3. Adam Freeman. Pro .NET Parallel Programming in C#. New York: Apress, 2010. 328 p.
4. Joe Duffy. Concurrent Programming on Windows. Boston, MA: Addison-Wesley Professional, 2008. 1008 p.
5. Aidazade K. R., Sidorenko N. S. An approach to the construction of combined optimization algorithms. *Technical Cybernetics.* 1982. Issue 6. P. 87–93. (in Russian)

Работа посвящена анализу методов, алгоритмов управления вычислительным процессом решения сложных задач с использованием многопроцессорных (многоядерных) компьютерных систем. Разработана автоматическая и диалоговая системы управления процессом безусловной оптимизации, имеющие графический пользовательский интерфейс.

Ключевые слова: *методы оптимизации, параллельные вычисления, многопроцессорные и многоядерные системы, диалоговые системы.*

Date received 21.02.2017

УДК 519.6:539.3

А. А. Аралова, канд. фіз.-мат. наук

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, м. Київ

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ТЕРМІЧНОГО ОПОРУ ПРИ ВІДОМОМУ ЗМІЩЕННІ ДЛЯ ТЕРМОПРУЖНОГО ДЕФОРМУВАННЯ СКЛАДЕНОГО ЦИЛІНДРА

Розглянуто алгоритм розв’язання за допомогою градієнтних методів задачі ідентифікації термічного опору при відомому зміщенні для термопружного деформування довгої складеної циліндричної оболонки.

Ключові слова: *термопружний стан, градієнтні методи, циліндричні тіла.*

Вступ. У роботі [1] на основі результатів теорії оптимального керування станами різних багатокомпонентних розподілених систем [2] запропонована методологія побудови явних виразів градієнтів функціоналів-нев'язок для ідентифікації градієнтними методами [3] різних параметрів багатокомпонентних розподілених систем. У роботах [4–6] ця методологія використана для ідентифікації параметрів задач пружного, теплового та термопружного деформування довгого порожнього циліндра.

Постановка задачі. Розглянемо довгий ізотропний циліндр з порожниною. Врахувавши симетрію, виходячи з [7, 8] його термопружний стан описується рівняннями

$$-\left\{(\lambda+2\mu)\frac{d}{dr}\left(r\frac{dy}{dr}\right)-(\lambda+2\mu)\frac{y}{r}-(3\lambda+2\mu)\,\alpha r\frac{dT}{dr}\right\}=0,\ r\in\Omega;$$

$$\sigma_r\big|_{r=r_i}=-p_i,\ \ i=1,2;\ \ -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(kr\frac{dT}{dr}\right)=\overline{f},\ \ r\in\Omega;$$

$$-k\frac{dT}{dr}\bigg|_{r=r_1}=-\alpha_1 T+\beta_1,\ k\frac{dT}{dr}\bigg|_{r=r_2}=-\alpha_2 T+\beta_2; \tag{1}$$

$$[y]=0,\ [\sigma_r(y)]=0,\ \left[k\frac{dT}{dr}\right]=0,\ \left\{k\frac{dT}{dr}\right\}^{\pm}=u[T],\ r=\xi;$$

де $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$, $\Omega_1=(r_1,\xi)$, $\Omega_2=(\xi,\, r_2)$, $0<r_1<\xi<r_2<\infty$, $r_1, r_2=const>0$ — радіуси, відповідно, внутрішньої і зовнішньої кругових поверхонь; r — радіальна координата циліндричної системи координат; а компонента тензора напруги має вигляд $\sigma_r(y,T)=$ $=(\lambda+2\mu)\dfrac{dy}{dr}+\lambda\dfrac{y}{r}-(3\lambda+2\mu)\alpha T$, де λ, μ — постійні Ляме; $y=y(r)$ — зміщення в радіальному напрямку; $\alpha=const>0$ — коефіцієнт температурного розширення, $\alpha_{1,2}=const>0$, $\beta_{1,2}=const$, $p_{1,2}=const$; $T=T(r)$ — температура, $k=const$ — коефіцієнт теплопровідності. Перші дві умови спряження виражають неперервність радіального зміщення та нормальної напруги на поверхні контакту, а третя та четверта — наявність слаботеплопроникного прошарку з термічним опором $u=const>0$, який вважаємо невідомим, $[T]=T^+-T^-$, $T^{\pm}=\{T\}^{\pm}=T(\xi\pm 0)$.

Ідентифікація параметрів за допомогою спостережень за зміщеннями на поверхні складеного тіла. При кожному фіксованому $u\in\mathcal{U}$ замість класичного розв'язку крайової задачі (1) будемо використовувати її узагальнений розв'язок, як вектор-функцію $Y=(y,T)\in\mathcal{H}$, складові якої $\forall z=(z_1,z_2)\in\mathcal{H}$ задовольняють системі тотожностей:

$$a(y,z_1)=l(T;\ z_1), \tag{2}$$

$$a_0(u;T,z_2)=l_0(z_2), \tag{3}$$

де простір $\mathcal{H}=V\times V_0$, $V=\left\{v(r):v\big|_{\Omega_i}\in W_2^1(\Omega_i),\ i=1,\ 2;\ [v]\big|_{\xi}=0\right\}$, $V_0=\left\{v(r):v\big|_{\Omega_i}\in W_2^1(\Omega_i),\ i=1,\ 2\right\}$, $W_2^1(\Omega_i)$ — простір функцій Соболєва визначених на області $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$,

$$a\left(y,w\right)=\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i} r\left(\left(\lambda+2\mu\right)\left(\frac{dy}{dr}\frac{dw}{dr}+\frac{y}{r}\frac{w}{r}\right)+\lambda\left(\frac{y}{r}\frac{dw}{dr}+\frac{dy}{dr}\frac{w}{r}\right)\right)dr,$$

$$l\left(T;w\right)=\sum_{i=1}^{2}\left(\int_{\Omega_i}\left(r\left(3\lambda+2\mu\right)\alpha T\left(\frac{dw}{dr}+\frac{w}{r}\right)\right)dr\right)+r_1p_1w\left(r_1\right)-r_2p_2w\left(r_2\right),$$

$$l\left(T;w\right)=\sum_{i=1}^{2}\left(\int_{\Omega_i}\left(r\left(3\lambda+2\mu\right)\alpha T\left(\frac{dw}{dr}+\frac{w}{r}\right)\right)dr\right)+r_1p_1w\left(r_1\right)-r_2p_2w\left(r_2\right),$$

$$a_0\left(u;T,w\right)=\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i} r\,k\frac{dT}{dr}\frac{dw}{dr}dr+u\left[T\right]\left[w\right]+\alpha_1 r_1T\left(r_1\right)w\left(r_1\right)+\alpha_2 r_2T\left(r_2\right)w\left(r_2\right),$$

$$l_0\left(w\right)=\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i} r\,\overline{f}\,wdr+\beta_1r_1w\left(r_1\right)+\beta_2r_2w\left(r_2\right).$$

Вважаємо, що в деяких точках $d_i\in\Omega,\ i=\overline{1,N}$ відомі зміщення, які задані рівностями

$$y\left(d_i\right)=f_i,\ i=\overline{1,N}\ . \tag{4}$$

Отримана задача (2), (3) полягає у визначенні додатнього дійсного числа u при якому перший компонент y розв'язку $Y=\left(y,T\right)$ задачі (2), (3) задовольняє рівності (4).

Побудуємо функціонал-нев'язку

$$J\left(u\right)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(y\left(d_i\right)-f_i\right)^2\ . \tag{5}$$

Теорема 1. При кожному фіксованому $u\in\mathcal{U}$ узагальнений розв'язок $Y=\left(y,T\right)$ крайової задачі (1) існує та єдиний в $\mathcal{H}$.

Будемо розглядати задачу (2)–(4), що полягає у визначенні елемента $u\in\mathcal{U}$ який мінімізує функціонал-нев'язки (5).

Задачу (2)–(4) будемо розв'язувати за допомогою градієнтних методів О. М. Аліфанова [3]:

$$u_{n+1}=u_n-\beta_n p_n,\ n=0,1,...,n^*\ . \tag{6}$$

Напрямок спуску p_n та коефіцієнт β_n можна визначити за допомогою формул для методу мінімальних нев'язок

$$p_n=J'_{u_n},\quad \beta_n=\frac{\left\|e_n\right\|^2}{\left\|J'_{u_n}\right\|^2},\ \gamma_n=\frac{\left\|J'_{u_n}\right\|^2}{\left\|J'_{u_{n-1}}\right\|^2},\ \beta_n=\frac{(J'_{u_n},p_n)}{\left\|Ap_n\right\|^2}\ . \tag{7}$$

Виходячи з [7, 8], для знаходження (n+1)-го наближення u_{n+1} розв'язку $u\in\mathcal{U}$ задачі (2)–(4) спряжена задача має вигляд

$$-\left(\lambda+2\mu\right)\left(\frac{d}{dr}\left(r\frac{dp}{dr}\right)-\frac{p}{r}\right)=0,\ r\in\Omega_d;\ \ \sigma_r\left(p\right)\Big|_{r=r_i}=0,\ i=1,\ 2\,;$$

$$-\frac{d}{dr}\left(kr\frac{d\psi}{dr}\right)-r\left(3\lambda+2\mu\right)\alpha\left(\frac{dp}{dr}+\frac{p}{r}\right)=0,\ r\in\Omega_d\,;$$

$$-k\frac{d\psi}{dr}\bigg|_{r=r_1}=-\alpha_1\psi\left(r_1\right),\quad k\frac{d\psi}{dr}\bigg|_{r=r_2}=-\alpha_2\psi\left(r_2\right);\left[p\right]\Big|_{r=\xi}=0,$$

$$\left[\sigma_r\left(p\right)\right]\Big|_{r=\xi}=0,\quad \left[k\frac{d\psi}{dr}\right]\bigg|_{r=\xi}=0,\quad \left\{k\frac{d\psi}{dr}\right\}^{\pm}=u\left[\psi\right]\Big|_{r=\xi}\,,$$

$$\left[p\right]\Big|_{r=d_i}=0,\ \left[\sigma_r\left(p\right)\right]\Big|_{r=d_i}=-\frac{1}{d_i}\left(y\left(u;d_i\right)-f_i\right),\ \ i=\overline{1,N},\qquad (8)$$

де $u=u_n$.

Узагальненим розв’язком крайової задачі (8) називається вектор-функція $Y^*=\left(p,\psi\right)\in\mathcal{H}^*=V^*\times V_0^*$, що $\forall z=\left(z_1,z_2\right)\in\mathcal{H}^*$ задовольняє системі тотожностей:

$$a\left(p,z_1\right)=\sum_{i=1}^{N}\left(y\left(u_n;\,d_i\right)-f_i\right)z_1\left(d_i\right),\qquad (9)$$

$$a_0\left(u_n,\psi,z_2\right)-\int\limits_{\Omega_d}r(3\lambda+2\mu)\alpha\left(\frac{dp}{dr}+\frac{p}{r}\right)z_2dr=0\,,\qquad (10)$$

де $\Omega_d=\bigcup\limits_{\nu}\Omega_\nu$, $\Omega_\nu=\left(r^{\nu-1},r^{\nu}\right)$, $\nu=\overline{1,\chi}\cup\overline{\chi+2,N+3}$, $r^0=r_1$, $r^\nu=d_i$ при $d_i\in\Omega_1$, $r^\chi=\xi^-$, $r^{\chi+1}=\xi^+$, $r^\nu=d_{\nu-2}$ при $d_{\nu-2}\in\Omega_2$, $r^{N+3}=r_2$, $V^*=\left\{v\left(r\right):v\big|_{\Omega_\nu}\in W_2^1\left(\Omega_\nu\right),\left[v\right]\Big|_{r=\xi}=0,\ \ \left[v\right]\Big|_{r=d_i}=0,\ i=\overline{1,N}\right\}$ на кожному кроці визначення (n+1)-го наближення u_{n+1} розв’язку $u\in\mathcal{U}$.

Введемо до розгляду форми

$$\begin{gathered}\pi\left(u,v\right)=\left(\bar{Y}\left(u\right)-\bar{Y}\left(u_n\right),\bar{Y}\left(v\right)-\bar{Y}\left(u_n\right)\right)_d,\\ L\left(v\right)=\left(f-\bar{Y}\left(u_n\right),\ \bar{Y}\left(v\right)-\bar{Y}\left(u_n\right)\right)_d,\end{gathered}\qquad (11)$$

де $\bar{Y}\left(v\right)=\left\{y\left(v;\,d_i\right)\right\}_{i=1}^{N}$, $\left(\bar{Y}\left(v\right),\,\bar{Y}\left(w\right)\right)_d=\sum\limits_{i=1}^{N}y\left(v;\,d_i\right)y\left(w;\,d_i\right)$, $f=\left\{f_i\right\}_{i=1}^{N}$.

Легко побачити справедливість рівності

$$2J\left(v\right)=\pi\left(v,v\right)-2L\left(v\right)+\left\|\bar{Y}\left(u_n\right)-f\right\|_d^2.\qquad (12)$$

Нехай $u_n + \Delta u_n \in \mathcal{U}$. Тоді $\forall \lambda \in (0,1)$, $u_n + \lambda \Delta u_n \in \mathcal{U}$. Нехтуючи членами другого порядку малості, отримуємо

$$\begin{aligned} Y(u_{n+1}) &\approx \tilde{Y}(u_{n+1}) = Y(u_n) + \theta, \\ Y(u_n + \lambda \Delta u_n) &\approx Y(u_n) + \lambda \theta, \end{aligned} \tag{13}$$

де θ — розв'язок задачі (11), (12).

Врахувавши (13), отримуємо

$$\left\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \right\rangle = \lim_{\lambda \to 0} \frac{J(u_n + \lambda \Delta u_n) - J(u_n)}{\lambda} \approx \left(\bar{Y}(u_n) - f,\ \bar{\tilde{Y}}(u_{n+1}) - \bar{Y}(u_n) \right)_d . \tag{14}$$

Врахувавши (14), отримуємо

$$\left\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \right\rangle \approx \sum_{i=1}^{N} \left(y(u_n; d_i) - f_i \right)\left(\tilde{y}(u_{n+1}; d_i) - y(u_n; d_i) \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} \frac{d}{dr}\left(r\,k \frac{dT}{dr} \right) \psi\, dr + r_1 k \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_1} \psi(r_1) - r_2 k \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_2} \psi(r_2) +$$

$$+ \Delta u_n \left(\xi \left\{ k \frac{dT}{dr} \right\}^{+} \psi^{+} - \xi \left\{ k \frac{dT}{dr} \right\}^{-} \psi^{-} \right),$$

або

$$\left\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \right\rangle = \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} \frac{d}{dr}\left(rk \frac{dT}{dr} \right) \psi\, dr + r_1 k \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_1} \psi(r_1) -$$

$$- r_2 k \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_2} \psi(r_2) + \Delta u_n \left(\xi \left\{ k \frac{dT}{dr} \right\}^{+} \psi^{+} - \xi \left\{ k \frac{dT}{dr} \right\}^{-} \psi^{-} \right).$$

Отже, $J'_{u_n} \approx \tilde{\psi}_n$,

де

$$\tilde{\psi}_n = \left\{ \tilde{\psi}_n^i \right\}_{i=1}^{2},$$

$$\tilde{\psi}_n^1 = \int_{\Omega_1} \frac{d}{dr}\left(r \frac{dT}{dr} \right) \psi\, dr + \Delta u_n \left(r_1 k \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=r_1} \psi(r_1) - \xi \left\{ k \frac{dT}{dr} \right\}^{-} \psi^{-} \right),$$

$$\tilde{\psi}_n^2 = \int_{\Omega_2} \frac{d}{dr}\left(r \frac{dT}{dr} \right) \psi\, dr + \Delta u_n \left(\xi \left\{ k \frac{dT}{dr} \right\}^{+} \psi^{+} - r_2 k \frac{dT}{dr} \Big|_{r=r_2} \psi(r_2) \right).$$

Запропонованою вище методологією розв'язано модельний приклад.

Нехай $r_1 = \pi/4$, $r_2 = \pi$, $\xi = \pi/2$. Класичний розв'язок крайової задачі (1), (4) на відрізку $\left[\pi/4, \pi/2\right]$ набуває вигляду $T = 1.5\cos(0.5r) + 2$,

$y = \cos(r)$, а на відрізку $\left[\pi/2, \pi\right]$ $T = 1.5\exp(-0.5r) + 1.2$, $y = 1.2\exp(-0.5r) + 1$. Також відомо $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 1.02822$, $\alpha_2 = 0$; $\beta_2 = 0.574025$; $k_1 = 2$; $k_2 = 3.10176$, $\lambda_1 = 2$, $\mu_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\mu_2 = 1.053169$, $\alpha = 3$. Вважаємо, що в цій задачі $u \in \mathcal{U}$ невідоме, $f_0 = T(r_1)$.

У таблиці наведено кількість ітерацій, необхідних для досягнення значення $u_n = 0.450672$ за точністю закінчення ітераційного процесу ε.

Для наведених вхідних даних задачу розв'язано за допомогою градієнтних методів, де на кожному кроці визначення (n + 1)-го наближення u_{n+1} розв'язку $u \in \mathcal{U}$ пряма та спряжена задачі розв'язані за допомогою МСЕ з використанням кусково-квадратичних функцій шляхом мінімізації відповідного функціонала енергії. В цьому випадку похибка $O\left(h^2\right)$ в нормі простору Соболєва $W_2^1(\Omega)$, h — найбільша з довжин всіх скінченних елементів.

Таблиця

Результати обчислювального експерименту

N_1	20		50		50		30	
N_2	20		50		30		50	
ε	10^{-5}	10^{-10}	10^{-5}	10^{-10}	10^{-5}	10^{-10}	10^{-5}	10^{-10}
$u_0=1$	25	60	22	67	24	59	28	63
$u_0=10$	48	81	45	73	41	73	40	85
$u_0=100$	181	185	173	209	159	201	169	194

Висновки. За допомогою градієнтних методів розв'язано задачу ідентифікації щільності теплового потоку в умові спряження при відомому його зміщенні для термопружного деформування довгої складеної циліндричної оболонки. Розв'язано модельні приклади.

Список використаних джерел:

1. Сергиенко И. В., Дейнека В. С. Системный анализ много-компонентных распределенных систем. Киев: Наук. думка, 2009. 640 с.
2. Sergienko I. V., Deineka V. S. Optimal control of distributed systems with conjugation conditions. New York: Kluwer Academic Publishers, 2005. 400 p.
3. Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988. 288 с.
4. Аралова А. А., Дейнека В. С. Численное решение обратных краевых задач осесимметричного термоупругого деформирования длинного толстого полого цилиндра. *Компьютерная математика.* 2011. № 1. С 3–12.

5. Аралова А. А., Дейнека В. С. Оптимальное управление термо-напряженным состоянием полого цилиндра. *Доповіді національної академії наук України.* 2012. № 5. С. 38–42.
6. Аралова А. А. Численное решение обратных задач термо-упругости для составного цилиндра. Кибернетика и системный анализ. 2014. № 5. С. 164–172.
7. Коваленко А. Д. Термоупругость. Киев: Наук. думка, 1975. 216 с.
8. Мотовилевец И. А., Козлов В. И. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 1. Термоупругость. Киев: Наук. думка, 1987. 264 с.

The consideration of algorithm of the identification, based on optimal control theory, for thermal resistance for thermoelastic deformation of long cylindrical composite shell was made.

Key words: *thermoelastic state, gradient methods, cylindrical body.*

Одержано 23.03.2017

УДК 519.85

Т. М. Барболіна, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Полтавський національний педагогічний університет
імені В. Г. Короленка, м. Полтава

КОМБІНАТОРНА ОПТИМІЗАЦІЯ НА РОЗМІЩЕННЯХ: ОГЛЯД ОСТАННІХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Наведений огляд останніх результатів щодо розв'язування задач комбінаторної оптимізації на розміщеннях. Висвітлено розв'язування задач як в умовах визначеності, так і зі стохастичною невизначеністю, а також моделювання детермінованими і стохастичними задачами комбінаторної оптимізації на розміщеннях.

Ключові слова: *комбінаторна оптимізація, стохастична оптимізація, оптимізаційні задачі на розміщеннях.*

Вступ. Серед оптимізаційних задач з обмеженнями комбінаторного характеру, які привертають увагу багатьох дослідників (див., наприклад, [1–23]), важливий клас становлять задачі на евклідових комбінаторних множинах, зокрема, задачі на розміщеннях. Ряд результатів щодо властивостей таких задач, зокрема, достатню умову екстремалі в лінійній безумовній задачі на розміщеннях, отримано в [4, 5] незвідну систему обмежень опуклої оболонки загальної множини розміщень, у роботах [6–8] та інших запропоновано методи розв'язування лінійних і деяких класів нелінійних задач. Низка досліджень, зокрема [3, 9, 10], присвячені дослідженню задач комбінаторної оптимізації з різними видами невизначеності (інтервальною, нечіткою).

Мета даної статті — це огляд деяких нових результатів щодо розв'язування оптимізаційних задач на розміщеннях, у тому числі, з імовірнісною невизначеністю.