13. Мансимов К. Б. Дискретные системы / К. Б. Мансимов — Баку : Изд-во БГУ, 2013. — 131 с.

In this work the is considered on optimal control problem for discrete two parametric systems the Fornasini-Marchesini type. The first order necessary optimality conditions are obtained.

Key words: *discrete two parametric system, 2-D discrete system, necessary optimality conditions, Lipshis condition, kuasidifferential functional.*

Отримано: 02.06.2017

УДК 517.9

В. В. Мороз, старший викладач

Хмельницький національний університет, Хмельницький

КРАЙОВА ЗАДАЧА З М'ЯКИМИ МЕЖАМИ ДЛЯ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ З ОПЕРАТОРАМИ БЕССЕЛЯ-ЛЕЖАНДРА-ЕЙЛЕРА

Методом гібридного інтегрального перетворення типу Бесселя-Лежандра-Ейлера зі спектральним параметром одержано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку мішаної задачі для рівнянь параболічного типу на трискладовому сегменті з м'якими межами.

Ключові слова: *параболічне рівняння, гібридний диференціальний оператор, функції Коші, впливу та Гріна крайової задачі, гібридне інтегральне перетворення зі спектральним параметром, основна тотожність, головні розв'язки.*

Вступ. У класичній теорії теплопровідності розглядаються крайові задачі, в яких на межі області Γ задається тепловий режим або тепловий потік у напрямку нормалі $\vec{n}$ або теплообмін за законом Ньютона із зовнішнім середовищем через поверхню. В загальному випадку крайові умови мають вигляд [8]

$$\left(h_1 \frac{\partial}{\partial \vec{n}} + h_2 \right) T(M,t) \Big|_{\Gamma} = g(P,t),$$

де точка $P \in \Gamma$, $\vec{n}$ — зовнішня нормаль, і відображать процес поширення тепла, коли межа тіла є жорсткою по відношенню до відбиття теплових хвиль.

Але, якщо припустити, що на межі середовища може відбуватись поглинання хвиль (м'яка межа), то оператор крайової умови міститиме похідну по часу і матиме вигляд

$$\left.\left(h_1 \frac{\partial}{\partial \vec{n}} + h_2 \frac{\partial}{\partial t} + h_3\right) T(M,t)\right|_{\Gamma} = g(P,t)\,,\ P \in \Gamma\,.$$

Крайові умови, що містять похідну по часу, знаходимо в узагальненій теорії теплопровідності [7], яка лежить в основі побудови узагальненої термомеханіки.

У випадку кусково-однорідних середовищ, що мають різні фізико-технічні характеристики або моделюються за різними законами, похідні по часу входитимуть і в умови спряження, а тому диференціальний оператор умови спряження в загальному випадку матиме вигляд: $L_{jk} = \left(\alpha_{jk} + \delta_{jk} \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \beta_{jk} + \gamma_{jk} \frac{\partial}{\partial t}$, $k = 1, 2$, j — номер точки спряження.

У цій статті розглядається мішана крайова задача для еволюційних рівнянь параболічного типу з операторами Бесселя-Лежандра-Ейлера на кусково-однорідному сегменті полярної осі з двома точками спряження та м'якими межами.

Основна частина. Розглянемо диференціальний оператор Бесселя $B_{\nu,\alpha_1} = \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha_1 + 1) r^{-1} \frac{d}{dr} - (\nu^2 - \alpha_1^2) r^{-2}$ [4], Ейлера $B^*_{\alpha_2} = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha_2 + 1) r \frac{d}{dr} + \alpha_2^2$ [3] та Лежандра $\Lambda_{(\mu)} = \frac{d^2}{dr^2} + \operatorname{cth} r \frac{d}{dr} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1^2}{1 - \operatorname{ch} r} + \frac{\mu_2^2}{1 + \operatorname{ch} r}\right)$ [1]. Нехай $\theta(x)$ — одинична функція Гевісайда [10]. Утворимо гібридний диференціальний оператор (ГДО)

$$\begin{gathered} M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)} = \theta(r)\,\theta(R_1 - r)\, a_1^2 B_{\nu,\alpha_1} + \\ + \theta(r - R_1)\,\theta(R_2 - r)\, a_2^2 \Lambda_{(\mu)} + \theta(r - R_2)\,\theta(R_3 - r)\, a_3^2 B^*_{\alpha_2}\,, \end{gathered} \tag{1}$$

де $a_j > 0$, ($j = \overline{1,3}$), $2\alpha_i + 1 > 0$, ($i = 1, 2$) $\nu \geq \alpha_1$, $(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2)$, $(\mu) = (\mu_1, \mu_2)$, $\mu_1 \geq \mu_2 \geq 0$.

Означення. Областю визначення ГДО $M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}$ назвемо множину G функцій $g(r) = \theta(r)\theta(R_1 - r)\, g_1(r) + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r) g_2(r) + \theta(r - R_2) \times \theta(R_3 - r)\, g_3(r)$ з такими властивостями:

1) функція $f(r) = M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}[g(r)]$ неперервна на множині

$$I_2 = \{r : r \in (0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3);\ R_3 < \infty\};$$

2) функції $g_j(r)$ ($j, k = 1, 2$) задовольняють умови спряження

$$\left[\left(\tilde{\alpha}_{j1}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j1}^k\right) g_k(r) - \left(\tilde{\alpha}_{j2}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j2}^k\right) g_{k+1}(r)\right]\Bigg|_{r=R_k} = 0; \qquad (2)$$

3) функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$\lim_{r \to 0}\left[r^{\gamma} g_1(r)\right] = 0, \quad \left(\tilde{\alpha}_{22}^3 \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{22}^3\right) g_3(r)\Bigg|_{r=R_3} = 0. \qquad (3)$$

У рівностях (2), (3) беруть участь коефіцієнти:

$$\tilde{\alpha}_{jm}^k = \alpha_{jm}^k - (\beta^2 + \gamma^2)\, \delta_{jm}^k, \quad \tilde{\beta}_{jm}^k = \beta_{jm}^k - (\beta^2 + \gamma^2)\, \gamma_{jm}^k;$$

$\gamma^2 \geq 0$, β — спектральний параметр.

Припустимо, що виконані умови на коефіцієнти: $\alpha_{jm}^k \geq 0$,

$$\beta_{jm}^k \geq 0, \ \delta_{jm}^k \geq 0, \ \gamma_{jm}^k \geq 0; \ c_{j1,k} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k;$$

$$c_{11,k} \cdot c_{21,k} > 0, \ c_{j2,k} = \delta_{2j}^k \gamma_{1j}^k - \delta_{1j}^k \gamma_{2j}^k = 0,$$

$$\alpha_{1j}^k \gamma_{2j}^k - \alpha_{2j}^k \gamma_{1j}^k = \beta_{1j}^k \delta_{2j}^k - \beta_{2j}^k \delta_{1j}^k; \ j, m, k = 1, 2;$$

$$\tilde{\alpha}_{22}^3 = \alpha_{22}^3 - \delta_{22}^3 (\beta^2 + \gamma^2), \ \tilde{\beta}_{22}^3 = \beta_{22}^3 - \gamma_{22}^3 (\beta^2 + \gamma^2);$$

$$|\alpha_{22}^3| + |\beta_{22}^3| \neq 0; \ |\delta_{22}^3| + |\gamma_{22}^3| \neq 0.$$

Зауваження 1. Для $u(r) \in G$ та $v(r) \in G$ з умов спряження (2) випливає базова тотожність

$$u_k'(R_k) v_k(R_k) - u_k(R_k) v_k'(R_k) = \\ = \frac{c_{21,k}}{c_{11,k}} \left[u_{k+1}'(R_k) v_{k+1}(R_k) - u_{k+1}(R_k) v_{k+1}'(R_k)\right]. \qquad (4)$$

Визначимо величини

$$a_1^2 \sigma_1 = \frac{c_{11,1}\, c_{11,2} \operatorname{sh} R_1}{c_{21,1}\, c_{21,2} \operatorname{sh} R_2} \frac{R_2^{2\alpha_2+1}}{R_1^{2\alpha_1+1}}, \ a_2^2 \sigma_2 = \frac{c_{11,2}\, R_2^{2\alpha_2+1}}{c_{21,2} \operatorname{sh} R_2}, \ a_3^2 \sigma_3 = 1,$$

вагову функцію

$$\sigma(r) = \theta(r)\, \theta(R_1 - r)\, \sigma_1\, r^{2\alpha_1+1} + \theta(r - R_1)\, \theta(R_2 - r)\, \sigma_2 \operatorname{sh} r + \\ + \theta(r - R_2)\, \theta(R_3 - r)\, \sigma_3\, r^{2\alpha_2+1} \qquad (5)$$

та скалярний добуток

$$\big(u(r),v(r)\big)=\int_0^{R_1}u_1(r)\,v_1(r)\,\sigma_1\,r^{2\alpha_1+1}dr+\int_{R_1}^{R_2}u_2(r)\,v_2(r)\,\sigma_2\,\operatorname{sh}r\,dr+$$
$$+\int_{R_2}^{R_3}u_3(r)\,v_3(r)\,\sigma_3\,r^{2\alpha_2-1}\,dr\equiv\int_0^{R_3}u(r)\,v(r)\,\sigma(r)\,dr. \tag{6}$$

Лема 1. ГДО $M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}$ самоспряжений.

Доведення. Згідно правила (6) скалярний добуток

$$\left(M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}[u],v\right)=\int_0^{R_1}a_1^2B_{\nu,\alpha_1}[u_1]\cdot v_1(r)\,\sigma_1\,r^{2\alpha_1+1}\,dr+$$
$$+\int_{R_1}^{R_2}a_2^2\Lambda_\mu[u_2]\cdot v_2(r)\,\sigma_2\,\operatorname{sh}r\,dr+\int_{R_2}^{R_3}a_3^2B^*_{\alpha_2}[u_3]\cdot v_3(r)\,\sigma_3\,r^{2\alpha_2-1}\,dr. \tag{7}$$

Проінтегруємо під знаками інтегралів два рази частинами:

$$\left(M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}[u],v\right)=\Big[\sigma_1r^{2\alpha_1+1}a_1^2\left(u_1'(r)\,v_1(r)-u_1(r)\,v_1'(r)\right)\Big]\Big|_0^{R_1}+$$
$$+\int_0^{R_1}u_1(r)\,(a_1^2B_{\nu,\alpha_1}[v_1(r)])\,\sigma_1r^{2\alpha_1+1}\,dr+\Big[\,a_2^2\,\sigma_2\,\operatorname{sh}r\,(u_2'(r)\,v_2(r)-$$
$$+u_2(r)v_2'(r))\Big]\Big|_{R_1}^{R_2}+\int_{R_1}^{R_2}u_2(r)\,(a_2^2\Lambda_\mu[u_2(r)])\,\sigma_2\,\operatorname{sh}r\,dr+ \tag{8}$$
$$+\Big[\,\sigma_3\,r^{2\alpha_2+1}a_3^2\left(u_3'(r)v_3(r)-u_3(r)v_3'(r)\right)\Big]\Big|_{R_2}^{R_3}+$$
$$+\int_{R_2}^{R_3}u_3(r)\,(a_3^2B^*_{\alpha_2}[v_3(r)])\,\sigma_3\,r^{2\alpha_2-1}\,dr\,.$$

Внаслідок базової тотожності (4) в точці $r=R_1$ маємо:

$$\sigma_1R_1^{2\alpha_1+1}(u_1'(R_1)v_1(R_1)-u_1(R_1)v_1'(R_1))-\sigma_2\operatorname{sh}R_1(u_2'(R_1)v_2(R_1)-$$
$$-u_2(R_1)v_2'(R_1)\big)=\left(\sigma_1R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21,1}}{c_{11,1}}-\sigma_2\operatorname{sh}R_1\right)\times \tag{9}$$
$$\times\big(u_2'(R_1)v_2(R_1)-u_2(R_1)v_2'(R_1)\big)=0$$

тому що в силу вибору σ_1, σ_2 вираз

$$\left(a_1^2\sigma_1R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21,1}}{c_{11,1}}-a_2^2\,\sigma_2\operatorname{sh}R_1\right)=\frac{c_{11,1}\,c_{11,2}}{c_{21,1}\,c_{21,2}}\cdot\frac{\operatorname{sh}R_1}{\operatorname{sh}R_2}R_2^{2\alpha_2+1}\cdot\frac{c_{21,1}}{c_{11,1}}-$$

$$-\frac{c_{11,1}}{c_{21,2}}\frac{\operatorname{sh}R_1}{\operatorname{sh}R_2}R_2^{2\alpha_2+1}=\frac{c_{11,1}}{c_{21,2}}\frac{\operatorname{sh}R_1}{\operatorname{sh}R_2}R_2^{2\alpha_2+1}(1-1)\equiv 0\,.$$

Внаслідок базової тотожності (4) в точці $r=R_2$ маємо:

$$a_2^2\sigma_2\operatorname{sh}R_2\left(u_2'(R_2)v_2(R_2)-u_2(R_2)v_2'(R_2)\right)-$$
$$-\sigma_3a_3^2R_2^{2\alpha_2+1}\left(u_3'(R_2)v_3(R_2)-u_3(R_2)v_3'(R_2)\right)=$$
$$=\left(a_2^2\sigma_2\operatorname{sh}R_2\,\frac{c_{21,2}}{c_{11,2}}-\sigma_3a_3^2R_2^{2\alpha_2+1}\right)\left(u_3'(R_2)v_3(R_2)-u_3(R_2)v_3'(R_2)\right)= \tag{10}$$
$$=\left(\frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}R_2^{2\alpha_2+1}\frac{c_{21,2}}{c_{11,2}}-R_2^{2\alpha_2+1}\right)\left(u_3'(R_2)v_3(R_2)-u_3(R_2)v_3'(R_2)\right)=$$
$$=R_2^{2\alpha_2+1}(1-1)\left(u_3'(R_2)v_3(R_2)-u_3(R_2)v_3'(R_2)\right)\equiv 0\,.$$

При $\tilde{\alpha}_{22}^3\neq 0$ знаходимо, що

$$\sigma_3a_3^2R_2^{2\alpha_2+1}\left(u_3'(R_2)v_3(R_2)-u_3(R_2)v_3'(R_2)\right)=\sigma_3a_3^2R_2^{2\alpha_2+1}\left(\tilde{\alpha}_{22}^3\right)^{-1}\times$$
$$\times\left\{\left[\tilde{\alpha}_{22}^3\frac{du_3}{dr}+\tilde{\beta}_{22}^3u_3(r)\right]\Bigg|_{r=R_3}v_3(R_3)-\right. \tag{11}$$
$$\left.-\left[\tilde{\alpha}_{22}^3\frac{dv_3}{dr}+\tilde{\beta}_{22}^3v_3(r)\right]\Bigg|_{r=R_3}u_3(R_3)\right\}\equiv 0\,.$$

В силу умови обмеження в точці $r=0$ позаінтегральний член в точці $r=0$ перетворюється в нуль.

Внаслідок (9), (10), (11) рівність (8) набуває вигляду:

$$\left(M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[u(r)],v(r)\right)=\left(u(r),M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[v(r)]\right). \tag{12}$$

Рівність (12) означає, що ГДО $M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$ самоспряжений оператор. **Лему доведено.**

Оскільки ГДО $M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$ самоспряжений і не має на множині I_2 ні одної особливої точки, то його спектр дійсний і дискретний [6].

Власні елементи ГДО $M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$ (власні числа та відповідні їм власні функції) знайдемо в результаті розв'язання відповідної задачі Штурма–Ліувілля:

- побудувати на множині I_2 розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\left(B_{\nu_1,\alpha_1} + b_1^2\right) V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta) = 0\,,\; r \in (0, R_1)\,,$$
$$\left(\Lambda_{(\mu)} + b_2^2\right) V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta) = 0\,,\; r \in (R_1, R_2)\,, \tag{13}$$
$$\left(B_{\alpha_2}^{*} + b_3^2\right) V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta) = 0\,,\; r \in (R_2, R_3)\,;$$

- з крайовими умовами (3) та умовами спряження (2).

Тут $b_j = a_j^{-1}(\beta^2 + k_j^2)^{1/2}$, $k_j^2 \ge 0$, $j = \overline{1,3}$; $V_{\nu,(\alpha);j}^{(\mu)}(r,\beta)$ — компоненти спектральної функції

$$V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta) = \theta(r)\theta(R_1 - r)V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta) + \\ +\sum_{k=1}^{2}\theta(r-R_k)\theta(R_{k+1}-r)V_{\nu,(\alpha);k+1}^{(\mu)}(r,\beta). \tag{14}$$

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $\left(B_{\nu_1,\alpha_1} + b_1^2\right)v = 0$ складають функції $J_{\nu,\alpha_1}(b_1 r)$ та $N_{\nu,\alpha_1}(b_1 r)$ [4]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $\left(\Lambda_{(\mu)} + b_2^2\right)v = 0$ складають функції $v_1 = A_{\nu_2^*}^{(\mu)}(\operatorname{ch} r)$ та $v_2 = B_{\nu_2^*}^{(\mu)}(\operatorname{ch} r)$, $\nu_2^* = -1/2 + i\,b_2$ [1]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $\left(B_{\alpha_2}^{*} + b_3^2\right)v = 0$ складають функції $v_{\alpha_2;1}(r,b_3) = r^{-\alpha_2}\cos(b_3 \ln r)$ та $v_{\alpha_2;2}(r,b_3) = r^{-\alpha_2}\sin(b_3 \ln r)$ [3]. Якщо в силу лінійності задачі покласти

$$V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta) = A_1 J_{\nu,\alpha_1}(b_1 r)\,,\; r \in (0, R_1)\,, \tag{15}$$
$$V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta) = A_2\, A_{\nu_2^*}^{(\mu)}(\operatorname{ch} r) + B_2\, B_{\nu_2^*}^{(\mu)}(\operatorname{ch} r)\,,\; r \in (R_1, R_2)\,,$$
$$V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta) = A_3\, v_{\alpha_2,1}(r,b_3) + B_3\, v_{\alpha_2,2}(r,b_3)\,,\; r \in (R_2, R_3)\,,$$

то умови спряження (2) й крайова умова в точці $r = R_3$ дають однорідну алгебраїчну систему з п'яти рівнянь для визначення п'яти невідомих величин A_j ($j = \overline{1,3}$) та B_2, B_3:

$$u_{\nu,\alpha_1;j1}^{11}(b_1 R_1)A_1 - Y_{\nu_2^*;j2}^{(\mu),11}(\operatorname{ch} R_1)A_2 - Y_{\nu_2^*;j2}^{(\mu),12}(\operatorname{ch} R_1)B_2 = 0\,,\; j = 1,2\,;$$
$$Y_{\nu_2^*;j1}^{(\mu),21}(\operatorname{ch} R_2)A_2 + Y_{\nu_2^*;j1}^{(\mu),22}(\operatorname{ch} R_2)B_2 - \\ -Y_{\alpha_2;j2}^{21}(b_3,R_2)A_3 - Y_{\alpha_2;j2}^{22}(b_3,R_2)B_3 = 0, \tag{16}$$
$$Y_{\alpha_2;22}^{31}(b_3,R_3)A_3 - Y_{\alpha_2;22}^{32}(b_3,R_3)B_3 = 0\,.$$

У системі (16) беруть участь функції

$$u^{11}_{\nu,\alpha_1;j1}(b_1R_1)=\left(\tilde{\alpha}^1_{j1}\frac{\nu-\alpha_1}{R_1}+\tilde{\beta}^1_{j1}\right)J_{\nu,\alpha_1}(b_1R_1)-\tilde{\alpha}^1_{j1}R_1b_1^2J_{\nu+1,\alpha_1+1}(b_1R_1),$$

$$Y^{(\mu),m1}_{\nu_2^*;j1}(\operatorname{ch}R_m)=\left(\tilde{\alpha}^m_{jk}d/dr+\tilde{\beta}^m_{jk}\right)A^{(\mu)}_{\nu_2^*}(\operatorname{ch}r)\Big|_{r=R_m},$$

$$Y^{(\mu),m2}_{\nu_2^*;j1}(\operatorname{ch}R_m)=\left(\tilde{\alpha}^m_{jk}d/dr+\tilde{\beta}^m_{jk}\right)B^{(\mu)}_{\nu_2^*}(\operatorname{ch}r)\Big|_{r=R_m},$$

$$Y^{m1}_{\alpha_2;jk}(b_3,R_m)=\left[\left(\tilde{\beta}^m_{jk}-\tilde{\alpha}^m_{jk}R_m^{-1}\alpha_2\right)\cos(b_3\ln R_m)-b_3R_m^{-1}\tilde{\alpha}^m_{jk}\sin(b_3\ln R_m)\right]R_m^{-\alpha_2},$$

$$Y^{m2}_{\alpha_2;jk}(b_3,R_m)=\left[\left(\tilde{\beta}^m_{jk}-\tilde{\alpha}^m_{jk}R_m^{-1}\alpha_2\right)\sin(b_3\ln R_m)-b_3R_m^{-1}\tilde{\alpha}^m_{jk}\cos(b_3\ln R_m)\right]R_m^{-\alpha_2}$$

Для того, щоб алгебраїчна система (16) мала ненульові розв'язки, необхідно й досить, щоб її визначник був рівний нулю [2]:

$$\delta^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}(\beta)\equiv\delta_{\alpha_2;22}(b_3,R_2,R_3)\,a^{(\mu)}_{\nu,\alpha_1;1}(\beta)-\delta_{\alpha_2;12}(b_3,R_2,R_3)\,a^{(\mu)}_{\nu,\alpha_1;2}(\beta)=0. \quad (17)$$

У рівності (17) прийняті позначення:

$$\delta^{(\mu)}_{\nu_2^*;jk}(\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}R_2)=Y^{(\mu),11}_{\nu_2^*;j2}(\operatorname{ch}R_1)\,Y^{(\mu),22}_{\nu_2^*;k1}(\operatorname{ch}R_2)-Y^{(\mu),12}_{\nu_2^*;j2}(\operatorname{ch}R_1)\,Y^{(\mu),21}_{\nu_2^*;k1}(\operatorname{ch}R_2),$$

$$a^{(\mu)}_{\nu,\alpha_1;j}(\beta)=u^{11}_{\nu,\alpha_1;11}(b_1R_1)\,\delta^{(\mu)}_{\nu_2^*;2j}(\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}R_2)-$$

$$-u^{11}_{\nu,\alpha_1;21}(b_1R_1)\,\delta^{(\mu)}_{\nu_2^*;1j}(\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}R_2),\ \ j=1,2;$$

$$\delta_{\alpha_2;j2}(b_3,R_2,R_3)=Y^{21}_{\alpha_2;j2}(b_3,R_2)\,Y^{32}_{\alpha_2;22}(b_3,R_3)-Y^{22}_{\alpha_2;j2}(b_3,R_2)\,Y^{31}_{\alpha_2;22}(b_3,R_3).$$

Алгебраїчне рівняння (17) — трансцендентне рівняння для обчислення власних чисел β_n ГДО $M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}$ (β_n – корінь рівняння (17)).

Підставимо в систему (16) $\beta=\beta_n$ $(b_j(\beta_n)\equiv b_{jn})$ й відкинемо останнє рівняння в силу лінійної залежності. При довільному $A_1\neq 0$ для визначення A_2, B_2 маємо алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$Y^{(\mu),11}_{\nu_{2n}^*;j2}(\operatorname{ch}R_1)A_2+Y^{(\mu),12}_{\nu_{2n}^*;j2}(\operatorname{ch}R_1)B_2=u^{11}_{\nu,\alpha_1;j1}(b_{1n}R_1)A_1, \quad (18)$$

$$j=1,2;\ \nu^*_{2n}=-1/2+i\,b_{2n}.$$

Визначник алгебраїчної системи (18)

$$q_{(\mu)}(\beta_n)\equiv Y^{(\mu),11}_{\nu_{2n}^*,12}(\operatorname{ch}R_1)\,Y^{(\mu),12}_{\nu_{2n}^*,22}(\operatorname{ch}R_1)-$$

$$-Y^{(\mu),11}_{\nu_{2n}^*,22}(\operatorname{ch}R_1)\,Y^{(\mu),12}_{\nu_{2n}^*,12}(\operatorname{ch}R_1)=\frac{c_{21,1}}{S_{(\mu)}(b_{2n})\operatorname{sh}R_1}\neq 0,$$

$$S_{(\mu)}(b_{2n})=\frac{2^{\mu_1}\pi^3\cos(\mu_1\pi)[\cos\mu_2\pi+\cos\mu_1\pi\operatorname{ch}(2\pi b_{2n})]^{-1}}{2^{\mu_2}\,|\,\Gamma(1/2+ib_{2n}+\nu^+_{12})\,|^2\,|\,\Gamma(1/2+ib_{2n}+\nu^-_{12})\,|^2},$$

$$\nu_{12}^{\pm} = 1/2(\mu_1 \pm \mu_2).$$

Алгебраїчна система (18) має єдиний розв’язок [2]:

$$A_2 = \frac{A_1}{q_{(\mu)}(\beta_n)}\Big[u_{\nu,\alpha_1;11}^{11}(b_{1n}R_1)\,Y_{\nu_{2n}^*;22}^{(\mu),12}(\operatorname{ch}R_1) - u_{\nu,\alpha_1;21}^{11}(b_{1n}R_1)\,Y_{\nu_{2n}^*;12}^{(\mu),12}(\operatorname{ch}R_1)\Big], \quad (19)$$

$$B_2 = \frac{A_1}{q_{(\mu)}(\beta_n)}\Big[u_{\nu,\alpha_1;21}^{11}(b_{1n}R_1)Y_{\nu_{2n}^*;12}^{(\mu),11}(\operatorname{ch}R_1) - u_{\nu,\alpha_1;11}^{11}(b_{1n}R_1)Y_{\nu_{2n}^*;22}^{(\mu),11}(\operatorname{ch}R_1)\Big].$$

При визначених A_2, B_2 розглянемо алгебраїчну систему відносно величин A_3, B_3:

$$Y_{\alpha_2;j2}^{21}(b_{3n},R_2)A_3 + Y_{\alpha_2;j2}^{22}(b_{3n},R_2)B_3 = -A_1[q_{(\mu)}(\beta_n)]^{-1}a_{\nu,\alpha_1;j}^{(\mu)}(\beta_n);\ j=1,2 \quad (20)$$

Визначник алгебраїчної системи (20)

$$q_{\alpha_2}(\beta_n) \equiv Y_{\alpha_2;12}^{21}(b_{3n},R_2)Y_{\alpha_2;22}^{22}(b_{3n},R_2) -$$

$$-Y_{\alpha_2;22}^{21}(b_{3n},R_2)Y_{\alpha_2;12}^{22}(b_{3n},R_2) = c_{21,2}b_{3n}R_2^{-(2\alpha_2+1)} \neq 0.$$

Алгебраїчна система (20) має єдиний розв’язок [2]:

$$A_1 = q_{(\mu)}(\beta_n)q_{\alpha_2}(\beta_n),\ A_3 = \omega_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(\beta_n),\ B_3 = -\omega_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(\beta_n);$$

$$\omega_{\nu,(\alpha);j}^{(\mu)}(\beta_n) = a_{\nu,\alpha_1;2}^{(\mu)}(\beta_n)Y_{\alpha_2;12}^{2j}(b_{3n},R_2) - \quad (21)$$

$$-a_{\nu,\alpha_1;1}^{(\mu)}(\beta_n)Y_{\alpha_2;22}^{2j}(b_{3n},R_2),\ j=1,2.$$

Підставимо в рівності (15) визначені формулами (19) та (21) величини A_j й B_k. Одержимо шукані функції:

$$V_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta_n) = q_{(\mu)}(\beta_n)q_{\alpha_2}(\beta_n)J_{\nu,\alpha_1}(b_{1n}r),$$

$$V_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta_n) = q_{\alpha_2}(\beta_n)\Big[u_{\nu,\alpha_1;21}^{11}(b_{1n}R_1)\,f_{\nu_{2n}^*;12}^{(\mu),1}(\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}r) -$$

$$-u_{\nu,\alpha_1;11}^{11}(b_{1n}R_1)f_{\nu_{2n}^*;22}^{(\mu),1}(\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}r)\Big], \quad (22)$$

$$f_{\nu_{2n}^*;j2}^{(\mu),1}(\operatorname{ch}R_1,\operatorname{ch}r) = Y_{\nu_{2n}^*;j2}^{(\mu),11}(\operatorname{ch}R_1)B_{\nu_{2n}^*}^{(\mu)}(\operatorname{ch}r) - Y_{\nu_{2n}^*;j2}^{(\mu),12}(\operatorname{ch}R_1)A_{\nu_{2n}^*}^{(\mu)}(\operatorname{ch}r);$$

$$V_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta_n) = \omega_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(\beta_n)r^{-\alpha_2}\cos(b_{3n}\ln r) - \omega_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(\beta_n)r^{-\alpha_2}\sin(b_{3n}\ln r).$$

Згідно рівності (14) спектральна функція $V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n)$ визначена.

Відомо [5], що система $\left\{V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n)\right\}_{n=1}^{\infty}$ власних функцій узагальнено ортогональна з ваговою функцією $\sigma(r)$. Квадрат норми власної функції обчислюється за формулою [5]:

$$\|V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n)\|_1^2 = \int_0^{R_3}[V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n)]^2\sigma(r)\,dr + \theta_2(\beta_n,\beta_n). \quad (23)$$

Наявність вагової функції $\sigma(r)$, спектральної функції $V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n)$ та її квадрату норми $\| V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n) \|_1^2$ дає можливість визначити пряме $H_{\nu,(\alpha);n}^{(\mu)}$ й обернене $H_{\nu,(\alpha);n}^{-(\mu)}$ скінченне гібридне інтегральне перетворення, породжене на множині I_2 ГДО $M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$:

$$H_{\nu,(\alpha);n}^{(\mu)}[g(r)] = \int_0^{R_3} g(r)\, V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n)\, \sigma(r)\, dr \equiv \tilde{g}_n , \tag{24}$$

$$H_{\nu,(\alpha);n}^{-(\mu)}[\tilde{g}_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n \frac{V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n)}{\| V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n) \|_1^2} \equiv g(r) . \tag{25}$$

Математичним обґрунтуванням правил (24), (25) є твердження.

Теорема 1. Корені β_n трансцендентного рівняння $\delta_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(\beta) = 0$ складають дискретний спектр ГДО $M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$: дійсні, різні (за винятком, можливо, нуля), симетричні відносно точки $\beta = 0$ й на піввісі $\beta > 0$ утворюють монотонно зростаючу числову послідовність з єдиною граничною точкою $\beta = \infty$.

Теорема 2. Система $\left\{ V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n) \right\}_{n=1}^{\infty}$ власних функції ГДО $M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$ узагальнено ортогональна, повна й замкнена.

Теорема 3. Будь-яка функція $g(r) \in G$ зображається абсолютно й рівномірно збіжним на множині I_2 рядом Фур'є за системою $\left\{ V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n) \right\}_{n=1}^{\infty}$:

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{R_3} g(\rho) V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(\rho,\beta_n)\, \sigma(\rho)\, d\rho \right) \frac{V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n)}{\| V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n) \|_1^2} . \tag{26}$$

Якщо перейти до ортонормованої системи власних вектор-функцій

$$\left\{ v_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n) \right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n) \left(\| V_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n) \|_1^2 \right)^{-1} \right\}_{n=1}^{\infty} ,$$

то ряд Фур'є (26) набуде простішого вигляду:

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{R_3} g(\rho)\, v_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(\rho,\beta_n)\, \sigma(\rho)\, d\rho\; v_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n) . \tag{27}$$

При цьому запис формул (24), (25) також стає простішим:

$$H_{\nu,(\alpha);n}^{(\mu)}[g(r)] = \int_0^{R_3} g(r)\, v_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n)\, \sigma(r)\, dr \equiv \tilde{g}_n\,, \tag{28}$$

$$H_{\nu,(\alpha);n}^{-(\mu)}[\tilde{g}_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n\; v_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}(r,\beta_n) \equiv g(r)\,. \tag{29}$$

Застосування формул (28), (29) до розв'язання відповідних крайових задач базується на основній тотожності інтегрального перетворення ГДО $M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$.

Визначимо величини та функції:

$$d_1 = \frac{a_1^2 \sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}}{c_{11,1}}\,;\; d_2 = \frac{a_2^2 \sigma_2 \,\mathrm{sh}\, R_2}{c_{11,2}}\,;$$

$$\tilde{g}_{1n} = \int_0^{R_1} g_1(r)\, v_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta_n)\, \sigma_1\, r^{2\alpha_1+1} dr\,;$$

$$\tilde{g}_{2n} = \int_{R_1}^{R_2} g_2(r)\, v_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta_n)\, \sigma_2\, \mathrm{sh}\, r\, dr\,;$$

$$\tilde{g}_{3n} = \int_{R_2}^{R_3} g_3(r)\, v_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta_n)\, \sigma_3\, r^{2\alpha_2-1}\, dr\,;$$

$$Z_{\nu,(\alpha);i2}^{(\mu),k}(\beta_n) = (\tilde{\alpha}_{i2}^k d/dr + \tilde{\beta}_{i2}^k)\, v_{\nu,(\alpha);k+1}^{(\mu)}(r,\beta_n)\Big|_{r=R_k}\,;\; i,k = 1,2\,.$$

Теорема 4. Якщо функція $f(r) = M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[g(r)]$ неперервна на множині I_2, а функції $g_i(r)$ задовольняють крайові умови

$$\lim_{r\to 0}\left\{ r^{2\alpha_1+1}\left[g_1'(r)\, v_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta_n) - g_1(r)\, v_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}\,(r,\beta_n)\right]\right\} = 0\,, \tag{30}$$

$$\left[(\tilde{\alpha}_{22}^3 \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{22}^3)\, v_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta_n)\right]\Bigg|_{r=R_3} = g_R \tag{31}$$

та умови спряження ($j,k = 1,2$)

$$\left[\left(\tilde{\alpha}_{j1}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j1}^k \right) g_k(r) - \left(\tilde{\alpha}_{j2}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j2}^k \right) g_{k+1}(r)\right]\Bigg|_{r=R_k} = \omega_{jk}\,, \tag{32}$$

то має місце основна тотожність інтегрального перетворення ГДО $M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}$:

$$\begin{aligned} H_{\nu,(\alpha);n}^{(\mu)}\left[\, M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[g(r)]\right] &= -\beta_n^2\, \tilde{g}_n - \sum_{i=2}^{3} k_i^2 \tilde{g}_{in} + \left(\tilde{\alpha}_{22}^3\right)^{-1} v_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(R_3,\beta_n)\times \\ &\times a_3^2 \sigma_3 R_3^{2\alpha_2+1} g_R + \sum_{k=1}^{2} d_k \left[Z_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu),k}(\beta_n)\, \omega_{2k} - Z_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu),k}(\beta_n)\, \omega_{1k}\right]. \end{aligned} \tag{33}$$

Доведення. Згідно формули (28) маємо:

$$H_{\nu,(\alpha);n}^{(\mu)}\left[\, M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[g(r)]\right] = \int_0^{R_3} M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[g(r)]\cdot v_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta_n)\,\sigma(r)\,dr \equiv$$

$$\equiv \int_0^{R_1} a_1^2 B_{\nu,\alpha_1}[g_1(r)]\, v_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta_n)\,\sigma_1\, r^{2\alpha_1+1}dr + \int_{R_1}^{R_2} a_2^2 \Lambda_{(\mu)}[g_2(r)]\times \quad (34)$$

$$\times v_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta_n)\,\sigma_2\,\mathrm{sh}\, r\,dr + \int_{R_2}^{R_3} a_3^2 B_{\alpha_2}^{*}[g_3(r)]\, v_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta_n)\,\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}\,dr\,.$$

Проінтегруємо рівності (34) під знаками інтегралів два рази частинами:

$$H_{\nu,(\alpha);n}^{(\mu)}\left[\, M_{\nu,(\alpha)}^{(\mu)}[g(r)]\right] =$$

$$=\left[a_1^2\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}\left(g_1'(r)\, v_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta_n) - g_1(r)\, v_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)\prime}(r,\beta_n)\right)\right]\Bigg|_0^{R_1} +$$

$$+\int_0^{R_1} g_1(r)\left(a_1^2 B_{\nu,\alpha_1}[v_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r,\beta_n)]\right)\sigma_1\, r^{2\alpha_1+1}\,dr +$$

$$+\left[a_2^2\sigma_2\,\mathrm{sh}\, r\left(g_2'(r)\, v_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta_n) - g_2(r)\, v_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)\prime}(r,\beta_n)\right)\right]\Bigg|_{R_1}^{R_2} + \quad (35)$$

$$+\int_{R_1}^{R_2} g_2(r)\left(a_2^2 \Lambda_{(\mu)}[v_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r,\beta_n)]\right)\sigma_2\,\mathrm{sh}\, r\,dr +$$

$$+\left[a_3^2\sigma_3 r^{2\alpha_2+1}\left(g_3'(r)\, v_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta_n) - g_3(r)\, v_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)\prime}(r,\beta_n)\right)\right]\Bigg|_{R_2}^{R_3} +$$

$$+\int_{R_1}^{R_2} g_3(r)\left(a_3^2\, B_{\alpha_1}^{*}[v_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r,\beta_n)]\right)\sigma_3\, r^{2\alpha_2-1}\,dr\,.$$

В силу умови обмеження (30) позаінтегральний член в точці $r=0$ рівний нулю.

При $\tilde{\alpha}_{22}^{3} \neq 0$ маємо:

$$\left[g_3'(R_3)\, v_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(R_3,\beta_n) - g_3(R_3)\, v_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)\prime}(R_3,\beta_n)\right] R_3^{2\alpha_2+1} =$$

$$=(\tilde{\alpha}_{22}^{3})^{-1} R_3^{2\alpha_2+1}\left[(\tilde{\alpha}_{22}^{3} g_3'(R_3) + \tilde{\beta}_{22}^{3} g_3(R_3))\, v_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(R_3,\beta_n) -\right.$$

$$\left. - g_3(R_3)\left(\tilde{\alpha}_{22}^{3} v_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)\prime}(R_3,\beta_n) + \tilde{\beta}_{22}^{3} v_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(R_3,\beta_n)\right)\right] = \quad (36)$$

$$= (\tilde{\alpha}_{22}^{3})^{-1} R_3^{2\alpha_2+1} \, v_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(R_3,\beta_n)\, g_R - g_3(R_3)\left(\tilde{\alpha}_{22}^{3}\right)^{-1} R_3^{2\alpha_2+1}\cdot 0 =$$

$$= (\tilde{\alpha}_{22}^{3})^{-1} R_3^{2\alpha_2+1} \, v_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(R_3,\beta_n)\, g_R \, ; \; a_3^2\sigma_3 = 1 \, .$$

Для випадку, коли умови спряження неоднорідні, базова тотожність (4) має структуру:

$$u_k'(R_k)\, v_k(R_k) - u_k(R_k)\, v_k'(R_k) =$$

$$= \frac{c_{21,k}}{c_{11,k}}\left[u_{k+1}'(R_k)\, v_{k+1}(R_k) - u_{k+1}(R_k)\, v_{k+1}'(R_k)\right] + \tag{37}$$

$$+ c_{11,k}^{-1}\left[Z_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu),k}(\beta_n)\,\omega_{2k} - Z_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu),k}(\beta_n)\,\omega_{1k}\right].$$

Якщо скористатися базовою тотожністю (37) та вибором вагових множників σ_1, σ_2, σ_3, то в точках спряження $r = R_1$ та $r = R_2$ позаінтегральні члени дають вирази:

$$1)\; a_1^2\sigma_1 R^{2\alpha_1+1}\left(g_1'(R_1)\, v_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(R_1,\beta_n) - g_1(R_1)\, v_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)\prime}(R_1,\beta_n)\right) -$$

$$- a_2^2\sigma_2 \operatorname{sh} R_1 \left(g_2'(R_1)\, v_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(R_1,\beta_n) - g_2(R_1)\, v_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)\prime}(R_1,\beta_n)\right) =$$

$$= \left(a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21,1}}{c_{11,1}} - a_2^2\sigma_2 \operatorname{sh} R_1\right)\times$$

$$\times\left[g_2'(R_1) v_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(R_1,\beta_n) - g_2(R_1) v_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)\prime}(R_1,\beta_n))\right] +$$

$$+ a_1^2\sigma_1 R_1 c_{11,1}^{-1}\left[Z_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu),1}(\beta_n)\,\omega_{21} - Z_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu),1}(\beta_n)\,\omega_{11}\right] =$$

$$= d_1\left[Z_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu),1}(\beta_n)\,\omega_{21} - Z_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu),1}(\beta_n)\,\omega_{11}\right],$$

тому, що в силу вибору σ_1, σ_2 вираз

$$a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21,1}}{c_{11,1}} - a_2^2\sigma_2 \operatorname{sh} R_1 = \frac{c_{11,1}c_{11,2}}{c_{21,1}c_{21,2}}\cdot\frac{\operatorname{sh} R_1}{\operatorname{sh} R_2} R_2^{2\alpha_2+1}\cdot\frac{c_{21,1}}{c_{11,1}} -$$

$$- \frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}\frac{\operatorname{sh} R_1}{\operatorname{sh} R_2} R_2^{2\alpha_2+1} = \frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}\frac{\operatorname{sh} R_1}{\operatorname{sh} R_2} R_2^{2\alpha_2+1}(1-1) \equiv 0\,;$$

$$2)\; a_2^2\sigma_2 \operatorname{sh} R_2\left[g_2'(R_2) v_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(R_2,\beta_n) - g_2(R_2) v_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)\prime}(R_2,\beta_n)\right] -$$

$$- a_3^2\sigma_3 R_2^{2\alpha_2+1}\left[g_3'(R_2) v_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(R_2,\beta_n) - g_3(R_2) v_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)\prime}(R_2,\beta_n)\right] =$$

$$= \left(a_2^2\sigma_2 \operatorname{sh} R_2 \frac{c_{21,2}}{c_{11,2}} - a_3^2\sigma_3 R_2^{2\alpha_2+1}\right)\times$$

$$\times\Big[g_3'(R_2)v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R_2,\beta_n)-g_3(R_2)v^{(\mu)\,\prime}_{\nu,(\alpha);3}(R_2,\beta_n)\Big]+$$

$$+a_2^2\sigma_2\,\mathrm{sh}\,R_2\,c_{11,2}^{-1}\Big[Z^{(\mu),2}_{\nu,(\alpha);12}(\beta_n)\,\omega_{22}-Z^{(\mu),2}_{\nu,(\alpha);22}(\beta_n)\,\omega_{12}\Big]=$$

$$=d_2\Big[Z^{(\mu),2}_{\nu,(\alpha);12}(\beta_n)\,\omega_{12}-Z^{(\mu),2}_{\nu,(\alpha);22}(\beta_n)\,\omega_{12}\Big],$$

тому що в силу вибору σ_2 та σ_3 вираз

$$a_2^2\sigma_2\,\mathrm{sh}\,R_2\,\frac{c_{21,2}}{c_{11,2}}-a_3^2\sigma_3R_2^{2\alpha_2+1}=$$

$$=\frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}R_2^{2\alpha_2+1}\frac{c_{21,2}}{c_{11,2}}-R_2^{2\alpha_2+1}=R_2^{2\alpha_2+1}(1-1)\equiv 0\,.$$

Внаслідок диференціальних тотожностей

$$\Big[\,a_1^2B_{\nu,\alpha_1}+(\beta_n^2+k_1^2)\Big]\,v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n)\equiv 0\,;$$

$$\Big[\,a_2^2\Lambda_{(\mu)}+(\beta_n^2+k_2^2)\Big]\,v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n)\equiv 0\,;$$

$$\Big[\,a_2^2B^*_{\alpha_2}+(\beta_n^2+k_3^2)\Big]\,v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta_n)\equiv 0$$

отримаємо рівності:

$$a_1^2B_{\nu,\alpha_1}\Big[\,v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n)\Big]=-(\beta_n^2+k_1^2)\,v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n)\,,$$

$$a_2^2\Lambda_{(\mu)}\Big[\,v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n)\Big]=-(\beta_n^2+k_2^2)v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n)\,,$$

$$a_3^2B^*_{\alpha_2}\Big[\,v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta_n)\Big]=-(\beta_n^2+k_3^2)\,v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta_n)\,.$$

Підставивши одержані залежності в рівність (35), матимемо:

$$H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);n}\Big[M^{(\mu)}_{\nu,(\alpha)}[g(r)]\Big]=\sum_{k=1}^{2}d_k\Big[Z^{(\mu),k}_{\nu,(\alpha);12}(\beta_n)\,\omega_{2k}-Z^{(\mu),k}_{\nu,(\alpha);22}(\beta_n)\,\omega_{1k}\Big]+$$

$$+(\tilde{\alpha}_{22}^3)^{-1}v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(R_3,\beta_n)R_3^{2\alpha_2+1}g_k-(\beta_n^2+k_1^2)\times \tag{38}$$

$$\times\int_0^{R_1}g_1(r)\,v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n)\sigma_1\,r^{2\alpha_1+1}dr-(\beta_n^2+k_2^2)\tilde{g}_{2n}-(\beta_n^2+k_3^2)\tilde{g}_{3n}\,.$$

Якщо роз'єднати суму $(\beta_n^2+k_j^2)$ на два доданки й врахувати, що $\sum_{j=1}^{3}\tilde{g}_{jn}\equiv\tilde{g}_n$, то отримаємо (33). **Теорему доведено.**

Отримані формули (28), (29) та (33) складають математичний апарат для одержання інтегрального зображення точних аналітичних розв'язків алгоритмічного характеру достатньо широкого класу крайових задач неоднорідних середовищ з м'якими межами.

Параболічна крайова задача математично приводить до інтегрування в області $D_2=\{(t,r):t\in(0,\infty);\, r\in I_2\}$ диференціальних рівнянь

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u_1}{\partial t}+\gamma_1^2u_1-a_1^2B_{\nu,\alpha_1}[u_1]=f_1(t,r)\,,\ r\in(0,R_1)\,,\\
&\frac{\partial u_2}{\partial t}+\gamma_2^2u_2-a_2^2\Lambda_{(\mu)}[u_2]=f_2(t,r)\,,\ r\in(R_1,R_2)\,,\\
&\frac{\partial u_3}{\partial t}+\gamma_3^2u_3-a_3^2B^*_{\alpha_2}[u_3]=f_3(t,r)\,,\ r\in(R_2,R_3)
\end{aligned}
\tag{39}
$$

з нульовими початковими умовами, крайовими умовами

$$\lim_{r\to 0}[r^{\gamma}u_1(t,r)]=0\,;$$

$$\left.\left[\left(\alpha_{22}^3+\delta_{22}^3\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{22}^3+\gamma_{22}^3\frac{\partial}{\partial t}\right]u_3(t,r)\right|_{r=R_3}=g_R(t) \tag{40}$$

та умовами спряження ($j,k=1,2$)

$$
\begin{aligned}
&\left\{\left[\left(\alpha_{j1}^k+\delta_{j1}^k\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j1}^k+\gamma_{j1}^k\frac{\partial}{\partial t}\right]u_k(t,r)-\right.\\
&\left.\left.-\left[\left(\alpha_{j2}^k+\delta_{j2}^k\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j2}^k+\gamma_{j2}^k\frac{\partial}{\partial t}\right]u_{k+1}(t,r)\right\}\right|_{r=R_k}=\omega_{jk}(t).
\end{aligned}
\tag{41}
$$

Запишемо систему (39) й нульові початкові умови в матричній формі:

$$
\begin{bmatrix}
\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\gamma_1^2-a_1^2B_{\nu,\alpha_1}\right)u_1(t,r)\\
\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\gamma_2^2-a_2^2\Lambda_{(\mu)}\right)u_2(t,r)\\
\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\gamma_3^2-a_3^2B^*_{\alpha_2}\right)u_3(t,r)
\end{bmatrix}
=\begin{bmatrix} f_1(t,r)\\ f_2(t,r)\\ f_3(t,r)\end{bmatrix};\
\left.\begin{bmatrix} u_1(t,r)\\ u_2(t,r)\\ u_3(t,r)\end{bmatrix}\right|_{t=0}
=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}. \tag{42}
$$

Інтегральний оператор $H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);n}$ за формулою (28) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка:

$$
H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);n}[\cdots]=\left[\int_0^{R_1}\cdots v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n)\,\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}dr \right. \tag{43}
$$

$$
\left.\int_{R_1}^{R_2}\cdots v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n)\,\sigma_2\,\mathrm{sh}\,r dr\qquad \int_{R_2}^{R_3}\cdots v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta_n)\,\sigma_3 r^{2\alpha_2-1}dr\right].
$$

Застосуємо операторну матрицю-рядок (43) за правилом множення матриць до задачі (42). Внаслідок основної тотожності (33) маємо задачу Коші [9]:

$$\frac{d\tilde{u}_n}{dt} + (\beta_n^2 + \gamma^2)\,\tilde{u}_n = \tilde{F}_n(t)\,, \tag{44}$$

$$\tilde{u}_n(t)\,|_{t=0} = 0\,;\ \gamma^2 = \max\{\gamma_1^2; \gamma_2^2; \gamma_3^2\}\,.$$

Тут функція

$$\tilde{F}_n = \tilde{f}_n(t) + \sum_{k=1}^{2} d_k \left[Z_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu),k}(\beta_n)\,\omega_{2k}(t) - Z_{\nu,(\alpha);22}^{(\mu),k}(\beta_n)\,\omega_{1k}(t) \right] +$$

$$+(\tilde{\alpha}_{22}^3)^{-1}\, v_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(R_3, \beta_n)\, R_3^{2\alpha_2+1} g_R(t)\,.$$

Розв'язком задачі Коші (44) є функція

$$\tilde{u}_n(t) = \int_0^t e^{-(\beta^2+\gamma^2)(t-\tau)}\ \tilde{F}_n(\tau)\, d\tau\,. \tag{45}$$

Оператор $H_{\nu,(\alpha);n}^{-(\mu)}$ згідно формули (29) як обернений до (43) зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця:

$$H_{\nu,(\alpha)}^{-(\mu)}\left[\cdots\right] = \begin{bmatrix} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \cdots v_{\nu,(\alpha);1}^{(\mu)}(r, \beta_n) \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \cdots v_{\nu,(\alpha);2}^{(\mu)}(r, \beta_n) \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \cdots v_{\nu,(\alpha);3}^{(\mu)}(r, \beta_n) \end{bmatrix}. \tag{46}$$

Застосуємо операторну матрицю-стовпець (46) за правилом множення матриць до матриці — елемента $[\tilde{u}_n(t)]$, де функція $\tilde{u}_n(t)$ визначена за формулою (45). У результаті елементарних перетворень маємо єдиний розв'язок задачі (39)–(41):

$$u_j(t,r) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n(t)\, v_{\nu,(\alpha);j}^{(\mu)}(r, \beta_n) = \int_0^t \int_0^{R_1} H_{\nu,(\alpha);j1}^{(\mu)}(t-\tau, r, \rho)\, f_1(\tau, \rho) \times$$

$$\times \sigma_1\, \rho^{2\alpha_1+1} d\rho\, d\tau + \int_0^t \int_{R_1}^{R_2} H_{\nu,(\alpha);j2}^{(\mu)}(t-\tau, r, \rho)\, f_2(\tau, \rho)\, \sigma_2\, \mathrm{sh}\,\rho\, d\rho\, d\tau +$$

$$+\int_0^t \int_{R_2}^{R_3} H_{\nu,(\alpha);j3}^{(\mu)}(t-\tau, r, \rho)\, f_3(\tau, \rho)\, \sigma_3 \rho^{2\alpha_2-1}\, d\rho\, d\tau + \tag{47}$$

$$+\int_0^t W_{\nu,(\alpha);3j}^{(\mu)}(t-\tau, r) g_R(\tau)\, d\tau + \sum_{k=1}^{2} d_k \int_0^t \Big[R_{\nu,(\alpha);12}^{(\mu),j,k}(t-\tau, r)\, \omega_{2k}(\tau) -$$

$$-R^{(\mu),j,k}_{\nu,(\alpha);22}(t-\tau,r)\,\omega_{1k}(\tau)\Big]\,d\tau\,;\;\; j=\overline{1,3}\,.$$

У формулах (47) беруть участь головні розв'язки:

1) породжені неоднорідністю системи функції впливу

$$H^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j3}(t,r,\rho)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(\beta_n^2+\gamma^2)t}\;v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)\,v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);k}(\rho,\beta_n)\;\; j,k=\overline{1,3}\,; \tag{48}$$

2) породжені крайовою умовою в точці $r=R_3$ функції Гріна

$$W^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3j}(t,r)=(\tilde{\alpha}^3_{22})^{-1}R_3^{2\alpha_2+1}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(\beta_n^2+\gamma^2)t}\times$$
$$\times v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(R_3,\beta_n)\,v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n);\;\; j=\overline{1,3}; \tag{49}$$

3) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R^{(\mu),j,k}_{\nu,(\alpha);12}(t,r)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(\beta_n^2+\gamma^2)t}\times$$
$$\times Z^{(\mu),k}_{\nu,(\alpha);i2}(\beta_n)\,v^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n)\,;\;\; i,k=1,2\,;\;\; j=\overline{1,3}\,. \tag{50}$$

Функція

$$u(t,r)=\theta(r)\theta(R_1-r)u_1(t,r)+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\times$$
$$\times u_2(t,r)+\theta(r-R_2)\theta(R_3-r)\,u_3(t,r)$$

повністю характеризує процес в даному середовищі.

Зауваження 2. Якщо $\gamma^2=\gamma_1^2>0$, то $k_1^2=0$, $k_2^2=\gamma_1^2-\gamma_2^2\ge 0$, $k_3^2=\gamma_1^2-\gamma_3^2\ge 0$; якщо $\gamma^2=\gamma_2^2>0$, то $k_1^2=\gamma_2^2-\gamma_1^2\ge 0$, $k_2^2=0$; $k_3^2=\gamma_2^2-\gamma_3^2\ge 0$; якщо $\gamma^2=\gamma_3^2>0$, то $k_1^2=\gamma_3^2-\gamma_1^2\ge 0$, $k_2^2=\gamma_3^2-$ $-\gamma_2^2\ge 0$, $k_3^2=0$.

Зауваження 3. Інтегральне зображення (47) аналітичного розв'язку параболічної задачі (39)–(41) носить алгоритмічний характер. Параметри допускають реалізацію будь-якого часткового випадку безпосереднім вибором із загальних структур (у рамках розглянутої моделі).

Зауваження 4. Якщо початкові умови ненульові ($u_j\,|_{t=0}=g_j(r)$), то в рівностях (47) будуть брати участь ще доданки

$$\sum_{k=1}^{2}d_k\Big[\,R^{(\mu),j,k}_{\nu,(\alpha);12}(t,r)\,\psi_{2k}-R^{(\mu),j,k}_{\nu,(\alpha);22}(t,r)\,\psi_{1k}\Big]+W^{(\mu)}_{\nu,(\alpha);3j}(t,r)\psi_{33}\,;$$
$$\psi_{jk}=\Big[\,\delta^k_{j1}\,g'_k(R_k)+\gamma^k_{j1}g_k(R_k)\Big]-\Big[\,\delta^k_{j2}\,g'_{k+1}(R_k)+\gamma^k_{j2}g_{k+1}(R_k)\Big],$$
$$\psi_{33}=\delta^3_{22}\;g'_3(R_3)+\gamma^3_{22}\;g_3(R_3)\,;\;\; j,k=1,2\,. \tag{51}$$

Поява доданків (51) відображає вплив початкових умов на м'якість середовища по відношенню до відбиття теплових хвиль.

Якщо $\delta_{im}^{k} = 0$, $\gamma_{im}^{k} = 0$, то ми одержуємо випадок жорсткої межі кусково-однорідного середовища D_2.

Висновки. Методом скінченного гібридного інтегрального перетворення типу Бесселя–Лежандра–Ейлера зі спектральним параметром одержано інтегральне зображення єдиного точного аналітичного розв'язку мішаної задачі для рівнянь параболічного типу на трискладовому сегменті полярної осі з м'якими межами. Побудований розв'язок неперервно залежать від параметрів та даних задачі й може використовуватись як в теоретичних дослідженнях, так і при комп'ютерному моделюванні еволюційних процесів у кусково-однорідних середовищах.

Список використаних джерел:

1. Конет І. М. Інтегральні перетворення типу Мелера–Фока / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2002. — 248 с.
2. Курош А. Г. Курс вышей алгебры / А. Г. Курош. — М. : Наука, 1971. — 432 с.
3. Ленюк М. П. Інтегральні перетворення, породжені диференціальним оператором Ейлера другого порядку / М. П. Ленюк. — Чернівці, 2012.
4. Ленюк М. П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя / М. П. Ленюк. — К., 1983. — 62 с. (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 83.3).
5. Ленюк М. П. Побудова скінченного гібридного інтегрального перетворення при наявності спектрального параметру в крайових умовах та умовах спряження / М. П. Ленюк, В. В. Мороз // Науковий вісник Чернівецького університету. — Чернівці : Рута, 2006. — Вип. 314-315. Математика. — С. 105–113.
6. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра) / М. П. Ленюк, М. І. Шинкарик. — Тернопіль : Економ. думка, 2004. — Ч. 1. — 368 с.
7. Подстригач Я. С. Обобщенная термомеханика / Я. С. Подстригач, Ю. М. Коляно. — К. : Наук. думка, 1976. — 310 с.
8. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1977. — 736 с.
9. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. — М. : Физматгиз, 1959. — 428 с.
10. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.

Using the method of hybrid integral transformation of Bessel-Legendre-Euler with spectral parameter, it is obtained the integral representation of the exact analytical solution of mixed problem for parabolic equations of heat conduction type on ternary segment of polar axis with soft limits.

Key words: *parabolic equation, hybrid differential operator, Cauchy's functions and Green's functions of the boundary value problem, hybrid integral conversion with spectral parameter, the primary identity, main solutions.*

Отримано: 25.05.2017