Список використаних джерел:

1. Marynets V. V., Marynets K. V. On Goursat Darboux boundary-value problem for systems of non-linear differential equations of hyperbolic type. *Miskolc Mathematical Notes*. 2013. Vol. 14, N. 3. C. 1009–1020.
2. Маринець В. В., Маринець К. В. Дослідження крайової задачі Гурса-Дарбу для нелінійного рівняння гіперболічного типу. *Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій*. 2014. Вип. 10. С. 56–68.
3. Collatz L. Funktionalanalysis und numerische matematik. Berlin Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag, 1964. 446 p.
4. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 456 с.

With the help of the constructed modification of the two-sided method we investigate the Darboux-Goursat-Darboux boundary-value problem for non-linear wave differential equation of the hyperbolic type over the domain with a complex structure.

Key words: *two-sided method, Darboux-Goursat-Darboux boundary-value problem, the domain with complex structure, comparation functions.*

Одержано 24.02.2017

УДК 519.854

В. О. Михайлюк, д-р фіз.-мат. наук

Східноєвропейський національний університет
імені Лесі Українки, м. Луцьк

АЛГЕБРАЇЧНИЙ ПІДХІД ДО РЕОПТИМІЗАЦІЇ ЗАДАЧ КОМБІНАТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА СУМІЖНІ ПИТАННЯ ОЦІНКИ СКЛАДНОСТІ ОБЧИСЛЕНЬ

Використовується поняття α_Λ -наближеного поліморфізму для конструювання $\psi(\alpha_\Lambda)$ -наближеного оптимального алгоритму ($\psi(\alpha_\Lambda) = 2 - 1/\alpha_\Lambda$) для реоптимізації *CSP* задачі $MAX - \Lambda$ ($Ins - MAX - \Lambda$) з добавленням деякого обмеження. Гіпотеза алгебраїчної дихотомії характеризує *NP*-складність розглянутого підходу, а базова *SDP* релаксація для наближених поліморфізмів (*BasicSDP*) визначає ефективний алгоритм заокруглення для $MAX - \Lambda$ та $Ins - MAX - \Lambda$.

Ключові слова: *наближений поліморфізм, гіпотеза алгебраїчної дихотомії, унікальна ігрова гіпотеза (UGC), реоптимізація CSPs.*

Вступ. Узагальнені задачі про виконуваність (Constraint Satisfaction Problems, *CSPs*) описують великий клас задач комбінаторної оптимізації [1, 2]. Узагальнена задача про виконуваність (*CSP*) Λ може бути задана

© В. О. Михайлюк, 2017

сімейством предикатів над скінченною областю $[q]=\{1,2,...,q\}$. Кожний екземпляр $CSP\ \Lambda$ складається з множини змінних V разом з множиною обмежень C на ній. Кожне обмеження з C складається з предиката з сімейства Λ, що застосовується до множини змінних. Для $CSP\ \Lambda$ відповідна задача про виконуваність $\Lambda-SAT$ має вигляд.

Задача 1 ($\Lambda-SAT$). Для заданого екземпляра I $CSP\ \Lambda$ визначити чи існують приписування змінним, що задовольняють всі обмеження з C.

Більшість задач комбінаторної оптимізації (і $CSPs$) класифікуються як поліноміально розв'язні (легкі, tractable) або NP-складні. Основні дослідження, що проводяться в комбінаторній оптимізації зрозуміти, що робить задачі легкими (в P) або складними (NP-складні). Чи існує загальна теорія для розв'язання цих питань?

Задача 2 ($MAX-\Lambda$). Для заданого екземпляра I задачі $\Lambda-CSP$ знайти приписування, що задовольняють максимальне число (еквівалентно долю) обмежень.

Виникає інтерес до побудови теорій легкості (tractability) для множин $CSPs$ незалежно для точного або оптимізаційного варіантів (задачі 1, 2). Елегантна характеристика складності $CSPs$ основана на гіпотезі алгебраїчної дихотомії [1, 2]. Згідно цієї гіпотези $\Lambda-CSP$ легка тоді і тільки тоді, коли існують нетривіальні операції, названі поліморфізмами, для комбінації розв'язків Λ для отримання нових розв'язків. Розглянемо CSP відому як XOR задача. Екземпляр задачі XOR складається з системи лінійних рівнянь над $Z_2=\{0,1\}$. Фіксуємо екземпляр I задачі XOR від n змінних. Для заданих трьох розв'язків $X^{(1)},X^{(2)},X^{(3)}\in\{0,1\}^n$ екземпляра I можна створити новий розв'язок $Y\in\{0,1\}^n : Y_i=X_i^{(1)}\oplus X_i^{(2)}\oplus X_i^{(3)},\forall i\in[n]$. Легко перевірити, що Y також допустимий розв'язок екземпляра I. Таким чином, $XOR:\{0,1\}^3\to\{0,1\}$ дає спосіб зкомбінувати три розв'язки в один новий розв'язок для цього екземпляра. Операція такого вигляду, що зберігає виконуваність CSP відома як поліморфізм. Формально

Означення 1 (поліморфізм). Функція $p:[q]^R\to[q]$ називається поліморфізмом для $CSP\ \Lambda-SAT$, якщо для кожного екземпляра I з Λ і R приписування $X^{(1)},X^{(2)},...,X^{(R)}\in[q]^n$, що задовольняють всі обмеження в I, вектор $Y\in[q]^n : Y_i=p(X_i^{(1)},X_i^{(2)},...,X_i^{(R)}),\forall i\in[n]$ також є допустимим розв'язком.

Множина поліморфізмів $CSP\ \Lambda$ ($Poly(\Lambda)$) характеризує складність $\Lambda-SAT$. Формально.

Теорема 1 [1, 2]**.** Якщо *CSPs* Λ_1 і Λ_2 мають співпадаючі множини поліморфізмів ($Poly(\Lambda_1) = Poly(\Lambda_2)$), то $\Lambda_1 - SAT$ поліноміально зводиться до $\Lambda_2 - SAT$ і навпаки.

Зазначимо, що диктаторські функції $p(X^{(1)},...,X^{(R)}) = X^{(i)}$ є поліморфізмами для довільної *CSP* $\Lambda - SAT$ (вони називаються проекціями або тривіальними поліморфізмами). Всі легкі (tractable) випадки булевських *CSPs* характеризуються існуванням нетривіальних поліморфізмів. Зокрема, $2 - SAT$ має функцію більшості (XOR), $HORN - SAT$ має OR функції і $DUAL\ HORN - SAT$ має AND функції як поліморфізми. В роботі [1] припустили, що існування не диктаторських поліморфізмів характеризує *CSP* як tractable. Ця робота показує, що множина поліморфізмів $Poly(\Lambda)$ *CSP* Λ характеризує складність $\Lambda - SAT$. Є багато еквівалентних способів формалізації, що означає для операції бути не диктаторською (нетривіальною). Поліморфізм $p:[q]^k \to [q]$ називається циклічним термом, якщо

$$p(x_1,...,x_k) = p(x_2,...,x_k,x_1) = ... = p(x_k,x_{k-1},...,x_1), \forall x_1,...,x_k \in [q].$$

Гіпотеза 1 (алгебраїчної дихотомії) [1, 2]. $\Lambda - SAT$ знаходиться в P, якщо в Λ є циклічний терм, інакше $\Lambda - SAT$ є NP-складною.

Вдалося отримати такий результат.

Теорема 2 [1, 2]**.** $\Lambda - SAT$ є NP-складною, якщо Λ не допускає циклічних термів.

Вводиться поняття наближеного поліморфізму для оптимізаційних задач. Грубо кажучи наближений поліморфізм є ймовірнісний розподіл P щодо множини операцій вигляду $p:[q]^k \to [q]$. Зокрема, наближений поліморфізм p може бути використаний для комбінації k розв'язків оптимізаційної задачі для формування ймовірнісного розподілу нових розв'язків для того самого екземпляра. На відміну від випадку точних *CSPs* тут поліморфізм видає декілька нових розв'язків.

Ціль реоптимізації [3–6], використовуючи наближені методи, — застосування знання розв'язку початкового екземпляра I задачі для виконання однієї з умов: досягнення кращої якості наближення (відношення апроксимації) I' (змінений екземпляр); створення більш ефективного (по часу) алгоритму для визначення оптимального або близького до нього розв'язку I'; попередні дві умови. Вдалося застосувати аналіз коректності для мови наближених поліморфізмів. Мета статті застосувати алгебраїчний підхід, що базується на мові наближених поліморфізмів, до дослідження деяких реоптимізаційних проблем для *CSPs*.

Наближені поліморфізми для реоптимізації $CSPs$ **.**

Означення 2 ((c,s)**-наближений поліморфізм).** Фіксуємо функцію $f:[q]^n \to R^+$. Ймовірнісний розподіл Р відносно операцій $p:[q]^R \to [q]$ є (c,s)-наближений поліморфізм для f, якщо виконуються умови: для кожного R приписування $X^{(1)}, X^{(2)},..., X^{(R)} \in [q]^n$ такі, що $E_i f(X^{(i)}) \geq c$ для всіх i, то виконується $\underset{p\in \mathrm{P}}{E}[f(p(X^{(1)},...X^{(R)}))] \geq s$. Тут $p(X^{(1)},...,X^{(R)})$ приписування, отримане за координатними застосуваннями операції p.

Означення 3 (α **-наближений поліморфізм).** Ймовірнісний розподіл Р операцій $p:[q]^R \to [q]$ — α-наближений поліморфізм для $f:[q]^n \to R^+$, якщо він є $(c,\alpha \cdot c)$-наближений поліморфізм для всіх $c \geq 0$.

Означення 4. Ймовірнісний розподіл Р операцій $p:[q]^R \to [q]$ — α-наближений поліморфізм для $MAX-\Lambda$, якщо Р є $(c,\alpha \cdot c)$-наближений поліморфізм для кожного екземпляра I задачі $MAX-\Lambda$.

Будемо вважати, що CSP Λ над $[q]$ задається сімейством платіжних функцій $\Lambda = \{c:[q]^k \to [-1,1]\}$. Екземпляр $MAX-\Lambda$ складається з множини змінних $V = \{x_1,...,x_n\}$ і множини обмежень $C = \{C_1,...,C_m\}$, де кожне $C_i(X) = c(x_{i_1}, x_{i_2},..., x_{i_k})$ для деякого $c \in \Lambda$. Множина C пов'язана з розподілом ймовірностей $w: C \to R^+$. Мета знайти приписування $x \in [q]^V$, що максимізує

$$val_I(x) = \sum_{c\in C} w(c)c(x).$$

Вводиться поняття (c,s)-диктаторського тесту для $MAX-\Lambda$ проти сімейства функцій $\Phi = \{p:[q]^R \to [q]\}$ [2].

Теорема 3 [2]**.** Для даної CSP Λ, натурального числа $R \in N$ і скінченого сімейства функцій $\Phi = \{p:[q]^R \to [q]\}$ замкненого відносно перестановки входів наступні умови еквівалентні:

- $MAX-\Lambda$ не допускає (c,s)-наближений поліморфізм, що підтримується на Φ.
- Існує (c,s)-диктаторський тест для $MAX-\Lambda$ проти сімейства Φ.

Фіксуємо ймовірнісний розподіл μ на $[q]$. Нехай $\{\chi_0, \chi_1,..., \chi_{q-1}\}$ є ортонормований базис для векторного простору $L_2([q],\mu)$. Без втрати загальності будемо вважати, що $\chi_0 = 1$. Для даної функції $f:[q]^k \to R$ можемо записати $f = \sum_{\sigma \in N^k} \widehat{f}_\sigma \chi_\sigma$ (Фур'є представлення), де $\chi_\sigma(x) = \prod_{j=1}^k \chi_{\sigma_j}(x_j)$. Визначимо вплив ступеня d i-ої координати f відносно розподілу μ як $Inf_{i,\mu}^{<d}(f) = \sum_{\sigma \in N^k, \sigma_i \neq 0, |\sigma| < d} \widehat{f}_\sigma^2$. Узагальнюючи для векторної функції $f:[q]^k \to R^D$, отримаємо $Inf_{i,\mu}^{<d}(f) = \sum_{j \in [D]} Inf_{i,\mu}^{<d}(f_j)$.

Означення 5. Наближений поліморфізм Р — (τ, d)-квазівипадковий, якщо для довільного розподілу ймовірностей μ : $\underset{p \in \mathrm{P}}{E}[\max_i Inf_{i,\mu}^{<d}(p)] \le \tau$.

Означення 6. Для заданої CSP Λ і константи $c \in [-1,1]$ визначимо $s_\Lambda(c) = \sup\{s \mid \forall \tau > 0, d \in N$, $\exists$ (τ, d)-квазівипадковий (c,s)-наближений поліморфізм для $MAX - \Lambda\}$; $\alpha_\Lambda = \inf_{c \ge 0} \frac{s_\Lambda(c)}{c}$.

Твердження 1. Відображення $s_\Lambda : [-1,1] \to [-1,1]$ монотонно зростає і $s_\Lambda(c+\varepsilon) \le s_\Lambda(c) + \varepsilon$ для довільних c, ε таких, що $c, c+\varepsilon \in (-1,1)$.

Будемо застосовувати **гіпотезу 2 (унікальну ігрову гіпотезу, Unique Games Conjecture, UGC)** [2, 6]**.** Використовуючи базову SDP релаксацію для наближених поліморфізмів $BasicSDP$ і твердження 1, отримаємо теорему.

Теорема 4 [2]**.** Приймаючи UGC для довільного Λ є NP- складним апроксимувати $MAX - \Lambda$ краще ніж α_Λ. Більше того UGC еквівалентно такому твердженню: для довільних Λ і c на екземплярах $MAX - \Lambda$ із значенням c є NP-складним знайти приписування із значенням більшим ніж $s_\Lambda(c)$.

Теорема 5 [2]**.** Для кожної CSP Λ цілочисловий розрив $BasicSDP$ релаксації для $MAX - \Lambda$ не більший ніж α_Λ. Більше того для кожного екземпляра I $MAX - \Lambda$, для кожного c, якщо оптимальне значення $BasicSDP$ релаксації є не меншим ніж c оптимальне значення для I не менше ніж $\lim_{\varepsilon \to 0} s_\Lambda(c - \varepsilon)$.

Отже, використовується α-наближений поліморфізм для конструювання α-заокруглення для SDP для $MAX - \Lambda$. Отримаємо

Теорема 6 [2]**.** Для всіх η і CSP Λ існують $\tau, d > 0$ такі, що виконується: припустимо Р є $(c-\eta, s)$-наближений (τ, d)-квазівипадковий поліморфізм для $MAX-\Lambda$. Для заданого $BasicSDP$ розв'язку із значенням цілі не меншим c очікуване значення приписування округленого алгоритму не менше ніж $s-\eta$.

Нехай I є довільним екземпляром задачі $MAX-\Lambda$. Екземпляр I' задачі отримується з екземпляра I добавленням $(m+1)$-го обмеження $C_{m+1} = (z_{i_1}^{(m+1)}, ..., z_{i_k}^{(m+1)})$, причому $z_{i_j}^{(m+1)} \in \{x_1, ..., x_n, \overline{x}_1, ..., \overline{x}_n\}$, $j \in [k]$.

Задача 3 ($Ins-MAX-\Lambda$ **). Вхідні дані.** Довільний екземпляр I задачі $MAX-\Lambda$, σ^* — оптимальний розв'язок екземпляра I.

Результат. Знайти оптимальний розв'язок екземпляра I' (отриманого, виходячи з I, як описано вище) задачі $MAX-\Lambda$, використовуючи σ^*.

Мета. Знайти σ, який максимізує число виконаних обмежень екземпляра I'.

Основний результат статті полягає у наступному.

Теорема 7. Для довільної CSP Λ задачі $MAX-\Lambda$ та $Ins-MAX-\Lambda$ такі, що $k = const$**.** Тоді для задачі $Ins-MAX-\Lambda$ (реоптимізація $MAX-\Lambda$) існує поіноміальний $\psi(\alpha_\Lambda)$-наближений оптимальний алгоритм, де $\psi(\alpha_\Lambda) = 2 - \dfrac{1}{\alpha_\Lambda}$.

Висновки. Використовуються α_Λ-наближені поліморфізми для конструювання ефективної заокругленої для $BasicSDP$ релаксації напіввизначеного програмування для $MAX-\Lambda$ та $Ins-MAX-\Lambda$. При цьому NP-складність для таких CSP залишається відкритою, і вона еквівалентна UGC. У випадку гіпотези алгебраїчної дихотомії результат з NP-складності відомий, але ефективний алгоритм для всіх $CSPs$ через поліморфізми не відомий.

Представляє інтерес дослідити інші варіанти питання реоптимізації для CSP Λ (зокрема, добавлення деякої множини обмежень або виключення обмежень), використовуючи наближені поліморфізми.

Список використаних джерел:

1. Bulatov A. A., Krokhin A. A., Jeavons Peter. Constraint satisfaction problems and finite algebras. *Proceedings of 27th International Colloquium on Automata, Languages and Programming* (ICALP'00). Geneva, Switzerland, 2000. Lecture Notes in Computer Science (LNCS) 1853. 2000. P. 272–282.

2. Brown-Cohen Jonah, Raghavendra Prasad. Combinatorial Optimization Algorithms via Polymorphisms. [Електронний ресурс] *Electronic Colloquium on Computational Complexity*. 2015. Report No 7. 41 p. Режим доступу: http://eccc.hpi-web.de.
3. Ausiello G., Bonifaci V., and Escoffier B. Complexity and approximation in reoptimization. *Computability in Context: Computation and Logic in the Real World* (ed. S. Barry Cooper and Andrea Sorbi). 2011. London: Imperial College Press. P. 101–130.
4. Bockenhauer H.-J., Hromkovic J., Momke T., Widmayer P. On the hardness of reoptimization. In V. Geffert, J. Karhumaki, A. Bertoni etc. (eds.), SOFSEM, Lecture Notes in Computer Science, Springer. 2008. V. 4910. P. 50–65.
5. Boria N., Paschos V. Th. A survey on combinatorial optimization in dynamic environments. RAIRO. Operations Research. 2011. 45. P. 241–294.
6. Михайлюк В. О., Сергієнко І. В. Постоптимальний аналіз та наближені алгоритми реоптимізації для задач дискретного програмування. Київ: Наукова думка, 2015. 248 с.

The concept of α_Λ -approximation polymorphism is used for design of $\psi(\alpha_\Lambda)$ -approximation optimal algorithm ($\psi(\alpha_\Lambda) = 2 - 1/\alpha_\Lambda$) for reoptimization of CSP problem $MAX - \Lambda$ ($Ins - MAX - \Lambda$) with addition of some constraint. Algebraic dichotomy conjecture characterizes NP -hardness of the considered approach and basic SDP relaxation for approximation polymorphism ($BasicSDP$) defines an efficient rounding algorithm for $MAX - \Lambda$ and $Ins - MAX - \Lambda$.

Key words: *approximation polymorphism, algebraic dichotomy conjecture, Unique Games Conjecture (UGC), reoptimization of* $CSPs$.

Одержано 17.02.2017