

12. Hachkevych O. R. Thermoelastic state of a conducting plate under the action of an electromagnetic field in the form of damped sinusoid / O. R. Hachkevych, R. S. Musij, H. B. Stasiuk // Mat. Sci. — 2003. — Vol. 39, № 6. — P. 780–787.
13. Hachkevych O. R. Coupled problem of thermomechanics for an electric conducting layer under heterogeneous pulse electromagnetic action / / O. R. Hachkevych, R. S. Musij, H. B. Stasiuk // Mat. Sci. — 2009. — Vol. 45, № 4. — P. 532–541.

Connected initial-boundary value thermomechanical problem for electric conductive layer with a plane-parallel boundaries for homogeneous non-stationary electromagnetic action was formulated. Using cubic approximation for distributions of all key functions over the layer thickness the general solution of this problem was obtained. On this basis the solution of the problem in the fading sine wave regime was constructed and thermostressed state of the considered layer depending on the amplitude and frequency characteristics of this electromagnetic action was numerically analyzed.

Key words: *electric conductive layer, connected problem, thermostressed state, impulse electromagnetic field, fading sine wave regime.*

Отримано: 15.07.2016

УДК 519.6,539.3

Н. І. Ободан, д-р техн. наук, професор,

В. Я. Адлуцький, канд. фіз.-мат. наук,

В. О. Громов, канд. фіз.-мат. наук

Дніпропетровський національний університет
імені Олеся Гончара, м. Дніпропетровськ

ПОБУДОВА РОЗГАЛУЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ КАРМАНА ЗА НЕОДНОРІДНИХ КРАЙОВИХ УМОВ

Розглянуто задачу побудови біфуркаційної картини для рівнянь Кармана за неоднорідних крайових умов. Для розв'язання задачі використовувався нелінійний узагальнений метод Канторовича у поєднанні з методом продовження по параметру та алгоритмом аналізу особливих точок розв'язку.

Ключові слова: *біфуркація розв'язків нелінійних крайових задач, рівняння Кармана, неоднорідні крайові умови, нелінійний узагальнений метод Канторовича.*

Вступ. Практичне значення процесів та явищ, що описуються нелінійними крайовими задачами для рівнянь Кармана, поряд із великою кількістю можливих розв'язків, які спостерігаються у застосуваннях, обумовлюють інтерес до побудови біфуркаційної множини для зазначених рівнянь, визначених на різноманітних многовидах та доповнених різними типами крайових умов. При цьому параметри, що характеризують зовнішній вплив на процес, що розглядається,

можуть входити як у диференціальні співвідношення (права частина рівнянь Кармана), так і в крайові умови. В останньому випадку говоритимемо про неоднорідні крайові умови.

Передусім зазначимо монографії [1, 6, 12], у яких із загальноматематичних позицій здійснюється аналіз поняття біфуркації та розгалуження розв'язків нелінійних крайових задач.

У роботах [3, 4] нелінійна крайова задач для рівнянь Кармана формулюється для напівсферичної області, з однорідними крайовими умовами. Для розв'язання задачі використовувався метод Релея-Ритца: функції апроксимувалися відрізками ортогональних функціональних рядів (ряд Фур'є у одному напрямку та ряд, складений з функцій Бесселя та модифікованих функцій Бесселя, — у іншому).

Тут було одержано розв'язки як симетричні, так і асиметричні відносно центрального перерізу напівсфери. Було встановлено, що для гілок, яким відповідають симетричні розв'язки, поряд із значеннями параметрів задачі, для яких малі зміни приводять до малих змін характеру розв'язку («еволюційні» зміни), існують значення параметрів, для яких малі зміни приводять до різких якісних змін характеру розв'язку («стрибокподібні» зміни). Останні пов'язані із приєднанням до основної гілки розв'язку гілок, що були ізольованими для близьких значень параметрів. Несиметричним розв'язкам відповідає ряд гілок, які відгалужуються від стійкої ділянки основної гілки симетричних форм і знову приєднуються до неї на нестійкій ділянці.

У роботі [17] для різних типів однорідних крайових умов розглядається нелінійна крайова задача для рівнянь Кармана, визначена на циліндричному сегменті; при цьому функція, що описує зовнішній вплив, має локалізований характер. Як інструмент побудови біфуркаційної картини автори використовували метод скінченних елементів у поєднанні з методом продовження по параметру з оптимальним вибором параметра продовження. Тут встановлено існування гілок, що відповідають симетричним та асиметричним (відносно центральних перерізів) розв'язкам.

У монографії [16] наведено повну структуру розгалуження нелінійної крайової задачі, визначеної на замкнутій циліндричній поверхні, з однорідними крайовими умовами, при цьому функція, що описує зовнішній вплив постійна на області визначення. Тут фіксуються гілки первинного та вторинного розгалуження; першим відповідають регулярні (у коловому напрямку) розв'язки, другим — локалізовані.

Роботи [7, 8] присвячені аналізу біфуркаційної картини для нелінійної крайової задачі, визначеної на циліндричній області, із неоднорідними крайовими умовами; при цьому функція, що описує зовнішній вплив, дорівнює тотожному нулю на всій області визначення; біфуркаційна картина досліджувалась у функції параметра, що визначає неоднорідність крайових умов. Для одержання постбіфуркаційних гілок

розв'язку використовувався метод «стрибка» у евклідовому просторі, одержаному через скінченноелементну апроксимацію розв'язувальних рівнянь. Використовуючи зазначений метод, автори одержали окремі гілки вторинного розгалуження біфуркаційної структури.

У роботах [13, 14] зазначена нелінійна крайова задача була зведена до скінченновимірної за допомогою введення гіпотези про нескінченну протяжність області визначення у поздовжньому напрямку та апроксимації розв'язку у коловому напрямку відрізком тригонометричного ряду.

Гіпотеза щодо нескінченної протяжності області у поздовжньому напрямку дозволило авторам цих робіт використати апарат теорії динамічних систем для аналізу біфуркацій нелінійної крайової задачі для рівнянь Кармана, трактуючи поздовжню координату як час, та стандартні пакети біфуркаційного аналізу поведінки динамічних систем для здійснення відповідних розрахунків. Тут було одержано розв'язки, регулярні в коловому напрямку та локалізовані у поздовжньому. У роботі [15] наведено математичні підвалини цього методу.

У роботі [9], що спирається на даний підхід, обґрунтовується теза, що в процесі дослідження реальних систем, поведінка яких описується рівняннями Кармана, як оцінки значень параметрів, при яких система зазнає катастрофи, мають використовуватися не значення параметрів, яким відповідає перша біфуркація, а значення параметрів, при яких стають рівними значення функціонала варіаційної постановки задачі на гілці розв'язку, що передує першій біфуркації, та гілках первинного, вторинного і т.д. розгалуження (тобто досліджувати структуру не біфуркаційної множини, а множини Максвелла [2]). Такий підхід веде до необхідності побудови повної біфуркаційної картини для нелінійної крайової задачі для рівнянь Кармана.

У монографії [16] наведено картину розгалуження для випадку нелінійної крайової задачі, визначеної на циліндричній поверхні, за неоднорідних крайових умов; функція, що описує зовнішній вплив, дорівнює тотожному нулю. Картина містить гілки первинного, вторинного та третинного розгалуження: першим відповідають розв'язки, регулярні у обох напрямках, другим — розв'язки, локалізовані у поздовжньому та регулярні у коловому напрямку, врешті, гілкам третинного розгалуження відповідають розв'язки, локалізовані в обох напрямках.

У цій роботі розглянуто нелінійну крайову задачу для рівнянь Кармана, визначених на циліндричній поверхні, з неоднорідними граничними умовами, для випадку, коли, функція, що описує зовнішній вплив, постійна на області визначення, проте не дорівнює тотожному нулю.

Узагальнений розв'язок рівнянь Кармана. Задача формулюється на циліндричній поверхні,

$$\Omega = \left\{ x_1^{\min} \leq x_1 \leq x_1^{\max}; x_2^{\min} \leq x_2 \leq x_2^{\max}; x_2^{\min} \equiv x_2^{\max} \right\},$$

що обмежена контуром

$$\Gamma \equiv \partial\Omega = \left\{ x_1 = x_1^{\min}, x_2^{\min} \leq x_2 \leq x_2^{\max} \right\} \cup \left\{ x_1 = x_1^{\max}, x_2^{\min} \leq x_2 \leq x_2^{\max} \right\};$$

для формулювання задачі у цій роботі використані такі позначення:

$$\nabla_k^2 \alpha \equiv k_2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} + k_1 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2}; \quad (1)$$

$$L(\alpha, \beta) \equiv \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1^2},$$

$$K(\alpha, \beta) \equiv \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1^2} - \mu \left[\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1^2} \right] + \\ + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_2^2} + 2(1 + \mu) \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$Q_1(\alpha, \beta, \gamma) \equiv \left[\frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1^2} \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \right] \frac{\partial \gamma}{\partial x_2} + \\ + \left[\frac{\partial^2 \beta}{\partial x_2^2} \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \right] \frac{\partial \gamma}{\partial x_1},$$

$$Q_2(\alpha, \beta) \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \right)^2 - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \frac{\partial \alpha}{\partial x_2},$$

$W_2^2(\Omega)$ — простір С. Л. Соболева.

Рівняння формулюються (у ортогональній системі координат (x_1, x_2)) як система нелінійних рівнянь у частинних похідних вигляду:

$$a_1 \nabla^4 u_1 + L(u_1, u_2) - \nabla_k^2 u_2 = \lambda, \\ a_2 \nabla^4 u_2 - \frac{1}{2} L(u_1, u_1) - \nabla_k^2 u_1 = 0, \quad (2)$$

де $\lambda = \text{const}$ — функція, що описує зовнішній вплив; k_1, k_2, a_1, a_2 — додатні константи.

Задача має бути доповнена умовами періодичності на контурі

$$x_2 = x_2^{\min} \equiv x_2^{\max} \quad \text{та} \quad \text{крайовими умовами} \quad u_1|_{\Gamma} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right|_{\Gamma} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \right|_{\Gamma} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right|_{\Gamma} = -p; \quad p \text{ — параметр, що визначає неоднорід-}$$

ність крайових умов.

Узагальнений розв'язок зазначеної нелінійної крайової задачі (враховуючи заміну $u_2 = u_2 + \frac{px_2^2}{2}$) дається парою функцій $U = (u_1, u_2)$, $u_1 \in W_2^2(\Omega)$, $u_2 \in H_0(\Omega)$, що задовольняють інтегральним тотожностям:

$$\begin{aligned} & a_1 \iint_{\Omega} K(u_1, v_1) dx_1 dx_2 = \\ & = \iint_{\Omega} \left[\nabla_k^2 u_2 v_1 - Q_1(u_1, u_2, v_1) - \lambda v_1 - pc \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right] dx_1 dx_2, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & a_2 \iint_{\Omega} K(u_2, v_2) dx_1 dx_2 = \\ & = \iint_{\Omega} \left[\nabla_k^2 v_2 u_1 - Q_2(u_1, v_2) + p \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} - \mu \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \right) \right] dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (4)$$

для будь-яких довільних функцій $v_1 \in W_2^2(\Omega)$, $v_2 \in H_0(\Omega)$, де $H_0(\Omega)$ — замикання простору функцій

$$\left\{ \alpha \in W_2^2(\Omega), \alpha \Big|_{\Gamma} = 0, \frac{\partial \alpha}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0 \right\}$$

у нормі $\iint_{\Omega} K(\alpha, \alpha) dx_1 dx_2$; $\frac{\partial \cdot}{\partial n}$ — похідна за напрямком, нормальним до контуру Γ ; μ, c — параметри задачі.

Нелінійний узагальнений метод Канторовича (НУМК). Для відшукування розв'язків нелінійної крайової задачі (2) будується послідовність наближень до узагальненого розв'язку (3), (4) за допомогою представлення вектору невідомих функцій задачі на ітераціях алгоритму в вигляді:

$$\begin{aligned} U(x_1, x_2) &= \{u_j(x_1, x_2)\} = \left\{ h_j^{(i-1)}(x_1) g_j^{(i)}(x_2) \right\} \Big|_{j=\overline{1,2}}, i \rightarrow \infty \\ h_1^{(i-1)}(x_1) g_1^{(i)}(x_2) &\in W_2^2(\Omega), \quad h_2^{(i-1)}(x_1) g_2^{(i)}(x_2) \in H_2(\Omega). \end{aligned} \quad (5)$$

Представлення (5) дозволяє представити розв'язувальні співвідношення нелінійної крайової задачі (2) у вигляді послідовності систем диференціальних рівнянь вигляду (тут і далі пропущено верхній індекс, що відповідає номеру ітерації):

$$\frac{dh_j}{dx_1} = f_j^{x_1}(h(x_1), a^{x_2}(x_1), \lambda), \quad j = \overline{1,8}, \quad (7)$$

$$\frac{dg_j}{dx_2} = f_j^{x_2} \left(g(x_2), a^{x_1}(x_2), \lambda \right), j = \overline{1, 8}. \quad (8)$$

Для відшукування розв'язків зазначених нелінійних одновимірних крайових задач використовувався метод зведення нелінійної крайової задачі до еквівалентної задачі Коші [16]; на ітераціях методу обчислюються матриці Фреше для систем (7) і (8). Рівність нулю визначників цих матриць ($\det J_{x_1}$ та $\det J_{x_2}$, відповідно) визначає особливу точку розв'язку [11]:

$$\det J_{x_i} = 0, i = 1, 2. \quad (9)$$

Алгоритм організовує ітераційний процес, у межах якого підсистеми (7), (8) обчислюються окремо, на послідовних ітераціях, при цьому за підінтегральні функції (інтеграли визначають коефіцієнти системи) обираються наближення, одержані на попередній ітерації. Відповідно розв'язання двовимірної нелінійної крайової задачі зводиться до відшукування розв'язків послідовності нелінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь: визначений таким чином ітераційний процес подібний до узагальненого методу Канторовича [10].

Побудова та аналіз біфуркаційної структури розв'язку. Для визначення типу особливої точки, локалізованої за допомогою умови (9), розглядається розширена матриця Фреше, доповнена стовпчиком похідних «точкових» крайових умов за параметром продовження, J_λ та множина квадратних матриць J_k , одержаних з J_λ за допомогою видалення k -го стовпчика. Тоді, в точці біфуркації (в точці відгалуження нового розв'язку) виконано умову $\text{rank} J = \text{rank} J_k < N, \forall k = \overline{1, N}$, в граничній точці — $\text{rank} J < N, \text{rank} J_k = N, \forall k = \overline{1, N}$.

Алгоритм, що використовувався, дозволяє будувати малі розв'язки системи (розв'язки, що належать малому околу точки біфуркації), що відгалуджуються у особливій точці, яка розглядається, і відтак задати для кожної гілки розв'язку, точку яка їй належить. Тут здійснюється чисельна побудова рівнянь розгалуження [1] для одновимірних нелінійних крайових задач, що формуються на останній ітерації НУМК; при цьому в процесі формуванні одновимірного рівняння розгалуження співмножник, що визначає вигляд розв'язку у іншому напрямку, залишається незмінним — таким, яким його було одержано на попередній ітерації алгоритму.

Для забезпечення стійкості обчислювального процесу пропонується дещо відступити від точки біфуркації та шукати розв'язок на гіперсфері малого радіусу (що є своєрідним способом регуляризації

обчислювального процесу) [5], при цьому параметр, який був параметром продовження в процесі руху вздовж гілки, на який було зафіксовано точку біфуркації, перетворюється на змінну та визначається у межах обчислювального процесу.

Структура розв'язку нелінійної крайової задачі. Представлений вище метод було застосовано для побудови картини розгалуження нелінійної крайової задачі з неоднорідними крайовими умовами; параметри p та λ пов'язані співвідношенням $\frac{\lambda}{\lambda^*} + \frac{p}{p^*} = 1$, де λ^* — значення параметра λ , для якого фіксується перша точка біфуркації, якщо $p = 0$; аналогічно p^* — значення параметра p , для якого фіксується перша точка біфуркації, якщо $\lambda = 0$.

Широкомасштабний обчислювальний експеримент дозволив виявити структуру розв'язку нелінійної крайової задачі для рівнянь Кармана з неоднорідними крайовими умовами. На гілці розв'язку, що проходить через нульові значення параметра, фіксується спектр особливих точок розв'язку, що характеризуються однократною та двократною виродженістю.

Точки з однократною виродженістю породжують біфуркаційну підструктуру, що характеризується гілками первинного та вторинного розгалуження. При цьому, розв'язки, що відповідають гілкам первинного розгалуження, характеризуються малою змінністю у поздовжньому напрямку, та регулярні — у коловому; розв'язки, що відповідають гілкам вторинного розгалуження, характеризуються малою змінністю у поздовжньому напрямку, та локалізовані у коловому. Зазначені підструктури подібні до тих, що фіксуються у нелінійній крайовій задачі для рівнянь Кармана з однорідними крайовими умовами. Областю існування за параметром λ гілки вторинного розгалуження ϵ , зазвичай, область $0.5\bar{\lambda} \leq \lambda \leq 0.9\bar{\lambda}$, де $\bar{\lambda}$ — значення параметра, при якому фіксується точка первинного розгалуження, яка породжує дану біфуркаційну підструктуру; верхню межу гілок первинного галушення ϵ , природно, величина $\bar{\lambda}$, величина нижньої межі істотно змінюється в залежності від поведінки розв'язку у коловому напрямку.

Точки з двократною виродженістю породжують сукупність біфуркаційних підструктур, кожна з яких характеризується гілками первинного, вторинного та третинного розгалуження. Першим відповідають розв'язки, регулярні у обох напрямках, другим — розв'язки, локалізовані у поздовжньому та регулярні у коловому напрямку, врешті, гілкам третинного розгалуження відповідають розв'язки, локалізовані в обох напрямках. Зазначені підструктури подібні до тих,

що фіксуються у нелінійній крайовій задачі для рівнянь Кармана з неоднорідними крайовими умовами та нульовою правою частиною. Тут можна виділити характерні області існування розв'язків, пов'язаних з гілками первинного, вторинного та третинного розгалуження, за параметром p . Зокрема, нижня межа гілок первинного галуження складає $0.27\bar{p}$, вторинного — $0.45\bar{p}$, третинного — $0.35\bar{p}$, де \bar{p} — значення параметра, при якому фіксується точка первинного розгалуження, яка породжує дану біфуркаційну підструктуру.

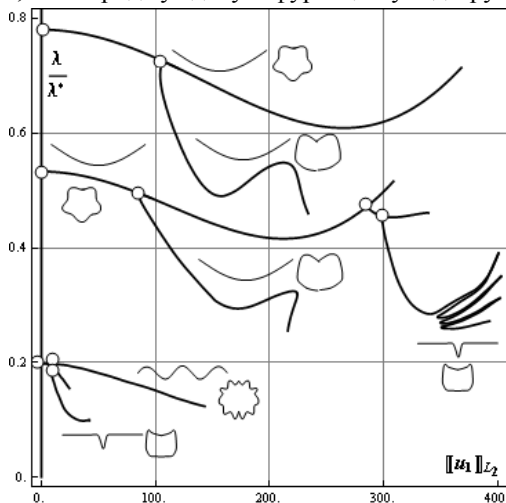


Рис. 1. Характерні структури розгалуження для різних співвідношень параметрів задачі

Обчислювальний експеримент дозволив виділити у просторі параметрів (λ, p) три якісно різні області. У першій з них

$(0.6 \leq \frac{\lambda}{\lambda^*} < 1.0)$ перша точка спектра характеризується однократною

виродженістю із нею асоціюється біфуркаційна підструктура першого типу. Такий тип розгалуження зображено на рис. 1 (верхня біфуркаційна підструктура). Рисунок поданий у координатах $\|u_1\|_{L_2} - \lambda$; він

відповідає значенням параметрів задачі $\Omega = \{0 \leq x_1 \leq 4; 0 \leq x_2 \leq 2\pi\}$,

$a_1 = 0.1; a_2 = -1; k_1 = 150; k_2 = 0; \mu = 0.3$; точки біфуркації помічені колами; поряд із гілками подано подовжній та коловий перетини

розв'язку, що їм відповідають. Области $0.0 < \frac{\lambda}{\lambda^*} \leq 0.3$ відповідає пе-

рша точка спектра з двократною виродженістю та асоційована з нею біфуркаційна підструктура другого типу (рис. 1, нижня біфуркаційна підструктура). Найцікавішою виявилась область $0.3 \leq \frac{\lambda}{\lambda^*} < 0.6$: тут загальна структура розгалуження відповідає біфуркаційній структурі першого типу, проте гілками вторинного розгалуження можуть бути гілки, притаманні як біфуркаційній підструктурі першого типу, так і біфуркаційній підструктурі другого типу.

Висновки.

1. Застосування нелінійного узагальненого метод Канторовича у поєднанні з методом продовження по параметру та алгоритмом аналізу особливих точок розв'язку дозволяє побудувати біфуркаційну картину для нелінійної крайової задачі для рівнянь Кармана.
2. В залежності від параметрів, що характеризують функцію зовнішнього впливу та неоднорідність крайових умов, біфуркаційна картина характеризується наявністю підструктур, що складаються з гілок первинного та вторинного розгалуження, та підструктур, що складаються з гілок первинного, вторинного та третинного розгалуження. Крім того у певній області простору параметрів можливе існування комбінованих підструктур, для яких гілками вторинного розгалуження можуть бути гілки, притаманні як біфуркаційній підструктурі першого типу, так і біфуркаційній підструктурі другого типу.
3. Підструктури першого типу можна співставити із картиною розгалуження, яка спостерігається для рівнянь Кармана з однорідними крайовими умовами та постійною функцією зовнішнього впливу, другого — з картиною для рівнянь Кармана з неоднорідними крайовими умовами та нульовою функцією зовнішнього впливу.

Список використаних джерел:

1. Вайнберг М. М. Теория ветвления нелинейных уравнений / М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. — М. : Наука, 1969. — 528 с.
2. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф / Р. Гилмор. — М. : Мир, 1984. — 350 с.
3. Григолюк Э. И. Неосесимметричное закритическое поведение пологих сферических куполов / Э. И. Григолюк, Е. А. Лопаницын // Прикл. математика и механика. — 2003. — Т. 67, № 6. — С. 921–932.
4. Григолюк Э. И. Осесимметричное закритическое поведение пологих сферических куполов / Э. И. Григолюк, Е. А. Лопаницын // Прикл. математика и механика. — 2002. — Т. 66, № 4. — С. 621–633.
5. Пешков И. М. Ветвление решений математических моделей гипотетических генных сетей / И. М. Пешков // Вестник НГУ. Сер. матем., мех., информ. — 2007. — Т. 7, № 3. — С. 59–72.

6. Сидоров Н. А. Общие вопросы регуляризации в задачах теории ветвления / Н. А. Сидоров. — Иркутск : Издательство Иркутского университета, 1982. — 312 с.
7. Fujii F. Symmetry-Breaking Bifurcation and Post-Buckling Strength of a Compressed Circular Cylinder / F. Fujii, H. Noguchi // *Solid Mechanics and Fluid Mechanics: Computational Mechanics for the Next Millennium*. — Amsterdam : Pergamon, 1999. — Vol. 1. — P. 563–568.
8. Fujii F. Static path jumping to attain postbuckling equilibria of a compressed circular cylinder / F. Fujii, H. Noguchi, E. Ramm // *Comp. Mech.* — 2000. — № 26. — P. 259–266.
9. Hunt G. W. Maxwell critical loads for axially for axially loaded cylindrical shells / G. W. Hunt, E. Lucena Neto // *ASME J. Appl. Mech.* — 1993. — № 60. — P. 702–706.
10. Kantorovich L. V. Approximate Methods of Higher Analysis / L. V. Kantorovich, V. I. Krylov. — N.-Y. : Interscience, 1958. — 682 p.
11. Keller J. B. Bifurcation Theory and Nonlinear Eigenvalue Problems / J. B. Keller, S. Antman (Eds) . — N.-Y. : Benjamin WA inc, 1969. — 250 p.
12. Kuznetsov Y. A. Elements of Applied Bifurcation Theory / Y. A. Kuznetsov. — N.-Y.: Springer, 1998. — 614 p.
13. Lord G. J. Computation of homoclinic orbits in partial differential equations: An application to cylindrical shell buckling / G. J. Lord, A. R. Champneys, G. W. Hunt // *SIAM J. Sci. Comp.* — 1999. — Vol. 21, № 2. — P. 591–619.
14. Lord G. J. Homoclinic and heteroclinic orbits underlying the post-buckling of axially-compressed cylindrical shell / G. J. Lord, A. R. Champneys, G. W. Hunt // *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* — 1999. — № 170. — P. 239–251.
15. Lord G. J. Numerical computation of solitary waves on infinite cylinders / G. J. Lord, D. Peterhof, B. Sanstede, A. Sheel // *SIAM J. Num. Anal.* — 2000. — Vol. 37, № 5. — P. 1420–1454.
16. Obodan N. I. Nonlinear behaviour and stability of thin-walled shells / N. I. Obodan, O. G. Lebedev, V. A. Gromov. — N.-Y. : Springer, 2013. — 180 p.
17. Zhou Y. Nonlinear elastic buckling and postbuckling analysis of cylindrical panels / Y. Zhou, I. Stanculescu, T. Eason, M. Spottswood // *Finite Elements in Analysis and Design*. — 2015. — Vol. 96. — P. 41–50.

The paper deals with the problem to construct the bifurcation structure for von Karman equations with non-homogeneous boundary conditions. To solve the problem under study, one employs the non-linear generalized Kantorovich method along with path-tracing technique and algorithm to analyze singular points of the solution.

Key words: *bifurcation of PDEs, von Karman equations, non-homogeneous boundary conditions, the non-linear generalized Kantorovich method.*

Отримано: 14.09.2016