансным колебаниям динамической системы на основной моде. Построены зависимости первой ветки корней характеристического уравнения от отношения длины трещины к толщине пластины для различных значений импеданса дефекта.

SUMMARY. The problem of diffraction of elastic SH-waves on the impedance surface of the strip with rigidly connected edges of the infinite elastic layer is considered. The problem is formulated in terms of the Wiener–Hopf equation. The eigen values of the problem, corresponding to resonant vibrations of a dynamical system on the main mode, are investigated. The dependences of the first branch of the roots of characteristic equation on the ratio of crack length to the plate thickness for different values of defect impedance are constructed.

1. *Castro L. P. and Kapanadze D.* The impedance boundary-value problem of diffraction by a strip // *J. Math. Anal. Appl.* – 2008. – **337**, № 2. – P. 1031–1040.
2. *Lee K.-M.* An inverse scattering problem from an impedance obstacle // *J. of Computational Physics.* – 2007. – **227**. – P. 431–439.
3. *Cheng J., Liu J. J., and Nakamura G.* Recovery of the shape of an obstacle and the boundary impedance from the far-field pattern // *J. Math. Kyoto U.* – 2003. – **43**. – P. 165–186.
4. *Kress R. and Lee K.-M.* Integral equation methods for scattering from an impedance crack // *J. of Computational and Appl. Math.* – 2003. – **161**, № 1. – P. 161–177.
5. *Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Голуб М. В.* Блокирование бегущих волн и локализация энергии упругих колебаний при дифракции на трещине // *Акуст. журн.* – 2006. – **52**, № 3. – С. 314–325.
6. *Голуб М. В.* Дифракция SH-волн и резонансы в периодических структурах с бесконечно тонкими неоднородностями // *Изв. РАН. Сер. физ.* – 2010. – **74**, № 12. – С. 1752–1756.
7. *Resonance blocking and passing effects in two-dimensional elastic waveguides with obstacles* / E. Glushkov, N. Glushkova, M. Golub, A. Eremin // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 2011. – **130**, № 1. – P. 113–121.
8. *Karim M. R., Awal M. A., and Kundu T.* Elastic wave scattering by cracks and inclusions in plates: in-plane case // *Int. J. Solids Struct.* – 1992. – **29**, № 19. – P. 2355–2367.
9. *Rokhlin S. I.* Diffraction of Lamb waves by a finite crack in an elastic layer // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1980. – **67**, № 4. – P. 1157–1165.
10. *Rokhlin S.* Resonance phenomena of Lamb waves scattering by a finite crack in a solid layer // *Ibid.* – 1981. – **69**, № 4. – P. 922–928.
11. *Zaman F. D.* Diffraction of SH-waves across a mixed boundary in a plate // *Mech. Res. Comm.* – 2001. – **28**, № 2. – P. 171–178.
12. *Asghar S. and Zaman F. D.* Diffraction of SH-waves by a finite crack in a layer overlying a half space // *Boll. Di Geofisica Teorica Ed Applicata.* – 1987. – **19**, № 113. – P. 43–50.
13. *Asghar S. and Zaman F. D.* Diffraction of Love waves by a finite rigid barrier // *Bulletin of the Seismological Soc. of America.* – 1986. – **76**, № 1. – P. 241–257.
14. *Ahmad M.* Diffraction of SH waves by a plane crack in a thick plate // *Proc. Pakistan Acad. Sci.* – 2007. – **44**, № 1. – P. 27–34.
15. *Дифракція пружної SH-хвилі на міжфазній тріщині у жорсткому з’єднанні шару з інтерфейсом* / З. Т. Назарчук, Д. Б. Куриляк, М. В. Войтко, Я. П. Кулинич // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2011. – **47**, № 6. – С. 115–121.
(*Nazarchuk Z. T., Kurylyak D. B., Voitko M. V., and Kulynych Ya. P.* Diffraction of elastic SH-waves on the interface crack in the rigid joint of a layer with interface // *Material Science.* – 2011. – **47**, № 6. – P. 848–855.)
16. *Дифракція пружної SH-хвилі на міжфазній тріщині в абсолютно жорсткому з’єднанні пластини з півпростором* / З. Т. Назарчук, Д. Б. Куриляк, М. В. Войтко, Я. П. Кулинич // *Акуст. вісник.* – 2011. – **14**, № 3. – С. 53–59.
17. *Про взаємодію пружної SH-хвилі з міжфазною тріщиною в абсолютно жорсткому з’єднанні пластини з півпростором* / З. Т. Назарчук, Д. Б. Куриляк, М. В. Войтко, Я. П. Кулинич // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2012. – **55**, № 2. – С. 107–118.
18. *Миттла Р., Ли С.* Аналитические методы в теории волноводов. – М.: Мир, 1974. – 327 с.
19. *Титчмарш Е.* Теория функций. – М.: Наука, 1980. – 463 с.

Одержано 14.06.2013