УДК 519.217

В. К. Ясинський, д-р фіз.-мат. наук, професор,
І. В. Юрченко, канд. фіз.-мат. наук

Чернівецький національний університет
імені Ю. Федьковича, м. Чернівці

АСИМПТОТИКА ДРУГОГО МОМЕНТУ РОЗВ'ЯЗКУ ЛІНІЙНОГО АВТОНОМНОГО СТОХАСТИЧНОГО РІВНЯННЯ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ІЗ ЗОВНІШНИМИ ВИПАДКОВИМИ ЗБУРЕННЯМИ

Доведено існування сильного розв'язку лінійного дифузійного стохастичного диференціального рівняння з частинними похідними (ЛСДРзЧП) у відповідному просторі із зовнішніми випадковими збуреннями. Отримано достатні умови в термінах коефіцієнтів ЛСДРзЧП асимптотичної стійкості й нестійкості в середньому квадратичному сильного розв'язку цього рівняння.

Ключові слова: *стохастичне рівняння в частинних похідних, стійкість в середньому квадратичному, асимптотична стійкість.*

Вступ. Дослідженню детермінованих рівнянь у частинних похідних присвячено велику кількість робіт, які вказані в монографіях [1–3; 17], і не менша кількість робіт вітчизняних і закордонних вчених була опублікована в кінці XX — на поч. XXI ст.

Після введення поняття стохастичного диференціала та інтеграла, заміни змінних для стохастичного диференціала, визначення сильного розв'язку стохастичного диференціального рівняння (СДР) у відомих монографіях [4–6] та їх подальше поширення на класи стохастичних диференціально-функціональних рівнянь [7–9] (див. наведену велику бібліографію в цих роботах) стало можливим дослідження асимптотично сильного розв'язку для СДРзЧП (див., наприклад, роботи [5; 10–12; 16; 18] та ін.)

Подальше дослідження СДРзЧП йшло шляхом створення математичних моделей складних реальних систем, які вимагають враховувати випадкові параметри в цих рівняннях (див. [6–7; 12–13] та ін.).

Робота присвячена дослідженню асимптотичної поведінки сильного розв'язку ЛСДРзЧП з урахуванням випадкових параметрів [10; 12].

§ 1. Постановка задачі. Розглянемо стохастичний експеримент з базовим імовірнісним простором [1; 4–5; 7] $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, $\mathbb{F} \equiv \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ — фільтрація, де задана функція $u(t, x, \omega) \in \mathbb{R}^1$, яка є вимірною з імовірністю одиниця за t і x відносно мінімальної σ-алгебри $\mathcal{B}([0,T], \mathbb{R}^1)$ борельових множин на площині [13] та для якої

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}\left\{\left|u\left(t,x,\omega\right)\right|^2\right\} dx < \infty \qquad (1)$$

для всіх $t \in [0,T]$, $\mathbb{E}\{\bullet\}$ — математичне сподівання [14], $T \subset [0,\infty)$. Простір функцій $\{u(t,x,\omega)\}$, що мають властивість інтегровності (1), позначимо через $\mathfrak{M}_T$.

Уведемо норми [6; 15]:

$$\left\|u\left(t,x,\omega\right)\right\|^2_{L_{2\mathbb{R}^1}} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \left|u\left(t,x,\omega\right)\right|^2 dx; \qquad (2)$$

$$\left\|u\left(t,x,\omega\right)\right\|^2_{L_{2T}} \equiv \int_{0}^{T} \left|u\left(t,x,\omega\right)\right|^2 dt; \qquad (3)$$

$$\mathbb{E}_u\left(t\right) \equiv \mathbb{E}\left\{\left\|u\left(t,x,\omega\right)\right\|^2_{L_{2\mathbb{R}^1}}\right\}, \qquad (4)$$

де через $L_{2\mathbb{R}^1}$ і L_{2T} позначені простори функцій $\{u(t,x,\omega)\}$, які мають відповідні норми (2) і (3).

У просторі $\mathfrak{M}_T$ треба ввести норму вигляду

$$\left\|u\left(t,x,\omega\right)\right\|^2 \equiv \int_0^T \mathbb{E}_u(t)dt = \int_0^T \mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left|u\left(t,x,\omega\right)\right|^2 dx\right]^2 dt\ . \qquad (5)$$

Позначимо через

$$Q\Big(A\big(\xi(\omega)\big),q,p\Big) \equiv \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{kj}\big(\xi(\omega)\big) q^k p^j\ , \qquad (6)$$

де $A \equiv \{a_{kj}\}$ — матриця розмірності $n \times m$, складена з елементів $a_{kj} \in \mathbb{R}^1$.

У просторі $\mathfrak{M}_T$ розглянемо підпростір $\mathfrak{M}_{1T} \subset \mathfrak{M}_T$, для елементів якого справджується включення

$$Q\left(A,\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u\left(t,x,\omega\right) \in \mathfrak{M}_T\ . \qquad (7)$$

Далі розглянемо на $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F},\mathbb{P})$ задачу Коші для лінійного стохастичного диференціального рівняння з частинними похідними (ЛСДРзЧП) вигляду

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[Q\left(A\big(\xi_1(\omega)\big),\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x,\omega)\right] +$$

$$+Q\left(B\big(\xi_2(\omega)\big),\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x,\omega) = \qquad (8)$$

$$=Q\left(C\left(\xi_3(\omega)\right), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t,x,\omega) \frac{dw(t,\omega)}{dt},$$

$$Q\left(A\left(\xi_1(\omega)\right), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t,x,\omega) \bigg|_{t=0} = [Qu]_0, \qquad (9)$$

де Q визначено (6), матриці $B \equiv \left\{ b_{ij}\left(\xi_2(\omega)\right) \right\}_{i,j=1}^{k,n}$, $b_{ij}\left(\xi_2(\omega)\right) \in \mathbb{R}^1$; $C \equiv \left\{ c_{ij}\left(\xi_3(\omega)\right) \right\}_{i,j=1}^{k,n}$, $c_{ij}\left(\xi_3(\omega)\right) \in \mathbb{R}^1$, $\xi_i(\omega), i = 1,2,3,$ — випадкові величини, які задані щільністю $p_{\xi_i}(x), i = 1,2,3,$ (або функцією розподілу $F_{\xi_i}(x) \equiv \mathbb{P}\left\{ \omega : \xi_i(\omega) < x \ \forall \ x \in \mathbb{R}^1 \right\}$, i=1,2,3 [14]), $w(t,\omega)$ — одновимірний вінерів процес [11], при цьому $\xi_i(\omega)$ не залежать від $w(t,\omega)$ для i = 1, 2, 3.

Під сильним розв'язком задачі Коші (8), (9) будемо розуміти неперервну з імовірністю одиниця за $t \in [0,T]$ функцію $u(t,x,\omega)$, узгоджену з фільтрацією $\left\{ \mathcal{F}_t, t \in [0,T] \right\}$ і таку, що з імовірністю одиниця для кожної пари (t,x) задовольняє інтегральне стохастичне рівняння [1; 4; 11]

$$\begin{aligned} Q\left(A\left(\xi_1(\omega)\right), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t,x,\omega) &= [Qu]_0 + \\ &+ \int_0^t Q\left(B\left(\xi_2(\omega)\right), \frac{\partial}{\partial x} \right) u(s,x,\omega) ds + \qquad (10) \\ &+ \int_0^t Q\left(C\left(\xi_3(\omega)\right), \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(s,x,\omega) dw(s,\omega) \end{aligned}$$

з початковими невипадковими умовами (9).

§ 2. Існування розв'язку задачі Коші для ЛСДРзЧП (8)–(9) у просторі $\mathfrak{M}_{1T}$. Для встановлення факту існування сильного розв'язку задачі Коші для (8)–(9) доведемо спочатку допоміжний результат.

Лема 1. Перетворення Фур'є за x для функції $u(t,x,\omega)$

$$v(t,\sigma,\omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\sigma x} u(t,x,\omega) dx \qquad (11)$$

не виводить її з простору $\mathfrak{M}_T$ для довільного скінченного $T \subset \mathbb{R}^1$.

Доведення. Існування перетворення Фур’є випливає з того, що $u(t,x,\omega)$ з імовірністю одиниця належить $L_{2\mathbb{R}^1}$ для довільного $t \in [0,T]$ та

$$\mathbb{P}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} \left|u(t,x,\omega)\right|^2 dx > N\right\} \le \frac{\mathbb{E}_u(t)}{N} \to 0$$

при $N \to +\infty$.

Згідно з теоремою Планшереля [16] маємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|v(t,\sigma,\omega)\right|^2 d\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|u(t,x,\omega)\right|^2 dx,$$

тобто $\|v\|_{L_{2\mathbb{R}^1}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|u\|_{L_{2\mathbb{R}^1}}$, а, отже, $\mathbb{E}_v(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbb{E}_u(t)$.

Тоді, згідно з означенням норми в просторі $\mathfrak{M}_T$, будемо мати $\|v\|_{\mathfrak{M}_T} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|u\|_{\mathfrak{M}_T}$, що й доводить лему 1.

Теорема 1. Нехай для задачі Коші (8), (9) виконуються умови:

I) корені полінома $P(\lambda(x), i\sigma) \equiv \lambda Q(A(x), \lambda, i\sigma) + Q(B(x), \lambda, i\sigma)$ при кожному фіксованому $x \in \mathbb{R}^1$ для довільного $\sigma \ne 0$ задовольняють нерівність $\operatorname{Re}\lambda(x) \le \psi(\sigma) < 0$, $\psi(0) = 0$;

II) $\forall\, t \in [0,T]$ і $C(x) \equiv 0_{k\times n}$ детерміноване рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[Q\left(A(x), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{u}(t,x)\right] + Q\left(B(x), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{u}(t,x) = 0 \qquad (12)$$

має розв’язок $\tilde{u}(t,x)$ задачі Коші в $L_{2\mathbb{R}^1}$ з початковими умовами

$$Q\left(A(x), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{u}(t,x) = [Q\tilde{u}]_0; \qquad (13)$$

III) випадкові величини $\xi_i(\omega)$, $i = 1, 2, 3$, не залежать від $w(t,\omega)$.

Тоді стохастична задача Коші (8), (9) при $C(x) \ne 0_{k\times n}$ має розв’язок у просторі $\mathfrak{M}_{1T}$.

Доведення. Оскільки перетворення Фур’є [1] зберігає норму в $\mathfrak{M}_{1T}$ за лемою 1, то достатньо довести існування сильного розв’язку задачі Коші лінійного СДР для $v(t,\sigma,\omega)$, заданого формулою (11), а саме

$$\frac{d}{dt}\left[Q\left(A\left(\xi_1(\omega)\right),\frac{d}{dt},i\sigma\right)v(t,\sigma,\omega)\right]+Q\left(B\left(\xi_2(\omega)\right),\frac{d}{dt},i\sigma\right)v(t,\sigma,\omega)=$$
$$=Q\left(C\left(\xi_3(\omega)\right),\frac{d}{dt},i\sigma\right)v(t,\sigma,\omega)\frac{dw(t,\omega)}{dt}. \qquad (14)$$

Зауважимо, що для довільної дійснозначної матриці $D(x)\equiv \equiv\left\{d_{ij}(x)\right\}_{i,j=1}^{k,n}$ для довільного $x\in\mathbb{R}^1$ маємо включення $Q\left(D(x),\frac{d}{dt},i\sigma\right)\times \times v(t,\sigma,\omega)\in\mathfrak{M}_{1T}$ і розв'язок $v(t,\sigma,\omega)$ ЛСДР (14) при кожному $\sigma\neq 0$ існує та єдиний з точністю до стохастичної еквівалентності [3; 5; 8]. ЛСДР (14) слід тлумачити як інтегральне стохастичне рівняння

$$Q\left(A\left(\xi_1(\omega)\right),\frac{d}{dt},i\sigma\right)v(t,\sigma,\omega)=[Qv]_0+\int_0^t Q\left(B\left(\xi_2(\omega)\right),ds,i\sigma\right)v(s,\sigma,\omega)=$$
$$=\int_0^t Q\left(C\left(\xi_3(\omega)\right),ds,i\sigma\right)v(s,\sigma,\omega)dw(s,\omega),$$

для якого виконуються умови, що гарантують існування та єдиність сильного розв'язку з точністю до стохастичної еквівалентності [7, с. 266–270, теорема 4.1].

Позначимо через $H(t,\sigma)$ фундаментальний розв'язок детермінованої однорідної незбуреної задачі Коші (12), (13) для ЛСДРзЧП (8), (9) при $C(x)\neq 0_{k\times n}$, тоді сильний розв'язок ЛСДР (14), (13) можна записати у вигляді інтегрального рівняння [9; 19]

$$v(t,\sigma,\omega)=v_0(t,\sigma)+\int_0^t H(t-s)Q\left(C\left(\xi_3(\omega)\right),ds,i\sigma\right)v(t,\sigma,\omega), \qquad (15)$$

де $v_0(t,\sigma)$ — розв'язок однорідної незбуреної задачі Коші

$$\frac{d}{dt}\left[Q\left(A\left(\xi_1(\omega)\right),\frac{d}{dt},i\sigma\right)v(t,\sigma,\omega)+Q\left(B\left(\xi_2(\omega)\right),\frac{d}{dt},i\sigma\right)v(t,\sigma,\omega)\right]=0.$$

Згідно з [1], фундаментальний розв'язок $H(t,\sigma)$ має вигляд

$$H(t,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\oint_\Gamma\frac{e^{\lambda t}d\lambda}{P\left(\lambda(x),i\sigma\right)}, \qquad (16)$$

де Γ — контур, що охоплює всі нулі многочлена $P\left(\lambda(x),i\sigma\right)$.

Застосувавши випадковий оператор $Q\left(C\left(\xi_3(\omega)\right),dt,i\sigma\right)$ до обох частин (15), отримаємо

$$Q\left(C\left(\xi_3(\omega)\right),dt,i\sigma\right)v(t,\sigma,\omega)=Q\left(C\left(\xi_3(\omega)\right),dt,i\sigma\right)v_0(t,\sigma)+$$
$$+\int_0^t Q\left(C\left(\xi_3(\omega)\right),dt,i\sigma\right)H(t-s,\sigma)\times \tag{17}$$
$$\times Q\left(C\left(\xi_3(\omega)\right),\frac{\partial}{\partial s},i\sigma\right)v(s,\sigma,\omega)\,dw(s,\omega).$$

Розглянувши квадрат модуля величини лівої та правої частини рівняння (17) та використавши нерівність $|a+b|^2\le 2\left(|a|^2+|b|^2\right)$, в результаті одержимо

$$\left|Q\left(C\left(\xi_3(\omega)\right),dt,i\sigma\right)v(t,\sigma,\omega)\right|^2\le$$
$$\le 2\left\{\left|Q\left(C\left(\xi_3(\omega)\right),dt,i\sigma\right)v_0(t,\sigma)\right|^2+\right.$$
$$+2\left|\int_0^t Q\left(C\left(\xi_3(\omega)\right),dt,i\sigma\right)H(t-s,\sigma)\times\right. \tag{18}$$
$$\left.\left.\times Q\left(C\left(\xi_3(\omega)\right),\frac{\partial}{\partial s},i\sigma\right)v(s,\sigma,\omega)\,dw(s,\omega)\right|^2\right\}$$

Позначимо через

$$z(t,\sigma)\equiv\mathbb{E}\left\{\left|Q\left(C\left(\xi_3(\omega)\right),dt,i\sigma\right)v(t,\sigma,\omega)\right|^2\right\},$$

де $\mathbb{E}\{\bullet\}$ — операція математичного сподівання [14]. Далі, застосувавши операцію $\mathbb{E}\{\bullet\}$ до лівої та правої частини нерівності (18), враховуючи властивість інтеграла Іто стосовно обчислення $\mathbb{E}\{\bullet\}$ від квадрату інтеграла Іто [7, с. 245–249]

$$\mathbb{E}\left\{\left|\int_0^t f(t,\omega)\,dw(s)\right|^2\right\}=\int_0^t\mathbb{E}\left\{\left|f(s,\omega)\right|^2\right\}ds,$$

та враховуючи умову III) теореми 1, одержимо таку нерівність

$$z(t,\sigma)\le 2\mathbb{E}\left|Q\left(C\left(\xi_3(\omega)\right),dt,i\sigma\right)v_0(t,\sigma)\right|^2+$$
$$+2\int_0^t\mathbb{E}\left|Q\left(C\left(\xi_3(\omega)\right),\frac{\partial}{\partial s},i\sigma\right)H(t-s,\sigma)\right|^2 z(s,\sigma)\,ds. \tag{19}$$

Умова I) теореми 1 дає можливість одержати нерівність [1] $\mathbb{E}\left|Q\Big(C\big(\xi_3(\omega)\big),dt,i\sigma\Big)H(t-s,\sigma)\right|^2 \le L,$ а умова II) визначає рівномірну обмеженість $\mathbb{E}\left|Q\Big(C\big(\xi_3(\omega)\big),dt,i\sigma\Big)v_0(t,\sigma)\right|^2 \le K$.

Отримані вище нерівності дають оцінку $z(t,\sigma) \le K + L\int\limits_0^T z(s,\sigma)\,ds$, звідки, згідно з нерівністю Гронуолла [1], будемо мати експоненціальну оцінок

$$z(t,\sigma) \le Ke^{Lt} \ \ \forall\, t \in [0,T] \subset [0,\infty). \tag{20}$$

Таким чином, гарантується включення

$$Q\Big(C\big(\xi_3(\omega)\big),dt,i\sigma\Big)v(t,\sigma,\omega) \in \mathfrak{M}_T . \tag{21}$$

Залишилось отримати включення (21) для довільної дійсної матриці $D(x) \equiv \{d_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{k,n}$.

Дійсно, застосувавши випадковий оператор $Q\Big(D\big(\xi(\omega)\big),dt,i\sigma\Big)$ до (16), аналогічно вищевикладеним міркуванням, можна записати нерівність

$$\begin{gathered}\mathbb{E}\left\{\left|Q\Big(D\big(\xi(\omega)\big),dt,i\sigma\Big)v(t,\sigma,\omega)\right|^2\right\} \le 2\mathbb{E}\left|Q\Big(D\big(\xi(\omega)\big),dt,i\sigma\Big)v_0(t,\sigma)\right|^2 + \\ +2\int\limits_0^t \mathbb{E}\left|Q\left(D\big(\xi(\omega)\big),\frac{\partial}{\partial t},i\sigma\right)H(t-s,\sigma)\right|^2 z(s,\sigma)\,ds,\end{gathered} \tag{22}$$

де інтеграл, як функція верхньої межі інтегрування за $t \in [0,T]$, існує.

Отже, враховуючи оцінку (20) та умову I), отримаємо твердження теореми 1. ■

§ 3. Асимптотична поведінка в середньому квадратичному сильного розв'язку ЛСДРзЧП. Спочатку доведемо допоміжне твердження.

Лема 2. Нехай для ЛСДРзЧП (8), (9) виконуються умови теореми 1. Тоді: 1) для довільної матриці $C(x) \ne 0_{k\times n}$ має місце включення

$$\mathbb{E}\left|Q\Big(C\big(\xi_3(\omega)\big),dt,i\sigma\Big)\right|^2 H(t,\sigma) \in L_{2,(0,+\infty)}, \tag{23}$$

2) для відповідної норми цього простору справджується рівність

$$\begin{gathered}\mathbb{E}\left\|Q\Big(C\big(\xi_3(\omega)\big),dt,i\sigma\Big)H(t,\sigma)\right\|_{L_{2T}}^2 = \\ = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathbb{E}\left|Q\Big(C\big(\xi_3(\omega)\big),i\lambda,i\sigma\Big)\right|^2}{\left|P(i\lambda,i\sigma)\right|^2}\,d\lambda \equiv S(\sigma).\end{gathered} \tag{24}$$

Доведення. 1) Використовуючи умову I) та формулу (16), можна отримати рівність

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left[Q\Big(C\big(\xi_3(\omega)\big),dt,i\sigma\Big)H(t,\sigma)e^{-i\lambda t}\right]=\frac{1}{2\pi}\frac{Q\Big(C\big(\xi_3(\omega)\big),i\lambda,i\sigma\Big)}{P(i\lambda,i\sigma)} \quad (25)$$

та, взявши $\mathbb{E}\left\{|\bullet|^2\right\}$ від лівої та правої частини (25), отримаємо твердження (23).

Для доведення (24) застосуємо теорему Планшереля [1]:

$$\left\|Q\Big(C\big(\xi_3(\omega)\big),dt,i\sigma\Big)H(t,\sigma)\right\|^2_{L_{2(0,\infty)}}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left|Q\Big(C\big(\xi_3(\omega)\big),i\lambda,i\sigma\Big)\right|^2}{\left|P(i\lambda,i\sigma)\right|^2}d\lambda\equiv S_1(\sigma).$$

Взявши $\mathbb{E}\left\{|\bullet|^2\right\}$ від лівої та правої частини отриманої рівності, отримаємо $S(\sigma)$ у формулі (24). ■

Теорема 2. Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді:

I) якщо $\sup\limits_{\sigma} S(\sigma)<1$, тоді $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbb{E}_U(t)=0$, де

$$U(t,x,\omega)\equiv Q\left(D\big(\xi(\omega)\big),\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x,\omega)$$

для довільної дійснозначної матриці D;

II) якщо $S(\sigma)>1$ на множині Λ міри Лебега, тоді $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbb{E}_U(t)=+\infty$.

Доведення. Спочатку зауважимо, що з нерівності (18), внаслідок прямування до нуля додатного ядра при $t\to+\infty$, випливає прямування до нуля $z(t,\sigma)$ при $S(\sigma)<1,\sigma\neq 0$.

I) Якщо в (24) виконується нерівність $S(\sigma)<1$, тоді легко бачити прямування до нуля при $t\to+\infty$ модуля перетворення Фур'є $U(t,x,\omega)$ при довільній дійснозначній матриці $D(x),\forall x\in\mathbb{R}^1$ [19]. При цьому прямування є рівномірним відносно σ, якщо $\sup\limits_{\sigma} S(\sigma)<1$. Залишилося перейти до границі під знаком інтеграла Лебега і перша частина теореми 2 доведена.

Для доведення другої частини теореми 2 достатньо довести, що $\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}z(t,\sigma)d\sigma=\infty$, оскільки має місце (24).

Дійсно, нехай $S(\sigma)>1$ на Λ додатної міри Лебега, тоді $\lim\limits_{t\to+\infty} z(t,\sigma)=+\infty$, оскільки $z(t,\sigma)>0$. Теорема 2 доведена. ■

§ 4. Задача втрати стійкості стрижня. У праці [12] досліджується поведінка стрижня, на який діє «білий шум». Математичною моделлю цього процесу будемо вважати стохастичне диференціальне рівняння в частинних похідних з похідною від вінерового процесу, а саме

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-a\left(\xi_1(\omega)\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\left(\xi_2(\omega)\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c\left(\xi_3(\omega)\right)\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{dw(t,\omega)}{dt}, \quad (26)$$

з початковими умовами

$$u(0,x)=f_1(x),\ \frac{\partial u(0,x)}{\partial t}=f_2(x) \quad (27)$$

та крайовими умовами

$$u(t,0)=u(t,l)=\frac{\partial u(t,0)}{\partial x}=\frac{\partial u(t,l)}{\partial x}=\frac{\partial^2 u(t,0)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u(t,l)}{\partial x^2}=0. \quad (28)$$

Тут $a\left(\xi_1(\omega)\right)>0, b\left(\xi_2(\omega)\right)>0, c\left(\xi_3(\omega)\right)>0$ з імовірністю 1. Аналогічно до дискретного випадку [3] визначають статистичний запас стійкості S_a^2 за параметром $a(x), \forall x\in\mathbb{R}^1$, як найбільш допустиму інтенсивність процесів з взаємно незалежними значеннями, при якій система стійка в l.i.m., тобто розв'язок стабілізується до нуля.

Тоді можна обчислити статистичний запас стійкості [9, с.12] $S_{k_1k_2}$ системи (26)–(28)

$$S_{k_1k_2}\equiv\sum_{k=0}^{m}a_{k_1k_2}\left(\xi(\omega)\right)\frac{\partial^k u(t,x)}{\partial t^{k_1}\partial x^{k_2}} \quad (29)$$

за параметрами $a_{k_1k_2}\left(\xi_1(\omega)\right)$, $k=k_1+k_2$.

Якщо позначити $P(\lambda,\sigma,\omega)\equiv\sum\limits_{k=0}^{m}a_{k_1k_2}\left(\xi_1(\omega)\right)\lambda^{k_1}(i\sigma)^{k_2}$, тоді статистичний запас стійкості $S_{k_1k_2}(x)$ системи обчислюється за формулою

$$S_{k_1k_2}(x)\equiv\left[\sup_{\sigma}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\lambda|^{k_1}|\sigma|^{k_2}}{\left|P(i\lambda,\sigma,x)\right|}d\lambda\right]^{-1}. \quad (30)$$

Використовуючи вищенаведене твердження (30), знайдено [9] статистичний запас стійкості $S(x)$ за параметрами $a(x), b(x), c(x)$ системи (26)–(28)

$$S(x) \equiv \left[\sup_{\sigma} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma^2 d\lambda}{\left(\sigma^4 + a(x)\sigma^2 - b(x)\lambda^2\right)^2 + c(x)^2 \lambda^2} \right]^{-1} = \tag{31}$$

$$= 2a(x)c(x), \forall x \in \mathbb{R}^1.$$

Таким чином, система (26)–(28) є стійкою в l.i.m., для якого $S(x) > \varepsilon^2, \forall x \in \mathbb{R}^1$.

Нехай на систему (26)–(28) діють зовнішні випадкові «збурення» типу $\xi(\omega)$ на праву частину СДРзЧП (26). Ця ситуація може виникнути, якщо система розташована на платформі, рух якої диктується зовнішними збуреннями $\varphi(\xi(\omega))$. Тоді (26) буде мати вигляд

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi(\xi(\omega))\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{dw(t,\omega)}{dt}. \tag{32}$$

Використовуючи означення статистичного запасу стійкості для системи (31), (27), (28), маємо

$$S(\varphi) \equiv \left[\mathbb{E}\left\{\left|\varphi(\xi)\right|^2\right\} \sup_{\sigma} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma^2 d\lambda}{\left(\sigma^4 + a\sigma^2 - b\lambda^2\right)^2 + c^2\lambda^2} \right]^{-1} = \tag{33}$$

$$= \mathbb{E}\left\{\left|\varphi(\xi)\right|^2\right\} 2ac.$$

Застосовуючи достатні умови асимптотичної стійкості в l.i.m. теореми 2, приходимо до висновку, що система (31), (27), (28) є стійкою в l.i.m., якщо

$$E\left\{\varphi^2(\xi)\right\} 2ac < 1, \tag{34}$$

та нестійкою в l.i.m., якщо в (34) поміняти знак на протилежний.

4.1. Нехай $\xi(\omega)$ має закон розподілу

$$P\{\omega : \xi \equiv 1\} = P\{\omega : \xi = -1\} = \frac{1}{2}$$

та $\varphi(\xi(\omega)) \equiv \xi(\omega)$. Тоді $\mathbb{E}\{\xi\} = 0$, $D\{\xi\} = 1$ й умова (33) збігається з умовою (31).

4.2. Якщо в якості закону розподілу $\xi(\omega)$ вибрати пуассоновий закон $\mathbb{P}\{\omega : \xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ та $\varphi(\xi) = \xi$, тоді $\mathbb{E}\xi = D\xi = \lambda$. Отже, умова стійкості в l.i.m. системи (31), (27), (28) буде мати вигляд $2ac\lambda < 1$, а нестійкості, відповідно, $2ac\lambda > 1$.

Висновки. Запропонована у роботі стохастична модель складних систем, є спробою врахування в повному обсязі випадковостей при дослідженні реальних процесів, що описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних, у правій частині яких враховуються не тільки дифузійні збурення типу броунівського процесу [5; 10; 18], але й випадкові збурення інших типів.

Список використаних джерел:

1. Беллман Р. Дифференциально-разностные уравнения / Р. Беллман, К. Кук. — М. : Мир, 1967. — 548 с.
2. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных / С. Г. Михлин. — М. : Наука, 1997. — 495 с.
3. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. — М. : Наука, 1978. — 521 с.
4. Гулинский А. В., Ширяев А. Н. Теория случайных процессов / А. В. Гулинский, А. Н. Ширяев. — М.: Физматлит, 2005. — 408 с.
5. Гихман И. И. Стохастические дифференциальные уравнения и их применение / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — К. : Наук. думка, 1980. — 612 с.
6. Гихман И. И. Управляемые случайные процессы / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — К. : Наук. думка, 1977. — 251 с.
7. Королюк В. С. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика : в 3-х т. / В. С. Королюк, Є. Ф. Царков, В. К. Ясинський. — Чернівці : Вид-во «Золоті литаври», 2009. — Т. 3. Випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. — 798 с.
8. Царьков Е. Ф. Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения / Е. Ф. Царьков, В. К. Ясинский. — Рига : Ориентир, 1992. — 301 с.
9. Царьков Е. Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений при случайных возмущениях их параметров / Е. Ф. Царьков. — Рига : Зинатне, 2989.– 421 с.
10. Гихман И. И. Стохастические дифференциальные уравнения с частными производными / И. И. Гихман, А. В. Скороход // Сб. научн. тр. — К. : Ин-т математики АН УССР. — 1981. — С. 25–59.
11. Дороговцев А. Я. Асимптотическое поведение решений уравнения теплопроводности с белым шумом в правой части / А. Я. Дороговцев, С. Д. Ивасишен, А. Г. Кукуш // Укр. мат. журн. — 1985. — Вип. 37, № 1. — С. 13–20.
12. Перун Г. М. Исследование задачи Коши для стохастических уравнений в частных производных / Г. М. Перун, В. К. Ясинский // Укр. мат. журн. — 1993. — Т. 45, № 9. — С. 1773–1781.
13. Дынкин Е. Б. Марковские процессы / Е. Б. Дынкин. — М. : Физматгиз, 1969. — 859 с.
14. Королюк В. С. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика : в 3-х т. / В. С. Королюк, Є. Ф. Царков, В. К. Ясинський. — Чернівці : Золоті литаври, 2007. — Т.1. Ймовірність. Теорія та комп'ютерна практика. — 444 с.

15. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1976. — 541 с.
16. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров / Р. З. Хасьминский. — М. : Наука, 1969. — 367 с.
17. Эйдельман С. Д. Параболические системы / С. Д. Эйдельман. — М. : Наука, 1964. — 445 с.
18. Ясинський В. К. Про стійкість розв'язку лінійного автономного стохастичного рівняння з частинними похідними із зовнішними випадковими збуреннями / В. К. Ясинський, Є. В. Ясинський, І. В. Юрченко // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. — Вип. 10. — С. 197–209.

It is proved the existence of the strong solution of the linear diffusion stochastic differential equation with partial derivations in the corresponding space with external random disturbances. It is obtained the sufficient conditions of the asymptotic stability and instability in the mean square of the strong solution of such equation.

Key words: *stochastic equation with partial derivations, stability in the mean square, asymptotic stability.*

Отримано: 27.01.2017